Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2025/2026

Analysis III
Prof. Dr. Michael Růžička
Dr. Luciano Sciaraffia

Blatt Nr. 8
Konvergenzsätze

1. Dezember 2025

Abgabe am 8. Dezember 2025

Konvergenz im Maß und majorisierte Konvergenz. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Beweisen Sie, dass der Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue weiterhin gültig ist, wenn man die fast-überall-Konvergenz durch die Konvergenz im Maß ersetzt. Gilt dies auch, falls X unendliches Maß hat?

1. (4 Punkte) Ein Integrierbarkeitskriterium. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Beweisen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(|f| \geq n)$$

konvergiert. Was geschieht, wenn X unendliches Maß hat?

2. (6 Punkte) Das geometrisches Mittel einer Funktion. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\varepsilon > 0$. Sei $f\colon X \to [\varepsilon, \infty)$ eine integrierbare Funktion.

a) Zeigen Sie, dass f^p, $p \in [0, 1)$, und $\log f$ integrierbar sind.

b) Wir definieren die Funktion

$$F(p) \coloneqq \int_X f^p \, d\mu, \quad p \in [0, 1].$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar auf $[0, \frac{1}{2})$ ist und berechnen Sie die Ableitung $F'(p)$.

c) Berechnen Sie den Wert des Limes

$$\lim_{p \downarrow 0} \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

3. (5 Punkte) Regelintegral vs. Lebesgueintegral. Seien $-\infty \leq A < B \leq \infty$ und sei $f\colon (A, B) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Regelfunktion auf jedem Intervall $[a, b] \subset (A, B)$ ist. Zeigen Sie, dass f auf (A, B) genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn das uneigentliche Regelintegral $\int_A^B |f(x)| \, dx$ existiert und endlich ist, und dass in diesem Fall das Lebesgue- und Regelintegral übereinstimmen.