Blatt Nr. 7
Das Lebesgueintegral

24. November 2025

Abgabe am 1. Dezember 2025

1. (4 Punkte) Fermats Trick. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty)$ eine nichtnegative messbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{r \downarrow 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^k \mu(r^k \le f < r^{k+1}).$$

Verwenden Sie dies, um zu entscheiden, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$|x|^\alpha \chi_{\{|x| \le 1\}}$$

bezüglich des Lebensgue-Maßes über $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Berechnen Sie das entsprechende Integral.

2. (9 Punkte) Alternative Maß- und Integral-Konstruktion. Sei X eine nichtleere Menge und V ein Vektorraum von beschränkten reellen Funktionen mit Definitionsbereich X, sodass gilt:

- Die konstante Funktion 1 gehört zu V,
- Wenn $f, g \in V$, dann gehört die Funktion $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ zu V,
- Wenn $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ eine wachsende und gleichmäßig beschränkte Folge ist, dann gehört $\lim_{n\to\infty} f_n$ zu V.

Zeigen Sie, dass eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X existiert, sodass V mit den $\mathcal{A}$-messbaren beschränkten Funktionen übereinstimmt.

Sei nun $T\colon V \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, sodass

- $Tf \ge 0$ für $f \in V$, $f \ge 0$,
- Für jede Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ mit $f_n \ge 0$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} Tf_n = 0$.

Zeigen Sie, dass ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ existiert, sodass

$$Tf = \int_X f \, d\mu, \quad \text{für alle} \quad f \in V.$$

3. (7 Punkte) Konvexe Mengen. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ konvex und beschränkt, mit $0 \in \operatorname{int}(A)$. Zeigen Sie das Folgende:

a) $\operatorname{int}(A) \subset \bigcup_{k\geq 2}\big((1-\frac{1}{k})\overline{A}\big)$.

b) Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, und alle $x \in \big(1-\frac{1}{k}\big)A$ gilt $B(x, \frac{\delta}{k}) \subset \operatorname{int}(A)$.

c) $\operatorname{int}(A) \supset \bigcup_{k\geq 2}\big((1-\frac{1}{k})\overline{A}\big)$. (Hinweis: Approximieren Sie $x \in \big(1-\frac{1}{k}\big)\overline{A}$ durch Punkte aus $\big(1-\frac{1}{k}\big)A$ und nutzen Sie (b).)

d) $\lambda^d(\overline{A}) = \lambda^d(\operatorname{int}(A))$.

e) ∂A is λ^d-messbar mit $\lambda^d(\partial A) = 0$.

f) A ist λ^d-messbar.

g) Finden Sie eine λ^d-Nullmenge $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\lambda^d(\partial B) = \infty$.