Michael Růžička

Nichtlineare Funktionalanalysis

Eine Einführung

Inhaltsverzeichnis

Notation IX

1 Fixpunktsätze 1
1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz 2
1.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 5
1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder 9
1.2.1 Der Satz von Brouwer 11
1.2.2 Kompakte Operatoren 21
1.2.3 Der Satz von Schauder 27
1.2.4 Anwendung auf Differentialgleichungen 29

2 Integration und Differentiation in Banachräumen 35
2.1 Bochner–Integrale 35
2.1.1 L^p–Räume mit Werten in Banachräumen 41
2.2 Differentiation von Funktionen mit Werten in Banachräumen 44
2.2.1 Satz über implizite Funktionen 51

3 Die Theorie monotoner Operatoren 57
3.1 Monotone Operatoren 61
3.1.1 Der Satz von Browder und Minty 65
3.1.2 Der Nemyckii–Operator 69
3.1.3 Quasilineare elliptische Gleichungen 71
3.2 Pseudomonotone Operatoren 76
3.2.1 Der Satz von Brezis 76
3.2.2 Quasilineare elliptische Gleichungen II 82
3.2.3 Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen 85
3.2.4 Evolutionsprobleme 89
3.2.5 Quasilineare parabolische Gleichungen 98
3.3 Maximal monotone Operatoren 116
3.3.1 Subdifferentiale 119
3.3.2 Der Satz von Browder 129
3.3.3 Variationsungleichungen 136

4 Der Abbildungsgrad 141
4.1 Der Abbildungsgrad von Brouwer 141
4.1.1 Die Konstruktion des Abbildungsgrades von Brouwer . 142
4.1.2 Technische Hilfsmittel 144
4.1.3 Erweiterung auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen 155
4.1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Brouwer 159
4.2 Der Abbildungsgrad von Leray–Schauder 163
4.2.1 Abbildungsgrad für endlich–dimensionale Vektorräume 164
4.2.2 Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray–Schauder 166
4.2.3 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Leray–Schauder 168
4.2.4 Quasilineare elliptische Gleichungen III 171

A Appendix 177
A.1 Topologische Räume 177
A.2 Metrische Räume 180
A.3 Vektorräume 182
A.4 Banachräume 183
A.5 Hilberträume 184
A.6 Operatoren 185
A.7 Dualität in Banachräumen 186
A.8 Schwache Topologie und schwache Konvergenzen 188
A.9 Konvexität und Glattheitseigenschaften der Norm 192
A.10 Wichtige Sätze aus der linearen Funktionalanalysis 193
A.11 Lebesgue–Maß und Lebesgue–Integral 196
A.12 Funktionenräume 204
A.12.1 Räume stetiger Funktionen 204
A.12.2 Lebesgue–Räume $L^p(\Omega)$ 207
A.12.3 Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)$ 211

Literaturverzeichnis 217

Index 219

3 Die Theorie monotoner Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir folgendes elementare Resultat verallgemeinern:

Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle folgende Bedingungen:

(a) *F ist monoton wachsend,*

(b) *F ist stetig,*

(c) *F ist koerziv, d.h. $F(u) \to \pm\infty$ falls $u \to \pm\infty$.*

Dann besitzt die Gleichung

$$F(u) = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}$.

Falls F strikt monoton ist, so ist die Lösung u eindeutig bestimmt. Dieser klassische Existenzsatz folgt aus dem Mittelwertsatz für stetige Funktionen.

Die *Theorie monotoner Operatoren*, die dieses Resultat auf Gleichungen der Form

$$Au = b \tag{0.1}$$

in einem reflexiven Banachraum X verallgemeinert, beruht auf einigen grundlegenden Prinzipien und Tricks, die wir kurz veranschaulichen wollen. Da man sich hierbei leicht in technischen Details verlieren kann, gehen wir vorerst nicht auf diese ein.

Angenommen

(a) *der Operator $A\colon X \to X^*$ ist* ***monoton*** *auf dem separablen, reflexiblen Banachraum X, d.h. für alle $u, v \in X$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq 0\,,$$

(b) *A ist* ***hemistetig****, d.h. die Abbildung*

$$t \to \langle A(u + tv), w\rangle_X$$

ist stetig im Intervall $[0, 1]$, für alle $u, v, w \in X$,

(c) *A ist **koerziv**, d.h.*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \infty \,,$$

dann besagt der Hauptsatz über monotone Operatoren, dass A surjektiv ist, d.h.

$$\forall\, b \in X^* \quad \exists\, u \in X : \qquad Au = b \,.$$

Der Beweis dieses Resultats besteht im wesentlichen aus folgenden Schritten:

1. *Galerkin–Approximation*: Da X separabel ist, gibt es eine Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X, d.h. für $X_n := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$ gilt:

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} \,.$$

Wir approximieren (0.1) durch Probleme in den endlich–dimensionalen Räumen X_n, auf welche der Satz von Brouwer anwendbar ist, der die Existenz einer Lösung u_n für jedes dieser Probleme sichert.

2. *Apriori Abschätzung*: Wir zeigen dann, dass die Folge der Lösungen (u_n) beschränkt ist. Dies geschieht auf Grundlage folgenden Arguments: Wenn $A : X \to X^*$ koerziv ist, dann existiert ein $R_0 > 0$, so dass für alle u mit $\|u\|_X > R_0$ gilt:

$$\langle Au, u\rangle_X \geq (1 + \|b\|_{X^*})\|u\|_X \,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle_X - \langle b, u\rangle_X &\geq (1 + \|b\|_{X^*})\|u\|_X - \|b\|_{X^*}\|u\|_X \\ &\geq \|u\|_X \geq R_0 \,.\end{aligned}$$

Wenn $u \in X$, mit $\|u\|_X > R_0$, eine Lösung von $Au = b$ ist, dann gilt aufgrund dieser Rechnung $0 \geq R_0 > 0$. Dies ist aber ein Widerspruch. Daher erhalten wir, dass jede Lösung $u \in X$ von $Au = b$ der *apriori Abschätzung*

$$\|u\|_X \leq R_0$$

genügt.

3. *Schwache Konvergenz*: Da X ein reflexiver Banachraum ist, folgt aus dem Satz von Eberlein–Šmuljan (cf. Satz A.8.15), dass aus der beschränkten Folge (u_n) eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) ausgewählt werden kann, d.h.

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ in } X \quad (k \to \infty) \,.$$

4. *Existenz einer Lösung*: Der so gefundene Grenzwert u ist eine Lösung der Gleichung $Au = b$. Diese Aussage beweisen wir mithilfe des *Minty–Tricks*.

0.2 Lemma (Minty 1962). *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein hemistetiger, monotoner Operator. Dann gilt:*

(i) *Der Operator A ist maximal monoton, d.h. seien $u \in X$, $b \in X^*$ gegeben, so dass für alle $v \in X$*

$$\langle b - Av, u - v\rangle_X \geq 0\,,$$

dann folgt $Au = b$.

(ii) *A genügt der Bedingung (M), d.h. aus*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X && (n \to \infty)\,,\\ Au_n &\rightharpoonup b && \text{in } X^* && (n \to \infty)\,,\\ \langle Au_n, u_n\rangle_X &\to \langle b, u\rangle_X && && (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

folgt $Au = b$.

(iii) *Aus*

$$u_n \rightharpoonup u \ \ \text{in } X\,, \quad Au_n \to b \ \ \text{in } X^* \quad (n \to \infty)\,,$$

oder alternativ

$$u_n \to u \ \ \text{in } X\,, \quad Au_n \rightharpoonup b \ \ \text{in } X^* \quad (n \to \infty)$$

folgt $Au = b$.

Beweis. ad (i): Seien $u \in X$ und $b \in X^*$ gegeben, so dass die obige Annahme erfüllt ist. Für beliebige $w \in X$ setzen wir $v = u - tw$, $t > 0$, und erhalten aufgrund der Voraussetzung folgende Implikation:

$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle b - A(u - tw), w\rangle \geq 0\,.$$

Da A hemistetig ist, folgt durch den Grenzübergang $t \to 0$, dass für alle $w \in X$ gilt:

$$\langle b - Au, w\rangle \geq 0\,.$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten die umgekehrte Ungleichung. Insgesamt gilt also $\langle b - Au, w\rangle = 0$ für alle $w \in X$, d.h. $b = Au$.

ad (ii): Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n - Av, v\rangle\,.$$

Aufgrund der Voraussetzungen erhalten wir nach dem Grenzübergang $n \to \infty$ für alle $v \in X$

$$0 \leq \langle b, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle = \langle b - Av, u - v\rangle\,.$$

Somit ist A maximal monoton und aufgrund von (i) folgt $Au = b$.

ad (iii): Die Behauptung ist eine Konsequenz von (ii), wenn wir wissen, dass aus

$$x_n \rightharpoonup x \ \text{ in } X\,, \qquad f_n \to f \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$

bzw.

$$x_n \to x \ \text{ in } X\,, \qquad f_n \rightharpoonup f \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$

folgt, dass

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad (n \to \infty)\,.$$

Unter unseren Voraussetzungen folgt dann $\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle b, u \rangle$ $(n \to \infty)$. Die Behauptungen (ii) und (iii) des folgenden Lemmas liefert aber diese Aussagen. ∎

0.3 Lemma (Konvergenzprinzipien). *Sei X ein Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Wenn $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, $(n \to \infty)$, dann gibt es ein Konstante c, so dass $\|x_n\|_X \le c$.*

(ii) *Wenn*

$$\begin{aligned} x_n &\rightharpoonup x \quad \textit{in } X \qquad (n \to \infty)\,,\\ f_n &\to f \quad \textit{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X \quad (n \to \infty)\,.$$

(iii) *Wenn*

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad \textit{in } X \qquad (n \to \infty)\,,\\ f_n &\rightharpoonup f \quad \textit{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X \quad (n \to \infty)\,.$$

(iv) *Sei X zusätzlich reflexiv. Die Folge (x_n) sei beschränkt. Wenn alle schwach konvergenten Teilfolgen von (x_n) gegen denselben Grenzwert x konvergieren, dann konvergiert die gesamte Folge (x_n) schwach gegen x.*

Beweis. ad (i): Dies ist eine Konsequenz des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit. Für alle $f \in X^*$ ist die Folge $\big(\langle f, x_n \rangle\big)$ beschränkt, da aufgrund der schwachen Konvergenz von (x_n) die Folge reeller Zahlen $\langle f, x_n \rangle$ gegen $\langle f, x \rangle$ konvergiert. Somit haben wir

$$\sup_n |\langle f, x_n \rangle| \le c(f)\,. \tag{0.4}$$

Mithilfe der *kanonische Isometrie* $J\colon X \to X^{**}$, die gegeben ist durch (cf. Abschnitt A.7)

$$\langle Jx, f \rangle_{X^{**}} = \langle f, x \rangle_X\,,$$

folgt somit aus (0.4), dass die Folge $(Jx_n) \subset X^{**}$ punktweise beschränkt ist.

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (cf. Satz A.10.7) liefert also

$$\sup_n \|Jx_n\|_{X^{**}} \le c\,,$$

da aber $\|Jx_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

ad (ii): Es gilt:

$$\begin{aligned}|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\le |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &= |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &\le \|f_n - f\|\,\|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle|\,.\end{aligned}$$

Nun haben wir aufgrund der Voraussetzungen $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$, $|\langle f, x_n - x\rangle| \to 0$ $(n \to \infty)$, sowie $\|x_n\| \le c$ nach (i). Demzufolge erhalten wir $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$ $(n \to \infty)$.

ad (iii): Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Behauptung (ii).

ad (iv): Beweis durch Widerspruch. Konvergiere (x_n) nicht schwach gegen x, d.h.

$$\exists\, f \in X^*,\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, (x_{n_k}): \quad |\langle f, x_{n_k}\rangle - \langle f, x\rangle| \ge \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Nach Voraussetzung ist die Teilfolge (x_{n_k}) beschränkt. Daher gibt es nach dem Satz von Eberlein–Šmuljan (cf. Satz A.8.15) eine Teilfolge $(x_{n_{k'}})$, die schwach konvergiert und zwar nach Voraussetzung gegen x. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt die Behauptung. ∎

3.1 Monotone Operatoren

1.1 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und sei*

$$A\colon X \to X^*$$

ein Operator. Dann heißt A

(i) **monoton** *genau dann, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \ge 0\,.$$

(ii) **strikt monoton** *genau dann, wenn für alle $u, v \in X, u \neq v$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X > 0\,.$$

(iii) **stark monoton** *genau dann, wenn es ein* $c > 0$ *gibt, so dass für alle* $u, v \in X$ *gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq c\,\|u - v\|_X^2\,.$$

(iv) **koerziv** *genau dann, wenn*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \infty\,.$$

Bemerkungen. (i) Offensichtlich gelten folgende Implikationen:

A ist stark monoton $\Rightarrow$ A ist strikt monoton $\Rightarrow$ A ist monoton.

(ii) Wenn A stark monoton ist, dann ist A auch koerziv. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \langle Au - A(0), u\rangle + \langle A(0), u\rangle \\ &\geq c\,\|u\|^2 - \|A(0)\|_{X^*}\|u\|\,,\end{aligned}$$

also folgt

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \geq c\,\|u\| - \|A(0)\|_{X^*} \to \infty \qquad \text{für } \|u\| \to \infty\,.$$

Beispiele. 1. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion f als Operator von X nach X^* mit $X = \mathbb{R} = X^*$. In $\mathbb{R}$ ist das Dualitätsprodukt gerade die Multiplikation, d.h.

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = \big(f(u) - f(v)\big)(u - v)\,.$$

Somit gelten folgende Aussagen:

(i) $f : X \to X^*$ (strikt) monoton $\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) monoton.

(ii) f koerziv $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{u \to \pm\infty} f(u) = \pm\infty$.

2. Für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{für } u \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } u = 0\,, \end{cases}$$

kann man zeigen, dass gilt:

(i) Für $p > 1$ ist g strikt monoton.

(ii) Für $p \geq 2$ gilt:

$$\langle g(u) - g(v), u - v\rangle \geq c\,|u - v|^p\,.$$

(iii) Für $p = 2$ ist g stark monoton.

1.2 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein Operator. Dann heißt A*

(i) ***hemistetig*** *genau dann, wenn für alle $u, v, w \in X$ die Funktion*

$$t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle_X$$

im Intervall $[0,1]$ stetig ist.

(ii) ***demistetig*** *genau dann, wenn*

$$u_n \to u \ \text{ in } X \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad Au_n \rightharpoonup Au \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,.$$

(iii) ***stark stetig*** *genau dann, wenn*

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad Au_n \to Au \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,.$$

(iv) ***beschränkt*** *genau dann, wenn A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in X^* abbildet.*

(v) ***lokal beschränkt*** *genau dann, wenn es für alle $u \in X$ ein $\varepsilon(u) > 0$ und eine Konstante $K(u)$ gibt, so dass für alle $v \in X$ mit $\|u-v\|_X \le \varepsilon$ gilt $\|Av\|_{X^*} \le K$.*

Bemerkung. Offensichtlich gelten folgende Implikationen:

A ist stark stetig $\Rightarrow$ A ist stetig $\Rightarrow$ A ist demistetig $\Rightarrow$ A ist hemistetig.

Wir wollen nun weitere einfache Konsequenzen obiger Definitionen beweisen.

1.3 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann gilt:*

(i) *Falls A stark stetig ist, so ist A kompakt.*

(ii) *Falls A demistetig ist, so ist A lokal beschränkt.*

(iii) *Falls A monoton ist, so ist A lokal beschränkt.*

(iv) *Falls A monoton und hemistetig ist, so ist A demistetig.*

Beweis. ad (i): Wir wollen zeigen, dass für alle beschränkten Teilmengen $M \subseteq X$ die Bildmenge $A(M)$ relativ folgenkompakt ist. Sei also (Au_n) eine beliebige Folge aus $A(M)$. Da M beschränkt ist, ist somit auch (u_n) beschränkt. Aufgrund der Reflexivität des Raumes X existiert eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}), d.h. $u_{n_k} \rightharpoonup u \in X$ $(k \to \infty)$. Daraus folgt $Au_{n_k} \to Au$ $(k \to \infty)$, da A stark stetig ist. Also ist $A(M)$ relativ folgenkompakt, was in Banachräumen äquivalent zur relativen Kompaktheit der Menge $A(M)$ ist (cf. Satz A.2.1).

ad (ii): Beweis durch Widerspruch: Sei A nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein $u \in X$ und eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, so dass $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Da A demistetig ist, folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ in X^* $(n \to \infty)$. Aufgrund von Lemma 0.3 (i) ist (Au_n) beschränkt. Dies ist aber ein Widerspruch. Also ist A lokal beschränkt.

ad (iii): Beweis durch Widerspruch: Sei A nicht lokal beschränkt, dann gibt es ein $u \in X$ und eine Folge $(u_n) \subset X$ mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, so dass $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Wir setzen

$$a_n := (1 + \|Au_n\| \, \|u_n - u\|)^{-1} .$$

Die Monotonie von A liefert, dass für alle $v \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\le \big\langle Au_n - Av, u_n - v \big\rangle \\ &= \big\langle Au_n - Av, (u_n - u) + (u - v) \big\rangle . \end{aligned}$$

Mit obiger Bezeichnung ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_n \langle Au_n, v - u \rangle &\le a_n \big(\langle Au_n, u_n - u \rangle - \langle Av, u_n - v \rangle \big) \\ &\le a_n \Big(\|Au_n\|_{X^*} \|u_n - u\| + \|Av\|_{X^*} \big(\|u_n\| + \|v\| \big) \Big) \\ &\le 1 + c(v, u) , \end{aligned}$$

wobei wir $a_n \le 1$ benutzt haben und dass nach Voraussetzung $\|u_n - u\| \le 1$, $n \ge n_0$. Wenn wir in dieser Rechnung v durch $2u - v$ ersetzen, erhalten wir auch

$$-a_n \langle Au_n, v - u \rangle \le 1 + c(v, u) .$$

Da $v \in X$ beliebig ist, ist auch $w := v - u$ ein beliebiger Punkt von X und wir erhalten für alle $w \in X$

$$\sup_{n \ge n_0} |\langle a_n Au_n, w \rangle| \le \tilde{c}(w, u) < \infty .$$

Die stetigen, linearen Abbildungen $a_n Au_n \colon X \to \mathbb{R}$ sind nach obiger Rechnung punktweise beschränkt. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (cf. Satz A.10.7) liefert also

$$\sup_{n \ge n_0} \|a_n Au_n\|_{X^*} \le c(u) .$$

Daraus und aus der Definition von a_n erhalten wir

$$\|Au_n\| \le \frac{c(u)}{a_n} = c(u) \left(1 + \|Au_n\| \|u_n - u\| \right) . \tag{1.4}$$

Wegen $\|u_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_1, n_0$ gilt $c(u) \, \|u_n - u\| < \frac{1}{2}$ und wir erhalten aus (1.4)

$$\|Au_n\| \le \frac{c(u)}{1 - c(u) \, \|u_n - u\|} \le 2 \, c(u) .$$

Somit ist die Folge $\big(\|Au_n\|\big)$ beschränkt, was ein Widerspruch zur Annahme $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$ ist. Also gilt die Behauptung.

ad (iv): Sei (u_n) eine Folge in X mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Da A monoton ist, ist (Au_n) nach (iii) lokal beschränkt. Aufgrund der Reflexivität von X gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein Element $b \in X^*$, so dass $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ $(k \to \infty)$. Nach Lemma 0.2 (iii) erhalten wir somit $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$ $(k \to \infty)$. Aber alle schwach konvergenten Teilfolgen von (Au_n) konvergieren schwach gegen Au, denn sonst gäbe es eine Teilfolge mit $Au_{n_l} \rightharpoonup c \neq b$, $(l \to \infty)$. Lemma 0.2 (iii) impliziert wiederum $Au = c$, was ein Widerspruch zu $Au = b$ ist. Somit liefert Lemma 0.3 (iv), dass die gesamte Folge (Au_n) schwach gegen $b = Au$ konvergiert, d.h. A ist demistetig. ■

3.1.1 Der Satz von Browder und Minty

Wir haben nun alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den *Hauptsatz* der Theorie monotoner Operatoren beweisen zu können.

1.5 Satz (Browder, Minty 1963). *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum. Ferner sei $A\colon X \to X^*$ ein monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b\,. \tag{1.6}$$

Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Falls A strikt monoton ist, ist die Lösung von (1.6) eindeutig.

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Hilfe des *Galerkin Verfahrens*: Dazu setzen wir

$$X_n := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$$

und suchen *approximative Lösungen* $u_n \in X_n$ der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_n^k w_k\,, \tag{1.7}$$

die das *Galerkin–System*

$$\langle Au_n - b, w_k\rangle = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,, \tag{1.8}$$

lösen.

1. Lösbarkeit von (1.8): Aufgrund von (1.7) können wir Elemente $u_n \in X_n$ mit Vektoren $\mathbf{c}_n := (c_n^1, \ldots, c_n^n)^\top \in \mathbb{R}^n$ identifizieren. Insbesondere ist für $\mathbf{c} := (c^1, \ldots, c^n)^\top$ durch $|\mathbf{c}| := \|\sum_{k=1}^n c^k w_k\|_X$ auf $\mathbb{R}^n$ eine äquivalente Norm gegeben, die wir im Weiterem benutzen werden. Somit kann man (1.8) als ein nichtlineares System von Gleichungen für die Vektoren $\mathbf{c}_n \in \mathbb{R}^n$ betrachten. Dieses können wir mithilfe der Abbildung $\mathbf{g}_n := (g_n^1, \ldots, g_n^n)^\top\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$g_n^k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon \mathbf{c} \mapsto g_n^k(\mathbf{c}) := \Big\langle A\Big(\sum_{j=1}^n c^j w_j\Big) - b, w_k \Big\rangle , \qquad k = 1, \ldots, n ,$$

umschreiben in

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{c}_n) = \mathbf{0} .$$

Nach Lemma 1.3 (iv) ist A demistetig, da A monoton und hemistetig ist. Also ist die Abbildung $\mathbf{g}_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, da aus $\mathbf{c}_l \to \mathbf{c}$ ($l \to \infty$) bzgl. $|\cdot|$ in $\mathbb{R}^n$ folgt, dass $\sum_{j=1}^n c_l^j w_j$ gegen $\sum_{j=1}^n c^j w_j$ in X konvergiert. Daraus folgt sofort, dass $\mathbf{g}_n(\mathbf{c}_l)$ gegen $\mathbf{g}_n(\mathbf{c})$ in der Euklidischen Norm und somit auch bzgl. der $|\cdot|$–Norm konvergiert. Weiter gilt für $\mathbf{c} = (c^1, \ldots, c^n)^\top$ und $v := \sum_{j=1}^n c^j w_j$

$$\sum_{k=1}^n g_n^k(\mathbf{c})\, c^k = \langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle . \tag{1.9}$$

Da A koerziv ist, d.h. $\frac{\langle Av,v\rangle}{\|v\|} \to \infty$ ($\|v\| \to \infty$), gibt es ein $R_0 > 0$, so dass für alle $\|v\| \ge R_0$ gilt:

$$\langle Av, v\rangle \ge \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\|v\| > 0 .$$

Insbesondere gilt für $\mathbf{c}$ mit $|\mathbf{c}| = \|v\| = R_0$

$$\langle Av, v\rangle \ge \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\, \|v\| ,$$

und somit folgt

$$\sum_{k=1}^n g_n^k(\mathbf{c})\, c^k \ge \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\|v\| - \|b\|_{X^*}\, \|v\| = \|v\| > 0 . \tag{1.10}$$

Nach Lemma 1.2.24, einer Folgerung aus dem Satz von Brouwer, gibt es also eine Lösung u_n des Galerkin–Systems (1.8) mit

$$\|u_n\|_X \le R_0 . \tag{1.11}$$

Insbesondere ist die Konstante R_0 unabhängig von n, d.h. (1.11) ist eine *apriori Abschätzung*.

2. Beschränktheit von (Au_n): Da A monoton ist, folgt aus Lemma 1.3 (iii), dass A lokal beschränkt ist. Insbesondere gibt es Konstanten $r, M > 0$, so dass die Implikation

$$\|v\| \le r \quad \Rightarrow \quad \|Av\|_{X^*} \le M \tag{1.12}$$

gilt. Da u_n das System (1.8) löst, d.h. es gilt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$, erhalten wir mithilfe von (1.11) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle Au_n, u_n\rangle| \le \|b\|_{X^*}\, \|u_n\| \le \|b\|_{X^*}\, R_0 . \tag{1.13}$$

Aufgrund der Monotonie von A gilt für alle $v \in X$:

$$\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0 \,. \tag{1.14}$$

Eine Variante der Definition der Norm in X^* liefert zusammen mit (1.14), (1.12), (1.13) und (1.11)

$$\begin{aligned} \|Au_n\|_{X^*} &= \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=r}} \tfrac{1}{r}\langle Au_n, v\rangle \\ &\leq \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=r}} \tfrac{1}{r}\big(\langle Av, v\rangle + \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle\big) \\ &\leq \tfrac{1}{r}(M\,r + \|b\|_{X^*}R_0 + M\,R_0) < \infty \,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Also ist die Folge $(Au_n) \subset X^*$ beschränkt.

3. Konvergenz des Galerkin–Verfahrens: Da X und X^* reflexiv sind und die Folgen (u_n) und (Au_n) beschränkt sind, wie in (1.11) und (1.15) gezeigt wurde, gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup u \ \text{ in } X \\ Au_{n_k} &\rightharpoonup c \ \text{ in } X^* \end{aligned} \qquad (k \to \infty)\,. \tag{1.16}$$

Andererseits gibt es für alle $w \in \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l$ ein n_0 mit $w \in X_{n_0}$. Da u_n eine Lösung von (1.8) ist, erhalten wir für alle $n \geq n_0$

$$\langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle \,,$$

woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle \qquad\qquad \forall w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l \,. \tag{1.17}$$

Aus (1.16) und (1.17) folgt, dass für alle $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ gilt $\langle c - b, w\rangle = 0$. Da $\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ dicht in X liegt, liefert Lemma A.7.2 (iii), dass $b = c$ gilt, und somit

$$Au_{n_k} \rightharpoonup b \ \text{ in } X^* \qquad (n \to \infty)\,.$$

Für die Lösung u_{n_k} von (1.8) gilt insbesondere $\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle b, u_{n_k}\rangle$, woraus folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle b, u_{n_k}\rangle = \langle b, u\rangle \,.$$

Die Voraussetzungen des Minty–Tricks, Lemma 0.2 (ii), sind demnach erfüllt, und wir erhalten $Au = b$, d.h. u ist eine Lösung der ursprünglichen Operatorgleichung (1.6).

4. Eigenschaften der Lösungsmenge: Für gegebenes $b \in X^*$ setzen wir $S = \{u \in X \,\big|\, Au = b\}$. Dann hat S folgende Eigenschaften:

(a) $S \neq \emptyset$: Das wurde gerade bewiesen.

(b) S ist beschränkt: Dies folgt aus der Koerzivität von A. Falls S nicht beschränkt wäre, dann gäbe es für alle $R > 0$ ein $u \in S$ mit $\|u\| \geq R > 0$. Aber analog zu 2. haben wir (cf. (1.9), (1.10))

$$0 = \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle \geq \|u\| > 0 \,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, und somit gibt es ein $R_0 > 0$, so dass für alle $u \in S$ gilt $\|u\| \leq R_0$.

(c) S ist konvex: Seien u_1, $u_2 \in S$, d.h. $Au_i = b$ für $i = 1, 2$. Für die Konvexkombination $w = tu_1 + (1-t)u_2$, $0 \leq t \leq 1$, und beliebige $v \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, w - v \rangle &= \langle b - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t + 1 - t)v \rangle \\
&= \langle b - Av, t(u_1 - v) \rangle + \langle b - Av, (1-t)(u_2 - v) \rangle \\
&= t\langle Au_1 - Av, u_1 - v \rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v \rangle \\
&\geq 0 \,,
\end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Anwendung von Lemma 0.2 (i) liefert $Aw = b$, d.h. $w \in S$. Also ist S konvex.

(d) S ist abgeschlossen: Für eine Folge $(u_n) \subseteq S$, d.h. $Au_n = b$, mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, und für alle $v \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, u - v \rangle &= \lim_{n \to \infty} \langle b - Av, u_n - v \rangle \\
&= \lim_{n \to \infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0 \,,
\end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Aus Lemma 0.2 (i) folgt $Au = b$, d.h. $u \in S$.

5. Eindeutigkeit: Sei A strikt monoton. Falls es zwei Lösungen $u \neq v$ von (1.6) gibt, dann haben wir einerseits $Au = b = Av$ und andererseits folgt aus der strikten Monotonie von A

$$0 < \langle Au - Av, u - v \rangle = \langle b - b, u - v \rangle = 0 \,.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Gleichung höchstens eine Lösung haben. ∎

Bemerkung. Die Behauptungen des Satzes 1.5 bleiben auch in nicht separablen Räumen richtig (cf. [23, S. 560–561]).

1.18 Folgerung. *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Dann existiert der Operator $A^{-1}\colon X^* \to X$ und ist strikt monoton und demistetig.*

Beweis. Der Beweis dieser einfachen Aussage bleibt dem Leser überlassen. ∎

3.1.2 Der Nemyckii–Operator

Um den Satz 1.5 von Browder und Minty auf Differentialgleichungen anwenden zu können, benötigen wir den so genannten **Nemyckii–Operator**

$$(F\mathbf{u})(x) := f(x, \mathbf{u}(x))\,, \tag{1.19}$$

wobei $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)^\top$, $\mathbf{u}\colon G \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$. Bezüglich $f\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ machen wir folgende Annahmen:

(i) *Carathéodory–Bedingung*:

$$\begin{aligned} &f(\cdot, \boldsymbol{\eta})\colon x \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) && \text{ist messbar auf } G \text{ für alle } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n,\\ &f(x, \cdot)\colon \boldsymbol{\eta} \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) && \text{ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } x \in G. \end{aligned}$$

(ii) *Wachstumsbedingung*:

$$|f(x, \boldsymbol{\eta})| \le |a(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta^i|^{p_i/q}\,,$$

wobei $b > 0$ eine Konstante ist und $a \in L^q(G)\,,\ 1 \le p_i, q < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

1.20 Lemma. *Unter den obigen Annahmen an die Funktion f und die Menge G, ist der in (1.19) definierte Nemyckii–Operator*

$$F\colon \prod_{i=1}^n L^{p_i}(G) \to L^q(G)$$

stetig und beschränkt. Es gilt für alle $\mathbf{u} \in \prod_{i=1}^n L^{p_i}(G)$ die Abschätzung

$$\|F\mathbf{u}\|_{L^q(G)} \le c\Big(\|a\|_{L^q(G)} + \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{L^{p_i}(G)}^{p_i/q}\Big). \tag{1.21}$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = 1, u = u_1, p = p_1$. Der allgemeine Fall folgt analog.

1. Messbarkeit von Fu: Da $u \in L^p(G)$, ist die Funktion $x \mapsto u(x)$ Lebesgue–messbar auf G. Also gibt es eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit

$$u_n \to u \ \text{ fast überall in } G \qquad (n \to \infty)\,.$$

Daher gilt für fast alle $x \in G$

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x)) \,,$$

da f, aufgrund der Carathéodory–Bedingung (i), stetig in der zweiten Variablen ist. Da (u_n) Treppenfunktionen sind, haben wir

$$f(x, u_n(x)) = f\big(x, \sum_{j=0}^{M(n)} c_j^n \chi_{G_j^n}(x)\big) = \sum_{j=0}^{M(n)} f(x, c_j^n)\chi_{G_j^n}(x) \,,$$

mit $c_0^n = 0$ und $G_0^n = G \setminus \bigcup_{i=1}^{M(n)} G_i^n$. Somit ist $f(x, u_n(x))$ messbar, da sowohl die Funktionen $f(x, c_j^n)$ als auch die charakteristischen Funktionen $\chi_{G_j^n}$ messbar sind. Weiterhin ist der Grenzwert messbarer Funktionen messbar und demnach auch Fu.

2. Beschränktheit von F: Es gilt für alle $u \in L^p(G)$:

$$\begin{aligned}\|Fu\|_{L^q}^q &= \int_G \big|f(x, u(x))\big|^q \, dx \\ &\le \int_G \big(|a(x)| + b|u(x)|^{p/q}\big)^q \, dx \\ &\le C \int_G |a(x)|^q + b^q|u(x)|^p \, dx \\ &\le C \left(\|a\|_{L^q}^q + \|u\|_{L^p}^p\right),\end{aligned}$$

wobei die Wachstumsbedingung (ii) und die folgende Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^M$

$$c \left(\sum_{i=1}^M |\xi_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \sum_{i=1}^M |\xi_i| \le C \left(\sum_{i=1}^M |\xi_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} . \tag{1.22}$$

benutzt wurden. Also ist F beschränkt und erfüllt die Abschätzung (1.21).

3. Stetigkeit von $F\colon L^p(G) \to L^q(G)$: Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^p(G)$ $(n \to \infty)$. Demzufolge gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$ $(k \to \infty)$, fast überall in G (cf. Satz A.11.12) und es gilt:

$$\begin{aligned}|f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q &\le C \left(|f(x, u_{n_k}(x))|^q + |f(x, u(x))|^q\right) \\ &\le C \left(|a(x)|^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q\right) \\ &=: h_{n_k}(x) \,,\end{aligned}$$

wobei die Wachstumsbedingung (ii) benutzt wurde. Nach Integration über G erhalten wir

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|_{L^q}^q \le \int_G h_{n_k} \, dx \,.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung stehen als Integranden eine Folge von Funktionen h_{n_k} aus $L^1(G)$ mit

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x) &\to h(x) && \text{fast überall in } G \quad (k \to \infty)\,, \\ \int\limits_G h_{n_k}(x)\,dx &\to \int\limits_G h(x)\,dx && (k \to \infty)\,, \end{aligned}$$

da $u_n \to u$ in $L^p(G)$ $(n \to \infty)$, also $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$ $(n \to \infty)$. Außerdem gilt $(Fu_{n_k})(x) \to (Fu)(x)$ $(k \to \infty)$ für fast alle $x \in G$, da aufgrund der Carathéodory–Bedingung (i) f stetig in der zweiten Variablen ist. Daher ist der verallgemeinerte Satz von der majorisierten Konvergenz (cf. Satz A.11.11) anwendbar, und demzufolge gilt:

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|_{L^q}^q \to 0 \qquad (k \to \infty)\,.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iv) liefert nun $Fu_n \to Fu$ in $L^q(G)$ $(n \to \infty)$, da die Argumentation für jede beliebige konvergente Teilfolge gilt. ■

3.1.3 Quasilineare elliptische Gleichungen

Als Anwendung des Satzes von Browder und Minty und des Nemyckii–Operators betrachten wir folgendes *Randwertproblem* für eine *quasilineare elliptische* Gleichung:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + s\,u = f \qquad & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dabei sei $1 < p < \infty$, Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $s \geq 0$. Wenn man (1.23) formal mit u multipliziert, über Ω integriert und partiell integriert erhlält man folgende apriori Abschätzung

$$\int_\Omega |\nabla u|^p + s|u|^2\,dx \leq c(f)\,.$$

Hieraus sieht man, dass für alle $s \geq 0$ der kanonische Sobolevraum für die Untersuchung von (1.23) der $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist. Man beachte allerdings, dass für $s > 0$ auch der Raum $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ eine natürliche Wahl darstellt (vgl. Bemerkungen nach Lemma 1.27 und nach Satz 1.32).

Die *schwache Formulierung* von Problem (1.23) lautet: Für gegebenes $f \in (L^p(\Omega))^*$ suchen wir $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass für alle $\varphi \in X$

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + s\,u\,\varphi\,dx = \int\limits_\Omega f\varphi\,dx\,. \tag{1.24}$$

Deshalb definieren wir einen Operator A durch

$$\langle Au, \varphi \rangle := \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + s\, u\, \varphi \, dx\,, \qquad \forall\, u, \varphi \in X\,, \tag{1.25}$$

und ein Funktional b durch

$$\langle b, \varphi \rangle := \int\limits_\Omega f \varphi \, dx\,, \qquad \forall\, \varphi \in X\,. \tag{1.26}$$

Hierbei steht $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Dualitätsprodukt in X.

1.27 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Ferner sei $f \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$, $p \in (1, \infty)$ und $s \geq 0$. Für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ bildet der in (1.25) definierte Operator A den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum ab, d.h. $A\colon X \to X^*$, und ist beschränkt. Das in (1.26) definierte Funktional b ist ein Element von X^*. Ferner ist die schwache Formulierung (1.24) äquivalent zur Operatorgleichung in X^**

$$Au = b\,. \tag{1.28}$$

Beweis. Wir setzen $X := W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\|u\|_X := \|\nabla u\|_{L^p}$. Aufgrund der „Nullrandbedingungen“ ist diese Norm äquivalent zur üblichen $W_0^{1,p}(\Omega)$–Norm $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \big(\int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p dx \big)^{\frac{1}{p}}$ (cf. (A.12.27)).

1. $A : X \to X^*$: Es gilt für $u, \varphi \in X$

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi \rangle| &\leq \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \, dx + s \int\limits_\Omega |u\varphi| \, dx \\
&\leq \Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'} \, dx \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int\limits_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + s \Big(\int\limits_\Omega |u|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla \varphi\|_{L^p} + s\, \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Hölder–Ungleichung und $p' = \frac{p}{p-1}$ benutzt haben. Für $1 \leq p < d$ haben wir die Einbettung $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $q \leq \frac{dp}{d-p}$ (cf. Satz A.12.24 (i)). Insbesondere gilt also $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$, falls $2 \leq \frac{dp}{d-p} \Leftrightarrow p \geq \frac{2d}{d+2}$. Falls $p \geq d$ ist, verwenden wir die Einbettungen $X \hookrightarrow W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, die für alle $q < \infty$ gilt (cf. Satz A.12.24 (ii)). Also erhalten wir, dass für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ und alle $\varphi \in X$ gilt:

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq c_1 \, \|\varphi\|_X = c_1 \, \|\nabla \varphi\|_{L^p}\,.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$\begin{aligned}|\langle Au,\varphi\rangle| &\le \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\\ &\le c\,(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p})\|\nabla\varphi\|_{L^p}\,.\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der Norm von Au in X^* haben wir

$$\|Au\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au,\varphi\rangle| \le c\left(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p}\right), \tag{1.29}$$

und somit ist $Au \in X^*$ sowie $A\colon X \to X^*$, sofern $p \ge \frac{2d}{d+2}$. Aus der letzten Ungleichung sehen wir sofort, dass der Operator A beschränkt ist.

2. Mithilfe der Hölder–Ungleichung und der Definition der dualen Norm ergibt sich

$$\begin{aligned}\|b\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle b,\varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \|f\|_{L^{p'}}\|\varphi\|_{L^p}\\ &\le c\,\|f\|_{L^{p'}}\,,\end{aligned}$$

für $p \ge 1$, da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, d.h. $\|\varphi\|_{L^p} \le C\,\|\varphi\|_X$.

3. Aus den Schritten 1 und 2, sowie den Definitionen von A und b folgt, dass die schwache Formulierung (1.24) von (1.23) gerade

$$\langle Au,\varphi\rangle = \langle b,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in X$$

ist. Dies ist aber die Operatorgleichung $Au = b$ in X^*. ■

Bemerkung. Im Falle $s = 0$ ist im vorherigen Lemma die Einschränkung $p \ge \frac{2d}{d+2}$ nicht nötig. Falls man für $s > 0$ mit $X = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|u\|_X := \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^2}$ arbeitet, fällt die Einschränkung $p \ge \frac{2d}{d+2}$ ebenfalls weg.

1.30 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.27 ist der durch (1.25) gegebene Operator $A\colon X \to X^*$ strikt monoton, koerziv und stetig. Insbesondere sind also die Voraussetzungen von Satz 1.5 erfüllt.*

Beweis. 1. A ist strikt monoton: Der Operator A wird durch die Funktion

$$\mathbf{g} = (g^1,\dots,g^d)^\top\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\colon \boldsymbol{\zeta} \mapsto |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\boldsymbol{\zeta} \tag{1.31}$$

generiert, wobei wir $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ setzen. Für $i,j = 1,\dots,d$ und $\boldsymbol{\zeta} \ne \mathbf{0}$ haben wir

$$\partial_j g^i(\boldsymbol{\zeta}) = |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-4}\zeta^i\zeta^j$$

und somit gilt für alle $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d, 1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^d \partial_j g^i(\boldsymbol{\zeta})\eta^i\eta^j &= |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\Big(|\boldsymbol{\eta}|^2 + (p-2)\frac{(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\eta})^2}{|\boldsymbol{\zeta}|^2}\Big)\\ &\ge \min(1,p-1)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}|\boldsymbol{\eta}|^2.\end{aligned}$$

Für beliebige $u \neq v \in X$ haben wir also

$$
\begin{aligned}
&\langle Au - Av, u - v\rangle \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^d \big(g^i(\nabla u) - g^i(\nabla v)\big)(\partial_i u - \partial_i v)\, dx \ + \ s \int_\Omega |u - v|^2\, dx \\
&\geq \int_\Omega \sum_{i=1}^d \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g^i\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)\, d\tau\, (\partial_i u - \partial_i v)\, dx\,,
\end{aligned}
$$

da $s \geq 0$. Den Integranden auf der rechten Seite kann man schreiben als

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{i,j=1}^d \partial_j g^i\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)(\partial_j u - \partial_j v)(\partial_i u - \partial_i v)\, d\tau \\
&\geq c\, |\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2}\, d\tau \\
&> 0\,,
\end{aligned}
$$

da[1] mit Ausnahme möglicherweise eines Punktes τ_0, der von $x \in \Omega$ abhängt, gilt: $|\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} > 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$
\langle Au - Av, u - v\rangle > 0\,,
$$

d.h. A ist strikt monoton.

2. A ist koerziv: Wir haben für $u \in X$

$$
\langle Au, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p \ + s\, |u|^2\, dx = \|\nabla u\|_{L^p}^p + s\|u\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^p}^p\,,
$$

also folgt

$$
\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \to \infty \qquad (\|u\|_X \to \infty)\,,
$$

falls $p > 1$.

3. A ist stetig: Sei $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit $u_n \to u$ in X $(n \to \infty)$, d.h. insbesondere $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$. Wir setzen

$$
\mathbf{F}(\nabla u)(x) := \mathbf{g}(\nabla u(x))\,,
$$

wobei $\mathbf{g}$ in (1.31) definiert ist. Da $\mathbf{g}$ komponentenweise die Abschätzung

---

[1] Man beachte, dass das Integral $\int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau$ endlich ist für $p > 1$.

$$|g^i(\boldsymbol{\zeta})| \le c\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} = c\,|\boldsymbol{\zeta}|^{\frac{p}{q}}\,, \quad i = 1,\ldots,d\,,$$

mit $q = \frac{p}{p-1}$ erfüllt, ist $\mathbf{F}$ ein vektorwertiger Nemyckii–Operator. Aus Lemma 1.20 folgt daher, dass $\mathbf{F} : (L^p(\Omega))^d \to (L^{p'}(\Omega))^d$ stetig ist, d.h. für unsere Folge (u_n) gilt:

$$\mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u) \ \text{ in } \big(L^{p'}(\Omega)\big)^d \quad (n \to \infty)\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle Au_n - Au, \varphi\rangle &= \int\limits_\Omega \big(\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\big)\cdot \nabla\varphi\,dx + s\int\limits_\Omega (u_n - u)\varphi\,dx\\
&\le \|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u_n - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\\
&\le c\,\big(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X\big)\|\varphi\|_X\,,
\end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \ge \frac{2d}{d+2}$. Aufgrund der Definition der Norm im Dualraum gilt dann:

$$\begin{aligned}
\|Au_n - Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au_n - Au, \varphi\rangle|\\
&\le c\,(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X)\,.
\end{aligned}$$

Für $n\to\infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, da $u_n \to u$ in X $(n\to\infty)$, und $\mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u)$ in $(L^{p'}(\Omega))^d$ $(n\to\infty)$. Also ist der Operator A stetig und damit insbesondere hemistetig.

4. $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein separabler und reflexiver Banachraum (cf. Abschnitt A.12.3). ■

1.32 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ und sei $s \ge 0$. Für $p \ge \frac{2d}{d+2}$, $p \in (1,\infty)$ und alle $f \in L^{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, existiert genau eine schwache Lösung u des Randwertproblems (1.23), d.h. (1.24) bzw. (1.28) gelten.*

Beweis. Aus den Lemmata 1.27 und 1.30 folgt, dass wir Satz 1.5 anwenden können, der sofort die Behauptung liefert. ■

Bemerkungen. (i) Die Einschränkung $p \ge \frac{2d}{d+2}$ ist nicht nötig. Für $s = 0$ tritt sie nicht auf (vgl. Bemerkung nach Lemma 1.27) und für $s > 0$ arbeitet man mit dem Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. Man kann zeigen, dass sowohl X als auch der Operator $A : X \to X^*$ die Voraussetzungen von Satz 1.5 erfüllen.

(ii) Satz 1.32 kann man auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x,\nabla u)) &= f \quad &&\text{in } \Omega\,,\\
u &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega\,,
\end{aligned}$$

verallgemeinern, falls $\mathbf{A}\colon \Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ folgende Bedingungen erfüllt:

(α) $\mathbf{A}$ ist eine Carathéodory–Funktion,
(β) $|\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta})| \le C\big(g(x) + |\boldsymbol{\eta}|^{p-1}\big)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ (Wachstumsbedingung),
(γ) $\big(\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\zeta})\big) \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})) > 0$, für fast alle x (strikte Monotonie),
(δ) $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\eta} \ge c\,|\boldsymbol{\eta}|^p - h(x)$, $h \in L^1(\Omega)$ (Koerzivität).

(iii) Satz 1.32 gilt auch für beliebige $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Man kann zeigen, dass solche f eine Darstellung der Form

$$f = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f_i + f_0\,,$$

mit $f_i \in L^{p'}(\Omega)$, $i = 0, \ldots, d$, besitzen (cf. Abschnitt A.12.3).

überlegen ob man nur mit Bedingung M arbeitet. originale ansehen

3.2 Pseudomonotone Operatoren

3.2.1 Der Satz von Brezis

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Theorie zu entwickeln, die es ermöglicht, auch solche quasilinearen elliptischen Gleichungen zu lösen, die einen Term von niederer Ordnung enthalten, der nicht monoton ist. Zum Beispiel kann die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + s\,u &= f \qquad \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

nicht mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden, falls $s < 0$. Eine Inspektion des Beweises von Satz 1.5 zeigt aber, dass die Argumente für allgemeinere Operatoren, nämlich *pseudomonotone Operatoren*, adaptiert werden können. Typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei $A_1 \colon X \to X^*$ ein monotoner, hemistetiger Operator und $A_2 \colon X \to X^*$ ein stark stetiger, also kompakter, Operator ist (cf. Lemma 1.3 (i)), d.h. die Theorie pseudomonotoner Operatoren vereinigt *Monotonie* und *Kompaktheit*. Im Folgenden werden wir zuerst eine allgemeine Theorie entwickeln und diese dann auf Gleichungen vom Typ (2.13) anwenden.

2.2 Definition. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A \colon X \to X^*$ ein Operator. Wir sagen, A* ***genügt der Bedingung (M)****, falls aus*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,,\\ Au_n &\rightharpoonup b \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,,\\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle_X &\le \langle b, u\rangle_X \end{aligned} \tag{2.3}$$

folgt, dass $Au = b$ gilt.

Diese Bedingung ist wichtig, weil sie invariant unter stark stetigen Störungen ist. Außerdem erfüllen monotone Operatoren diese Bedingung. Genauer gilt:

2.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A\colon X \to X^*$, $B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Ist A monoton und hemistetig, dann genügt A der Bedingung (M).*

(ii) *Wenn A der Bedingung (M) genügt und B stark stetig ist, dann genügt $A+B$ der Bedingung (M).*

Beweis. ad (i): Dies ist nichts anderes als eine Variante des Minty–Tricks aus Lemma 0.2 (ii). Sei (u_n) eine Folge, die (2.3) erfüllt. Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n - Av, v\rangle\,.$$

Durch Anwendung von $\limsup_{n\to\infty}$ auf diese Ungleichung ergibt sich, aufgrund von (2.3), für alle $v \in X$

$$0 \le \langle b, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle = \langle b - Av, u - v\rangle\,.$$

Da aber A aufgrund von Lemma 0.2 (i) maximal monoton ist, folgt daher $Au = b$, d.h. A genügt der Bedingung (M).

ad (ii): Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ \text{ in } X \qquad (n\to\infty)\,,\\ Au_n + Bu_n &\rightharpoonup b \ \text{ in } X^* \qquad (n\to\infty)\,,\\ \limsup_{n\to\infty}\, &\langle Au_n + Bu_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle\,. \end{aligned}$$

Da B stark stetig ist, folgt $Bu_n \to Bu$ in X^* $(n\to\infty)$, und somit

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle &\le \langle b - Bu, u\rangle\,,\\ Au_n &\rightharpoonup b - Bu \ \text{ in } X^* \qquad (n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Da A der Bedingung (M) genügt, folgt $Au = b - Bu$, d.h. $Au + Bu = b$. ■

Für Operatoren $A\colon X \to X^*$, $B\colon X \to X^*$, die die Bedingung (M) erfüllen, erfüllt $A+B$ nicht notwendig die Bedingung (M). Deshalb führen wir den stabileren Begriff des pseudomonotonen Operators ein.

2.5 Definition. *Sei $A\colon X \to X^*$ ein Operator auf dem reflexiven, reellen Banachraum X. Dann heißt A **pseudomonoton**, falls aus*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ \text{ in } X \qquad (n\to\infty)\,,\\ \limsup_{n\to\infty}\, &\langle Au_n, u_n - u\rangle_X \le 0 \end{aligned}$$

folgt, dass für alle $w \in X$ gilt:

$$\langle Au, u - w\rangle_X \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X\,.$$

Das folgende Lemma gibt typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren an.

2.6 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum, und $A, B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Wenn A monoton und hemistetig ist, dann ist A pseudomonoton.*

(ii) *Wenn A stark stetig ist, dann ist A pseudomonoton.*

(iii) *Wenn A und B pseudomonoton sind, dann ist $A+B$ pseudomonoton.*

(iv) *Wenn A pseudomonoton ist, dann genügt A der Bedingung (M).*

(v) *Wenn A pseudomonoton und lokal beschränkt ist, dann ist A demistetig.*

Beweis. ad (i): Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0\,.$$

Da A monoton ist, gilt:

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \ge 0\,,$$

woraus folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \ge \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u\rangle = 0\,.$$

Zusammen erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = 0\,. \tag{2.7}$$

Für beliebige $w \in X$ und $t > 0$ setzen wir $z_t := (1-t)u + tw$. Die Monotonie von A impliziert

$$\langle Au_n - Az_t, u_n - (1-t)u - tw\rangle \ge 0\,,$$

was äquivalent zu

$$t\langle Au_n, u_n - w\rangle \ge -(1-t)\langle Au_n, u_n - u\rangle + (1-t)\langle Az_t, u_n - u\rangle + t\langle Az_t, u_n - w\rangle$$

ist. Somit erhalten wir für alle $w \in X$ und $t > 0$:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \ge \langle Az_t, u - w\rangle\,,$$

wobei wir (2.7) und $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$, sowie $t > 0$ benutzt haben. Da wir z_t auch schreiben können als $z_t = u + t(w-u)$ und der Operator A hemistetig ist, erhalten wir $Az_t \rightharpoonup Au$ für $t \to 0^+$. Also gilt für alle $w \in X$:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \ge \langle Au, u - w\rangle\,,$$

d.h. A ist pseudomonoton.

ad (ii): Sei $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $Au_n \to Au$ $(n \to \infty)$, aufgrund der starken Stetigkeit von A. Mithilfe von Lemma 0.3 (ii) erhalten wir somit für alle $w \in X$

$$\langle Au, u - w \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \,,$$

d.h. A ist pseudomonoton.

ad (iii): Wir wählen eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - u \rangle \le 0 \,. \tag{2.8}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle &\le 0 \,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle &\le 0 \,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

was wir durch Widerspruch beweisen. Gelte also

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = a > 0 \,.$$

Insbesondere gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle = a \,,$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\limsup_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \\ &\quad = \limsup_{k\to\infty} \langle (A+B)u_{n_k} - Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \\ &\quad \le \limsup_{k\to\infty} \langle (A+B)u_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle + \limsup_{k\to\infty} \langle -Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \\ &\quad = \limsup_{k\to\infty} \langle (A+B)u_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle - \lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \\ &\quad \le -a \,. \end{aligned}$$

Da B pseudomonoton ist, gilt für alle $w \in X$

$$\langle Bu, u - w \rangle \le \liminf_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - w \rangle \,.$$

Für $w = u$ erhalten wir daher

$$0 \le \liminf_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \le \limsup_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \le -a < 0 \,,$$

was ein Widerspruch ist.

Also gilt (2.9) und liefert mit der Pseudomonotonie von A und B

$$\langle Au, u-w\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle ,$$
$$\langle Bu, u-w\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle .$$

Addieren wir beide Ungleichungen, ergibt sich für alle $w \in X$

$$\langle Au + Bu, u-w\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - w\rangle ,$$

d.h. $A+B$ ist pseudomonoton.

ad (iv): Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$, die (2.3) erfüllt. Dies impliziert insbesondere

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 .$$

Aufgrund der Pseudomonotonie von A erhalten wir somit für alle $w \in X$

$$\begin{aligned}\langle Au, u-w\rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \\ &\leq \langle b, u\rangle - \langle b, w\rangle = \langle b, u-w\rangle .\end{aligned}$$

Wenn wir w durch $2u - w$ ersetzen, ergibt sich für alle $w \in X$:

$$\langle Au, u-w\rangle = \langle b, u-w\rangle ,$$

d.h. $Au = b$.

ad (v): Sei $(u_n) \subseteq X$ sei eine Folge mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Da A lokal beschränkt ist, ist auch die Folge (Au_n) beschränkt. Der Raum X ist reflexiv und daher gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ $(k \to \infty)$, so dass wir $\lim\limits_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = 0$ erhalten. Die Pseudomonotonie von A zusammen mit den obigen Konvergenzen impliziert für alle $w \in X$:

$$\begin{aligned}\langle Au, u-w\rangle &\leq \liminf_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - w\rangle \\ &= \langle b, u-w\rangle .\end{aligned}$$

Damit folgt wie in (iv) $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$ $(k \to \infty)$. Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iv) liefert, da obige Argumentation für beliebige konvergente Teilfolgen gilt,

$$Au_n \rightharpoonup b = Au \quad (n \to \infty) ,$$

d.h. A ist demistetig. ■

2.10 Satz (Brezis 1968). *Sei $A\colon X \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter, koerziver Operator, wobei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum ist. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b . \tag{2.11}$$

Beweis. Aufgrund von Lemma 2.6 (v) ist A demistetig, da A pseudomonoton und beschränkt ist. Nach Lemma 2.6 (iv) genügt A auch der Bedingung (M), da A pseudomonoton ist. Wir gehen nun analog zum Beweis des Satzes von Browder–Minty (Satz 1.5) vor. Dazu wählen wir eine Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X. Mithilfe des Galerkin–Verfahrens suchen wir approximative Lösungen

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_n^k w_k \,,$$

die das Galerkin–System (cf. Beweis von Satz 1.5)

$$g_n^k(\mathbf{c}_n) = g_n^k(u_n) := \langle Au_n - b, w_k\rangle = 0 \,, \qquad k = 1, \dots, n \,, \tag{2.12}$$

lösen. Die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems folgt wie im Beweis des Satzes 1.5, da A demistetig und koerziv ist. Die Demistetigkeit von A impliziert nämlich, dass die Funktionen $g_n^k, k = 1, \dots, n$, stetig sind, und die Koerzivität von A, dass es ein $R_0 > 0$ gibt, so dass $\sum_{k=1}^n g_n^k(\mathbf{c}_n)\, c_n^k > 0$ für alle $\|u_n\| = R_0$ gilt (cf. (1.10)). Außerdem erhalten wir aus der Koerzivität auch eine apriori Abschätzung (cf. (1.11)), d.h.

$$\|u_n\|_X \le R_0 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Also gibt es eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ $(k \to \infty)$. Wir wollen nun zeigen, dass u (2.11) löst. Aus dem Galerkin–System (2.12) folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, v\rangle = \langle b, v\rangle \qquad \forall v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\} \,.$$

Die Beschränktheit des Operators A liefert, dass die Folge (Au_{n_k}) beschränkt ist, da die schwach konvergente Folge (u_{n_k}) beschränkt ist. Aufgrund der Reflexivität von X^* (cf. Lemma A.7.4 (iii)) besitzt eine Teilfolge von (Au_{n_k}), die wir wieder mit (Au_{n_k}) bezeichnen, einen schwachen Grenzwert, d.h.

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c \ \text{ in } X^* \qquad (k \to \infty) \,.$$

Es gilt aber $c = b$ mit denselben Argumenten wie im Beweisteil 3. von Satz 1.5. Aus dem Galerkin–System (2.12) und der schwachen Konvergenz der (u_{n_k}) erhalten wir

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle b, u_{n_k}\rangle \to \langle b, u\rangle \qquad (k \to \infty) \,.$$

Daher erfüllt die Folge (u_{n_k}) die Voraussetzung der Bedingung (M) und es folgt

$$Au = b \,,$$

d.h. u ist die gesuchte Lösung von (2.11). ■

3.2.2 Quasilineare elliptische Gleichungen II

Wir betrachten nun das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind, und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion ist. Dies ist eine Verallgemeinerung der Probleme (1.23) und (2.1) und kann, wie am Beginn von Abschnitt 3.2.1 erläutert wurde, im Allgemeinen nicht mit der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden. Um die Darstellung nicht durch zusätzliche Fallunterscheidungen aufgrund unterschiedlicher Einbettungen (cf. Satz A.12.24) unübersichtlicher zu machen, beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $p < d$. Allerdings gelten alle Resultate auch für den Fall $p \ge d$.

Wir wollen die Theorie pseudomonotoner Operatoren benutzen. Dazu setzen wir $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ und definieren folgende Abbildungen:

$$\langle A_1 u, \varphi\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx\,, \tag{2.14}$$

$$\langle A_2 u, \varphi\rangle := \int_\Omega g(u)\,\varphi\, dx\,, \tag{2.15}$$

$$\langle b, \varphi\rangle := \int_\Omega f\,\varphi\, dx\,. \tag{2.16}$$

Wir gehen analog zum Abschnitt 3.1.3 vor. Dort wurden bereits der Operator A_1 (cf. Lemmata 1.27, 1.30 mit $s = 0$) und das Funktional b (cf. Lemma 1.27) behandelt. Für den Operator A_2 gilt:

2.17 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. An die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stellen wir folgende Wachstumsbedingung:*

$$|g(t)| \le c\,(1 + |t|^{r-1})\,, \tag{2.18}$$

wobei $1 \le r < \infty$. Für $1 \le p < d$ und $r \le \frac{dp}{d-p}$ bildet der in (2.15) definierte Operator A_2 den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum X^* ab und ist beschränkt. Für $r < \frac{dp}{d-p}$ ist A_2 stark stetig.

Beweis. 1. Aus der Definition von A_2 und (2.18) erhalten wir für $q = \frac{dp}{d-p}$ und $u, \varphi \in X$

$$
\begin{aligned}
|\langle A_2 u, \varphi\rangle| &\le \int_\Omega c\,\big(1+|u|^{r-1}\big)|\varphi|\,dx \\
&\le c\int_\Omega |\varphi|\,dx + c\Big(\int_\Omega |u|^{(r-1)q'}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big(\int_\Omega |\varphi|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c\,\big(1+\|u\|^{r-1}_{L^{(r-1)q'}}\big)\|\varphi\|_X\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Einbettung $X = W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$, $\alpha \le q$, (cf. Satz A.12.24) benutzt haben. Somit erhalten wir

$$
|\langle A_2 u, \varphi\rangle| \le c\,\big(1+\|u\|_X^{r-1}\big)\,\|\varphi\|_X\,, \tag{2.19}
$$

sofern $(r-1)q' \le q$, wobei wiederum die obige Einbettung verwendet wurde. Die Forderung $(r-1)q' \le q$ ist aufgrund der Definition von q äquivalent zu $r \le \frac{dp}{d-p}$. Aus der Definition der Operatornorm folgt

$$
\|A_2 u\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle A_2 u, \varphi\rangle| \le c\,\big(1+\|u\|_X^{r-1}\big)
$$

und demzufolge $A_2 u \in X^*$, d.h. $A_2\colon X \to X^*$. Aus dieser Abschätzung folgt auch, dass A_2 beschränkt ist.

2. Sei $(u_n) \subset X$ eine schwach konvergente Folge. Aufgrund der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, für $r < \frac{dp}{d-p}$ (cf. Satz A.12.25), gilt also für eine Teilfolge

$$
u_{n_k} \to u \;\text{ in } L^r(\Omega) \quad (k\to\infty)\,. \tag{2.20}
$$

Wir setzen

$$
(Fv)(x) = g(v(x))
$$

und erhalten mit Hilfe der Wachstumsbedingung (2.18) und der Stetigkeit von g, dass der Nemyckii–Operator F die Voraussetzungen von Lemma 1.20 erfüllt. Mit $r-1 = \frac{r}{r'}$ ist also $F: L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ stetig, d.h. für die Folge in (2.20) gilt:

$$
\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}} \to 0 \qquad (k\to\infty)\,. \tag{2.21}
$$

Daraus erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \int_\Omega |g(u_{n_k}) - g(u)||\varphi|\,dx \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}}\|\varphi\|_{L^r} \\
&\le c\,\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}}\,,
\end{aligned}
$$

aufgrund der Einbettung $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$. Mithilfe der Konvergenz in (2.21) folgt also $A_2 u_{n_k} \to A_2 u$ in X^* $(k\to\infty)$. Da diese Argumentation für alle

Teilfolgen, die (2.20) erfüllen, gilt, liefert das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iv), dass A_2 stark stetig ist, d.h. $A_2 u_n \to A_2 u$ in X^* $(n \to \infty)$. ∎

Um Satz 2.10 anwenden zu können benötigen wir noch folgendes Lemma.

2.22 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 2.17 erfülle g die Koerzivitätsbedingung*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} g(t)\, t > -\infty \tag{2.23}$$

und es sei $p > 1$. Dann ist der Operator $A_1 + A_2 : X \to X^*$ koerziv.

Beweis. Wir haben (cf. Beweis von Lemma 1.30)

$$\langle A_1 u, u\rangle = \|\nabla u\|_{L^p}^p\,, \tag{2.24}$$

und aufgrund von (2.23) gilt für eine Konstante $c_0 > 0$

$$\langle A_2 u, u\rangle = \int\limits_{\Omega} g(u)\, u\, dx > -c_0\,. \tag{2.25}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\langle A_1 u + A_2 u, u\rangle}{\|u\|_X} &\ge \frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|\nabla u\|_{L^p}} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}}\\ &\ge \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \to \infty \qquad \big(\|\nabla u\|_{L^p} \to \infty\big)\,,\end{aligned}$$

falls $p > 1$. Also ist der Operator $A_1 + A_2$ koerziv. ∎

2.26 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Sei $1 < p < d$ und die stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen (2.18) und (2.23) mit $1 \le r < \frac{dp}{d-p}$. Dann existiert für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung von (2.13), d.h. es gibt ein $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass*

$$(A_1 + A_2)u = b\,.$$

Beweis. Wir wollen den Satz von Brezis (Satz 2.10) anwenden. Der Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein reflexiver, separabler Banachraum. Aus den Lemmata 1.27 und 1.30 wissen wir, dass $A_1 : X \to X^*$ ein strikt monotoner, stetiger, beschränkter Operator ist. Also ist A_1 nach Lemma 2.6 (i) pseudomonoton. Aufgrund von Lemma 2.17 ist A_2 ein stark stetiger, beschränkter Operator. Lemma 2.6 (ii) besagt, dass somit A_2 pseudomonoton ist. Insgesamt ist also $A_1 + A_2$ ein beschränkter pseudomonotoner Operator, der aufgrund von Lemma 2.22 auch koerziv ist. Lemma 1.27 liefert $b \in X^*$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 2.10. ∎

Bemerkungen. (i) Der Fall $p \ge d$ kann analog behandelt werden. In diesem Fall fällt die obere Schranke für r weg, d.h. alle $r \in [1, \infty)$ sind zulässig. Allerdings muß man bei den Einbettungssätzen Fallunterscheidungen durchführen, die die obigen Rechnungen weiter verkompliziert hätten.

(ii) Die Funktion $g(t) = -s\,t$, $s > 0$, wird von vorherigen Satz nicht abgedeckt, da g nicht die Bedingung (2.23) erfüllt. Für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ gilt die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ und somit kann man die Koerzivität von $A_1 + A_2$ wie folgt nachweisen:

$$\begin{aligned}\frac{\langle A_1 u + A_2 u, u\rangle}{\|u\|_X} &= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} - s\frac{\|u\|_{L^2}^2}{\|\nabla u\|_{L^p}} \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} - s\,c_0 \|\nabla u\|_{L^p}\,,\end{aligned}$$

wobei c_0 die Einbettungskonstante von $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist. Die rechte Seite strebt gegen Unendlich falls entweder $p > 2$ oder $p = 2$ und $s\,c_0 < 1$. Somit ist $A_1 + A_2$ koerziv und man kann wie im Beweis von Satz 2.26 vorgehen.

3.2.3 Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen

Die stationären Navier–Stokes Gleichungen lauten[2]

$$\begin{aligned}-\Delta \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad & \text{in } \Omega\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad & \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,,\end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist. Diese Gleichungen beschreiben die stationäre Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Es ist $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)^\top : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ der Druck und $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine äußere Kraft. Der Term $[\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u}$ wird oft *Wirbelterm* genannt. Der Druck kann aus der Gleichungen (2.27) nur bis auf eine Konstante bestimmt werden. Deshalb ist es möglich eine weitere Bedingung an p zu stellen, wobei wir uns der Einfachheit halber für $\int_\Omega p\,dx = 0$ entscheiden. Wir setzen

$$X := \{\boldsymbol{\varphi} \in \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3 \,\big|\, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0\}\,. \tag{2.28}$$

Dies ist offensichtlich ein linearer Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$, den wir mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_X := \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \tag{2.29}$$

versehen. Wir definieren für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$ und $p \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega p\,dx = 0$

---

[2] Wir benutzen die Notation $[\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} := \big(\sum_{j=1}^{3} u^j\,(\partial_j u^i)\big)_{i=1,2,3}$

$$
\begin{aligned}
\langle A_1\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx\,,\\
\langle A_2\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,,\\
\langle P,\boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \langle\nabla p,\boldsymbol{\varphi}\rangle := -\int_\Omega p\,\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,dx = 0\,,\\
\langle b,\boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Offensichtlich ist die Operatorgleichung $A_1\mathbf{u}+A_2\mathbf{u}=b$ äquivalent zur schwachen Formulierung von Problem (2.27), d.h. für alle $\boldsymbol{\varphi}\in X$ gilt

$$
\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx + \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,. \tag{2.31}
$$

Wir überprüfen nun, dass die Operatoren A_1, A_2, und b wohldefiniert sind, und dass der Operator A_1+A_2 die Voraussetzungen von Satz 2.10 erfüllt.

2.32 Lemma. *Unter den obigen Voraussetzungen an Ω ist der in (2.28) definierte Raum X, versehen mit der Norm (2.29), ein reflexiver, separabler Banachraum.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass der Raum X, definiert in (2.28), ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ ist. Sei $(\mathbf{u}_n)\subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n\to\mathbf{u}$ in $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ $(n\to\infty)$. Daraus folgt insbesondere, dass $\nabla\mathbf{u}_n\to\nabla\mathbf{u}$ in $\big(L^2(\Omega)\big)^{3\times 3}$ $(n\to\infty)$. Daher gibt es eine Teilfolge mit $\nabla\mathbf{u}_{n_k}\to\nabla\mathbf{u}$ fast überall $(k\to\infty)$. Wir erhalten also für fast alle $x\in\Omega$

$$
\operatorname{div}\mathbf{u}(x) = \operatorname{tr}\nabla\mathbf{u}(x) = \lim_{k\to\infty}\operatorname{tr}\nabla\mathbf{u}_{n_k}(x) = 0\,,
$$

d.h. $\mathbf{u}\in X$. Da ein abgeschlossener Teilraum eines Banachraumes wieder ein Banachraum ist, haben wir also bewiesen, dass X ein Banachraum ist. Außerdem ist ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Banachraumes wieder reflexiv (cf. Lemma A.7.4 (i)). Da $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ separabel ist, ist auch der Teilraum $X\subset\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ separabel (cf. Satz A.7.4 (vi)). ■

2.33 Lemma. *Unter den obigen Voraussetzungen an Ω und mit X, definiert in (2.28), ist der Operator $A_1 : X\to X^*$ linear, stetig, koerziv, strikt monoton und beschränkt.*

Beweis. Offensichtlich ist A_1 linear. Der Operator $A_1 : X\to X^*$ ist eine vektorwertige Variante des Operators $A : W_0^{1,2}(\Omega)\to(W_0^{1,2}(\Omega))^*$ in Lemma 1.27 mit $p=2$ und $s=0$. Da X ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ ist folgt sofort

$$A_1 \colon X \subseteq \big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3 \to \big(\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3\big)^* \subseteq X^* \,,$$

da die Restriktion eines Funktionals, das auf $\big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3$ definiert ist, auf den Teilraum X natürlich ein Funktional auf X ist. Die fehlenden Behauptungen folgen somit sofort aus Lemma 1.27 und Lemma 1.30. ∎

2.34 Lemma. *Der Operator A_2 definiert in (2.30) ist ein stark stetiger, beschränkter Operator von X nach X^*.*

Beweis. 1. Für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| &\le \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}||\boldsymbol{\varphi}|\,dx \\
&\le \Big(\int_\Omega |\mathbf{u}|^4\,dx\Big)^{\frac14}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^4\,dx\Big)^{\frac14}\Big(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\Big)^{\frac12} \\
&\le c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{\varphi}\|_X\,,
\end{aligned}$$

denn $X \hookrightarrow \big(L^4(\Omega)\big)^3$ (cf. Satz A.12.24). Aus der Abschätzung folgt sowohl $A_2\mathbf{u} \in X^*$ und damit $A_2 \colon X \to X^*$, als auch die Beschränktheit von A_2.

2. A_2 ist stark stetig: Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ $(n \to \infty)$. Aus der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow \big(L^4(\Omega)\big)^3$, erhalten wir für eine Teilfolge $\mathbf{u}_{n_k} \to \mathbf{u}$ in $\big(L^4(\Omega)\big)^3$ $(k \to \infty)$. Da die weitere Argumentation wieder für alle konvergenten Teilfolgen gilt, bezeichnen wir obige Teilfolge wiederum mit $(\mathbf{u}_n)$. Wir werden zeigen, dass gilt:

$$\|A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}\|_{X^*} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in X\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} |\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nehmen wir an, dies gelte nicht. Also existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und Elemente $\boldsymbol{\varphi}_n \in X$, $\|\boldsymbol{\varphi}_n\| \le 1$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| \ge \varepsilon_0\,.$$

Da die Folge $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{\varphi}_{n_k})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \rightharpoonup \boldsymbol{\varphi}$ in X $(k \to \infty)$, und $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge, im Folgenden mit $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ bezeichnet, gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| &= \Big|\int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n]\mathbf{u}_n\cdot\boldsymbol{\varphi}_n - [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}_n\,dx\Big| \\
&= \Big|\int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n](\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}_n + [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad + [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big|
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| &\le \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}\|\boldsymbol{\varphi}_n\|_{L^4} \\
&\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|_{L^2}\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\quad + \Big|\int\limits_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, dx\Big| \\
&\le C\,\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4} + C\,\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\quad + \Big|\int\limits_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, dx\Big| \to 0 \qquad (n\to\infty)\,,
\end{aligned}$$

da die Folge $\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}$ beschränkt ist (cf. Lemma 0.3 (i)), $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $\big(L^4(\Omega)\big)^3$ $(n\to\infty)$, $\nabla\mathbf{u}_n \rightharpoonup \nabla\mathbf{u}$ in $\big(L^2(\Omega)\big)^{3\times 3}$ $(n\to\infty)$ und $\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}$ in $\big(L^4(\Omega)\big)^{3\times 3}$ $(n\to\infty)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Damit folgt $A_2\mathbf{u}_n \to A_2\mathbf{u}$ $(n\to\infty)$, d.h. A_2 ist stark stetig auf X. ■

2.35 Satz. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{f}\in(L^2(\Omega))^3$ ein $\mathbf{u}\in X$, wobei X in (2.28) definiert ist, so dass $\mathbf{u}$ die Navier–Stokes–Gleichungen (2.27) im schwachen Sinne löst, d.h. (2.31) gilt.*

Beweis. Der Raum$X$ ist aufgrund von Lemma 2.32 ein separabler und reflexiver Banachraum. Aufgrund der Lemmata 2.33, 2.34 und 2.6 ist der Operator $A_1 + A_2\colon X\to X^*$ beschränkt und pseudomonoton. Es bleibt zu zeigen, dass $A_1 + A_2$ auch koerziv ist. Für alle $\mathbf{u}\in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\langle A_2\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 u^j\,\frac{\partial u^i}{\partial x_j} u^i\, dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^3 u^j\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) dx \\
&= -\int\limits_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\,\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\, dx = 0\,,
\end{aligned}$$

da für $\mathbf{u}\in X$ gilt $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Da A_1 koerziv ist (cf. Lemma 2.33), ist also insgesamt $A_1 + A_2$ koerziv auf X [3]. Mit denselben Argumenten wie in Lemma 1.27 erhält man $b\in\big(\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3\big)^*\subseteq X^*$, sofern $\mathbf{f}\in(L^2(\Omega))^3$. Satz 2.10 liefert die Behauptung des Satzes. ■

Bisher haben wir die Existenz einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ gezeigt, die (2.31) erfüllt. Um auch einen Druck p zu finden, so dass für alle $\boldsymbol{\varphi}\in(W_0^{1,2}(\Omega))^3$ gilt:

---

[3] Die Koerzivität ist die einzige Eigenschaft, die nur auf X und nicht auf $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ gilt. Zum Beweis der anderen Eigenschaften benötigen wir die Bedingung $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ nicht.

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,, \tag{2.36}$$

muss man den *Satz von De Rham* auf $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ definiert durch

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle := \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx$$

anwenden.

2.37 Satz (De Rham 1960). *Sei* $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ *ein Funktional. Falls für alle* $\boldsymbol{\varphi} \in X$ *gilt:*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0\,,$$

dann existiert eine Funktion $p \in L^2(\Omega)$ *mit* $\int_\Omega p\, dx = 0$*, so dass für alle* $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ *gilt:*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, dx\,.$$

Beweis. cf. [14]. ■

3.2.4 Evolutionsprobleme

Bevor wir uns mit den instationären Versionen der Gleichungen (2.1) und (2.13) beschäftigen, wollen wir auf einige Besonderheiten bei der Behandlung zeitabhängiger Probleme eingehen.

Die erste Besonderheit besteht darin, dass bei der Untersuchung von parabolischen Differentialgleichungen und Evolutionsgleichungen die *Ort*– und *Zeitvariablen* unterschiedlich behandelt werden. Was bedeutet das? In Gleichungen dieser Art ist die Unbekannte eine Funktion $u \in X$, wobei X ein Funktionenraum ist, dessen Elemente auf dem Raum–Zeitzylinder $I \times \Omega$ definiert sind, wobei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ ist und $I = (0,T)$ ein gegebenes Zeitintervall. Nun kann man jedem $u\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$[\tilde{u}(t)](x) := u(t,x)$$

eine Abbildung $\tilde{u}\colon I \to Y$ zuordnen, wobei Y ein Funktionenraum ist, dessen Elemente nur auf Ω definiert sind. Somit können wir also für alle $t \in I$ die Funktion $\tilde{u}(t)\colon \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto u(t,x)$ als ein Element dieses Funktionenraumes interpretieren. Damit haben wir zwei Sichtweisen für u: Einerseits kann man u als Funktion in Ort und Zeit betrachten, andererseits als Funktion in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum. Im Weiteren werden wir die zweite Sichtweise benutzen.

Eine weitere Besonderheit bei der Behandlung parabolischer Differentialgleichungen besteht darin, dass in natürlicher Weise *mehrere* Funktionenräume auftreten. Wir wollen dies am Beispiel der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } I \times \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega\,, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{2.38}$$

illustrieren. Sei u eine glatte Lösung von (2.38), die dann natürlich auch die *schwache Formulierung* von (2.38) erfüllt, d.h. für alle $\varphi \in L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega))$ gilt:

$$\int_I \int_\Omega \partial_t u\, \varphi \, dx\, dt + \int_I \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\, dt = \int_I \int_\Omega f \varphi \, dx\, dt\,. \tag{2.39}$$

Wenn wir nun $\varphi = u$ wählen, erhalten wir, mithilfe partieller Integration und der Young–Ungleichung, die *apriori Abschätzung* (cf. die Rechnung, die zu (1.2.62) führt und (2.54))

$$\|u\|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} \le c\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\right). \tag{2.40}$$

Mithilfe dieser Abschätzung erhält man, wenn man (2.39) als Gleichung für die Zeitableitung $\partial_t u$ auffasst, die Abschätzung

$$\left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(I;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)} \le c\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\right). \tag{2.41}$$

Also benötigt man zur Behandlung der Wärmeleitungsgleichung in natürlicher Weise die Räume $L^2(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$ und $W^{-1,2}(\Omega) := (W_0^{1,2}(\Omega))^*$.

Wir wollen nun einen Spezialfall der Theorie *verallgemeinerter Zeitableitungen* entwickeln. Eine ausführliche Darstellung kann man z.B. in [10, Kapitel 4] oder [22] finden.

Sei V ein Banachraum, der stetig in den Hilbertraum H einbettet, d.h. $V \subseteq H$ und für alle $x \in V$ gilt: $\|x\|_H \le c\,\|x\|_V$ (cf. Abschnitt A.12.1). Außerdem sei V dicht in H, d.h. $\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H$. Da die Einschränkung jedes stetigen, linearen Funktionals $f \in H^*$ auf V ein stetiges, lineares Funktional auf V definiert, d.h. $H^* \subseteq V^*$, und für alle $x \in V$ und $f \in H^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle f, x\rangle_V = \langle f, x\rangle_H &\le \|f\|_{H^*}\, \|x\|_H \\ &\le c\,\|f\|_{H^*}\, \|x\|_V\,, \end{aligned}$$

erhalten wir, dass H^* stetig in V^* einbettet, d.h. $H^* \subseteq V^*$ und für alle $f \in H^*$ gilt $\|f\|_{V^*} \le c\,\|f\|_{H^*}$. Aufgrund des Rieszschen Darstellungsatzes (cf. Satz A.10.3) können wir H mit H^* identifizieren und erhalten insgesamt

$$V \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow V^* .$$

Ein solches Tripel (V, H, V^*) heißt **Gelfand–Tripel**. Ein typisches Beispiel für ein Gelfand–Tripel ist $(W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,2}(\Omega))$, also genau die Räume, die in natürlicher Weise bei der Behandlung der Wärmeleitungsgleichung auftreten.

Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel. Dann wird für alle $h \in H$ durch

$$\langle \bar{h}, v\rangle_V := (h, v)_H \,, \qquad v \in V \,,$$

ein stetiges, lineares Funktional $\bar{h} \in V^*$ definiert. Die Zuordnung $h \mapsto \bar{h}$, aufgefasst als Abbildung von H nach V^*, ist linear, stetig und injektiv. Daher kann man $\bar{h}$ mit h identifizieren. In diesem Sinne haben wir also $H \hookrightarrow V^*$ und für alle $h \in H$ und alle $v \in V$ gilt:

$$\langle h, v\rangle_V = (h, v)_H \,.$$

Dies, zusammen mit der Symmetrie des Skalarproduktes in H, liefert für alle $v, w \in V$

$$\langle v, w\rangle_V = (v, w)_H = (w, v)_H = \langle w, v\rangle_V \,. \tag{2.42}$$

2.43 Definition. *Sei $u \in L^p(I; V)\,, 1 < p < \infty$ und (V, H, V^*) sei ein Gelfand–Tripel. Dann definieren wir die **verallgemeinerte Zeitableitung** $\frac{du}{dt}$ als ein Element des Raumes $L^{p'}(I; V^*)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, für das gilt:*

$$\int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}(t), v\Big\rangle_V \varphi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)_H\, \varphi'(t)\, dt \quad \forall v \in V \,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I; \mathbb{R}) \,.$$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist die verallgemeinerte Zeitableitung $\frac{du}{dt}$ *nicht* mit der schwachen Zeitableitung $\partial_t u$ identisch. Die schwache Ableitung $\partial_t u$ auf $I \times \Omega$ ist nämlich definiert durch:

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u\, \varphi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega u\, \partial_t \varphi\, dx\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I \times \Omega) \,.$$

Beide Ableitungen stimmen jedoch überein, falls $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in V liegt.

Im Folgenden bezeichnen wir für $I = (0,T)$

$$\begin{aligned} W &:= \Big\{ u \in L^p(I;V) \;\Big|\; \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;V^*) \Big\} , \\ \|u\|_W &:= \|u\|_{L^p(I;V)} + \Big\| \frac{du}{dt} \Big\|_{L^{p'}(I;V^*)} , \end{aligned} \tag{2.44}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Der Raum $(W, \|\cdot\|_W)$ ist ein *Banachraum.*

2.45 Lemma. *Sei V ein reflexiver, separabler Banachraum und sei (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel und sei W wie in (2.44) definiert. Dann gilt die stetige Einbettung*

$$W \hookrightarrow C(\overline{I};H) ,$$

und für alle $u, v \in W$ und alle $s,t \in \overline{I}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int\limits_s^t \Big\langle \frac{du}{dt}(\tau) \,,\, v(\tau) \Big\rangle_V + \Big\langle \frac{dv}{dt}(\tau) \,,\, u(\tau) \Big\rangle_V \, d\tau \\ &= \big(u(t), v(t)\big)_H - \big(u(s), v(s)\big)_H . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Beweis. Der Beweis ist technisch und benutzt viele Approximationsargumente. Er findet sich z.B. in [10, Satz IV.1.17] oder in [22, Satz 23.23]. ∎

Bemerkungen. (i) Formel (2.46) ist das Analogon zu folgender partiellen Integrationsformel für reellwertige Funktionen $u, v \colon I \to \mathbb{R}$:

$$\int\limits_s^t u'(t)\, v(t) + u(t)\, v'(t)\, dt = u(t)\, v(t) - u(s)\, v(s) .$$

(ii) Im Spezialfall $u = v \in W$ erhalten wir

$$\int\limits_s^t \Big\langle \frac{du}{dt}(\tau) \,,\, u(\tau) \Big\rangle_V \, d\tau = \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(s)\|_H^2 . \tag{2.47}$$

Wir betrachten nun das *Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A\,u &= b , \\ u(0) &= u_0 , \end{aligned} \tag{2.48}$$

und wollen eine instationäre Variante des Satzes 2.10 beweisen. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall, dass $A \colon V \to V^*$ ein gegebener Operator auf einem reflexiven, separablen Banachraum V ist. Für Elemente $u \in L^p(I;V)$, $1 < p < \infty$, $I = (0,T)$ mit $T < \infty$, kann man durch

$$(\widetilde{A}u)(t) := A\big(u(t)\big)\,, \qquad t \in I\,, \tag{2.49}$$

einen Operator $\widetilde{A}$ auf $L^p(I;V)$ definieren. Unter gewissen Bedingungen an A (cf. Lemma 2.61) kann man zeigen, dass für den *induzierten* Operator $\widetilde{A}$ gilt:

$$\widetilde{A} \colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)\,.$$

Im Folgenden werden wir in der Regel nicht zwischen dem Operator $A\colon V \to V^*$ und dem induzierten Operator $\widetilde{A}\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$ unterscheiden.

2.50 Satz. *Sei V ein separabler, reflexiver Banachraum und (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel. Wir setzen $X := L^p(I;V)$, $1 < p < \infty$, wobei $I = (0,T)$ mit $T < \infty$. Sei $A\colon V \to V^*$ ein Operator, so dass der induzierte Operator $A\colon X \to X^*$ pseudomonoton und beschränkt ist, sowie der Koerzivitätsbedingung*

$$\langle Au, u\rangle_X \ge c_0\, \|u\|_X^p\,, \qquad u \in X\,, c_0 > 0\,, \tag{2.51}$$

genügt. Dann existiert für alle $u_0 \in H$ und $b \in X^*$ eine Lösung $u \in W$ des Problems (2.48).

Bemerkung. Aufgrund der Einbettung $W \hookrightarrow C(\overline{I};H)$ aus Lemma 2.45 ist die Lösung $u \in W$ eine stetige Funktion mit Werten in H, und somit macht die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ Sinn.

Beweis (Satz 2.50). Wir beweisen den Satz mit Hilfe des *Galerkin Verfahrens*. Da V separabel ist, überlegt man sich leicht, dass es eine Folge $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Elemente $\{w_i\}_{i=1\ldots n}$ linear unabhängig sind und $\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{span}\{w_1,\ldots,w_k\}$ dicht in V ist. Wir setzen $V_n := \operatorname{span}\{w_1,\ldots,w_n\}$ und suchen *approximative Lösungen* $u_n \in V_n$ der Form

ueber Norm auf $\mathbb{R}^n$ reden

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_n^k(t)\, w_k\,,$$

die für alle $t \in I$ das *Galerkin–System*

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{du_n(t)}{dt}, w_k\Big\rangle + \big\langle Au_n(t), w_k\big\rangle &= \langle b_n(t), w_k\rangle\,, \qquad k = 1,\ldots,n\,, \\ u_n(0) &= u_0^n\,, \end{aligned} \tag{2.52}$$

lösen. Hierbei ist $b_n \in C(\overline{I};V^*)$ eine Folge, die stark in $X^* = L^{p'}(I;V^*)$ gegen $b \in X^*$ konvergiert (cf. Lemma 2.1.24 (ii)) und $u_0^n = \sum_{i=1}^n c_n^{0i} w_i \in V_n$ eine Folge, die stark in H gegen $u_0 \in H$ konvergiert.

1. Lösbarkeit von (2.52): Da $w_1,\ldots,w_n$ linear unabhängig sind, ist die Matrix $\mathsf{D} = (d_{ij}) := \big((w_i,w_j)_H\big)_{i,j=1,\ldots,n}$ invertierbar. Also kann man das

Galerkin–System (2.52) als folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Funktionen $t \mapsto \mathbf{c}_n(t) = (c_n^1(t), \ldots, c_n^n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}_n(t)}{dt} &= \mathbf{f}_n(t, \mathbf{c}^n(t))\,, \\ \mathbf{c}_n(0) &= \mathbf{c}_n^0\,, \end{aligned} \tag{2.53}$$

wobei $f_n Jj(t, \mathbf{c}) := \sum_{k=1}^n d_{jk}^{-1}\big(\langle b_n(t), w_k\rangle_V - \big\langle A\big(\sum_{l=1}^n c^l\, w_l\big), w_k\big\rangle_V\big)$, $j = 1, \ldots, n$, und $\mathbf{c}_n^0 = (c_n^{01}, \ldots, c_n^{0n})$. Der Operator A ist aufgrund von Lemma 2.6 demistetig, da A pseudomonoton und beschränkt ist. Dies und $b_n \in C(\overline{I}; V^*)$ impliziert, dass $\mathbf{f}_n \colon \overline{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Um die *globale* Lösbarkeit von (2.52) bzw. (2.53) zu zeigen, benötigen wir folgende *apriori Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{C(\overline{I};H)} + \|u_n\|_X^p &\le c\,(b, u_0)\,, \\ \|Au_n\|_{X^*} &\le c\,(b, u_0)\,, \end{aligned} \tag{2.54}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $c(b, u_0)$. Sei $u_n \in C^1(\overline{I}; V_n) \subset W$ eine Lösung von (2.52). Wenn wir die k–te Gleichung in (2.52) mit $c_n^k(t)$ multiplizieren, die Gleichungen dann addieren und das Resultat über $(0, t)$, $0 < t \le T$ integrieren, erhalten wir mithilfe von (2.47), (2.51) und der Young–Ungleichung

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 + \int_0^t \big\langle Au_n(s), u_n(s)\big\rangle_V\, ds \\ &\qquad \le \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2 + \int_0^t \|b_n(s)\|_{V^*}\|u_n(s)\|_V\, ds \\ &\qquad \le \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2 + c(c_0, p)\int_0^T \|b_n(s)\|_{V^*}^{p'}\, ds + \frac{c_0}{2}\int_0^T \|u_n(s)\|_V^p\, ds\,. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Da die rechte Seite nicht von $t \in \overline{I}$ abhängt, ist sie auch eine obere Schranke von

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in\overline{I}} \frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 + \int_0^T \big\langle Au_n(s), u_n(s)\big\rangle_V\, ds \\ &\ge \sup_{t\in\overline{I}} \frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 + c_0\int_0^T \|u_n(s)\|_V^p\, ds\,, \end{aligned}$$

wobei wir (2.51) benutzt haben. Den letzten Term auf der rechten Seite von (2.55) absorbieren wir im letzten Term der vorherigen Ungleichung, benutzen, dass $u_0^n \to u_0$ in H $(n \to \infty)$ und $b_n \to b$ in X^* $(n \to \infty)$ gilt und erhalten $(2.54)_1$. Da $A\colon X \to X^*$ ein beschränkter Operator ist folgt daraus sofort $(2.54)_2$. Aus $(2.54)_1$ folgt insbesondere die Existenz einer Konstanten $K_1 = K_1(b, u_0, n)$ mit

$$|\mathbf{c}_n(t)| \le K_1\,, \qquad \text{für alle } t \in \overline{I}\,.$$

Wenn wir $K := \sup_{\overline{I}\times\overline{B_{2K_1}(\mathbf{0})}} |\mathbf{f}_n|$ setzen, erhalten wir aus der Bemerkung nach dem Satz von Peano (cf. Satz 1.2.53), dass das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.53) auf dem Intervall $[0, \min(T, \frac{2K_1}{K})]$ lösbar ist. Da für festes n die Länge des Existenzintervalls nur von den Daten u_0, b und dem Operator A abhängt, kann man für jedes n die Lösung $\mathbf{c}_n(\cdot)$ in endlich vielen Schritten auf das gesamte Intervall I fortsetzen. Somit ist das Galerkin–System (2.52) für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall I lösbar und die Lösungen $u_n \in W$ erfüllen die apriori Abschätzungen (2.54).

2. Konvergenz des Galerkin–Verfahrens: Aus der apriori Abschätzung (2.54) folgt, dass es eine Teilfolge von (u_n) gibt, die wir wieder mit (u_n) bezeichnen, mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X && (n\to\infty)\,,\\ Au_n &\rightharpoonup \xi && \text{in } X^* && (n\to\infty)\,,\\ u_n(T) &\rightharpoonup u^* && \text{in } H && (n\to\infty)\,. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Für alle $w \in \bigcup_{k=1}^\infty V_k$ gibt es ein n_0 mit $w \in V_{n_0}$. Da u_n eine Lösung von (2.52) ist, erhalten wir für alle $n \ge n_0$

$$\Big\langle \frac{du_n(t)}{dt}, w\Big\rangle + \big\langle Au_n(t), w\big\rangle = \langle b_n(t), w\rangle\,.$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit $\varphi \in C^1(\overline{I})$, integrieren bezüglich der Zeit über I und erhalten mithilfe von (2.46) (setze $u = u_n, v(t) = \varphi(t)w$) und (2.42)

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u_n(t), w)_H \varphi'(t)\,dt + \int_0^T \big\langle Au_n(t), w\big\rangle_V \varphi(t)\,dt \\ &\quad = \int_0^T \langle b_n(t), w\rangle_V \varphi(t)\,dt - (u_n(T), w)_H\varphi(T) + (u_0^n, w)_H \varphi(0)\,. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $(u_n(t), w)_H = \langle w, u_n(t)\rangle_V$ (vgl. (2.42)), $\varphi(\cdot)w \in X$, $\varphi'(\cdot)w \in X^*$ sowie $w \in H^*$ liefert der Grenzübergang $(n\to\infty)$ aufgrund von (2.56), sowie $b_n \to b$ in X^* $(n\to\infty)$ und $u_0^n \to u_0$ in H $(n\to\infty)$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (u(t),w)_H \varphi'(t)\,dt + \int_0^T \big\langle \xi, w\big\rangle_V \varphi(t)\,dt \\
&\quad = \int_0^T \langle b(t), w\rangle_V \varphi(t)\,dt - (u^*,w)_H\varphi(T) + (u_0,w)_H\varphi(0)\,.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Da $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ dicht in V liegt, gilt (2.57) für alle $w \in V$ und alle $\varphi \in C^1(\overline{I})$. Wenn wir nun $\varphi \in C_0^\infty(I)$ in (2.57) wählen, erhalten wir aufgrund von Definition 2.43 dass gilt:

$$
\frac{du}{dt} = b - \xi \in X^*\,, \tag{2.58}
$$

und somit auch $u \in W$. Aus (2.58) und (2.46) (setze $v(t) = \varphi(t)w$) folgt

$$
\int_0^T (u(t),w)_H \varphi'(t) + \big\langle b-\xi, w\big\rangle_V \varphi(t)\,dt = (u(T),w)_H\varphi(T) - (u(0),w)_H\varphi(0)\,,
$$

was zusammen mit (2.57)

$$
(u(T),w)_H\varphi(T) - (u(0),w)_H\varphi(0) = (u^*,w)_H\varphi(T) - (u_0,w)_H\varphi(0)
$$

liefert. Wenn wir nun φ so wählen, dass $\varphi(T) = 1$ und $\varphi(0) = 0$, bzw. $\varphi(T) = 0$ und $\varphi(0) = 1$ gilt, erhalten wir

$$
u(T) = u^*\,, \qquad u(0) = u_0\,. \tag{2.59}
$$

Wir müssen noch $Au = \xi$ zeigen, wobei wir die Pseudomonotonie von A benutzen. Wenn wir die k–te Gleichung in (2.52) mit $c_n^k(t)$ multiplizieren, die Gleichungen dann addieren und das Resultat über I integrieren, erhalten wir mithilfe von (2.47)

$$
\int_0^T \big\langle Au_n, u_n\big\rangle\,dt = \int_0^T \langle b_n, u_n\rangle\,dt - \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2\,.
$$

Hieraus folgern wir mithilfe von $b_n \to b$ in X^* $(n \to \infty)$, (2.56), $(2.59)_1$, sowie der Unterhalbstetigkeit der Norm (cf. Lemma A.8.6 (iii)) dass gilt:

$$
\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle Au_n, u_n\big\rangle\,dt \le \int_0^T \langle b, u\rangle\,dt - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2\,. \tag{2.60}
$$

Andererseits gilt aufgrund von (2.47) und (2.58)

$$-\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 = -\int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}, u \Big\rangle \, dt = \int_0^T \langle \xi - b, u \rangle \, dt \,,$$

was zusammen mit (2.60)

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \langle Au_n, u_n \rangle \, dt \le \int_0^T \langle \xi, u \rangle \, dt$$

ergibt. Da der Operator A pseudomonoton ist, erfüllt er aufgrund von Lemma 2.6 (iv) auch die Bedingung (M), und somit gilt: $Au = \xi$. Dies zusammen mit (2.58) und $(2.59)_2$ impliziert, dass $u \in W$ eine Lösung von (2.48) ist. Der Beweis des Satzes ist vollständig. ■

Bevor wir Satz 2.50 anwenden, wollen wir eine Bedingung angeben, die sichert, dass der induzierte Operator eines Operators $A\colon V \to V^*$ den Raum $L^p(I;V)$ in den Dualraum $L^{p'}(I;V^*)$ abbildet.

2.61 Lemma. *Sei V ein separabler Banachraum und sei $A\colon V \to V^*$ ein demistetiger Operator, der der Wachstumsbedingung*

$$\|Au\|_{V^*} \le c\left(\|u\|_V^{p-1} + 1\right), \tag{2.62}$$

mit $p > 1$, genügt. Dann bildet der induzierte Operator $\widetilde{A}$, definiert in (2.49), den Raum $L^p(I;V)$ in den Dualraum $L^{p'}(I;V^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ab und ist beschränkt und demistetig.

Beweis. 1. $t \mapsto \widetilde{A}u(t)\colon I \to V^*$ ist Bochner–messbar: Sei $u \in L^p(I;V)$ gegeben. Dann ist u insbesondere Bochner–messbar und es existiert eine Folge von Treppenfunktionen $u_n\colon I \to V$, so dass für fast alle $t \in I$ gilt $u_n(t) \to u(t)$ in V $(n \to \infty)$. Offensichtlich sind dann auch $\widetilde{A}u_n\colon I \to V^*$ Treppenfunktionen, die, aufgrund der Demistetigkeit von $A\colon V \to V^*$, fast überall schwach in V^* gegen $\widetilde{A}u$ konvergieren. Folgerung 2.1.10 liefert nun, dass die Abbildung $t \mapsto \widetilde{A}u(t)\colon I \to V^*$ Bochner–messbar ist.

2. $\widetilde{A}\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$ ist beschränkt: Sei $u \in L^p(I;V)$ gegeben. Aus 1. und Lemma 2.1.7 folgt, dass die reellwertige Funktion $t \mapsto \|\widetilde{A}u(t)\|_{V^*}$ Lebesgue–messbar ist. Aufgrund der Wachstumsbedingung (2.62) haben wir für fast alle $t \in I$

$$\|\widetilde{A}u(t)\|_{V^*}^{p'} \le c\left(\|u(t)\|_V^p + 1\right), \tag{2.63}$$

was zusammen mit $u \in L^p(I;V)$ liefert, dass die Funktion $t \mapsto \|\widetilde{A}u(t)\|_{V^*}$ Lebesgue–integrierbar ist. Integration von (2.63) über I liefert

$$\|\widetilde{A}u\|_{L^{p'}(I;V^*)} \le c\left(\|u\|_{L^p(I;V)}^{p-1} + 1\right),$$

d.h. $\widetilde{A}\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$ ist beschränkt.

3. $\widetilde{A}\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$ ist demistetig: Sei $(u_n) \subset L^p(I;V)$ eine Folge mit
$$\int_I \|u_n - u\|_V^p \, dt \to 0\,, \quad (n \to \infty)\,.$$
Aus Satz A.11.12 folgt, dass es eine Teilfolge (u_{n_k}) gibt mit $u_{n_k}(t) \to u(t)$ in V $(k \to \infty)$ für fast alle $t \in I$. Da $A\colon V \to V^*$ demistetig ist, folgern wir dass für fast alle $t \in I$ gilt: $\widetilde{A}u_{n_k}(t) \rightharpoonup \widetilde{A}u(t)$ in V^* $(k \to \infty)$. Insbesondere erhalten wir also für alle $\varphi \in L^p(I;V)$ und fast alle $t \in I$:
$$\big\langle \widetilde{A}u_{n_k}(t), \varphi(t)\big\rangle_V \to \big\langle \widetilde{A}u(t), \varphi(t)\big\rangle_V \quad (k \to \infty)\,.$$
Mithilfe der Wachstumsbedingung (2.62) und der Young–Ungleichung folgt
$$\big|\langle \widetilde{A}u_{n_k}(t), \varphi(t)\rangle_V\big| \le c\left(\|u_{n_k}(t)\|_V^p + \|\varphi(t)\|_V^p + 1\right).$$
Die rechte Seite konvergiert sowohl punktweise fast überall in I als auch in $L^1(I)$ gegen $c\left(\|u(\cdot)\|_V^p + \|\varphi(\cdot)\|_V^p + 1\right)$. Satz A.11.11 lierfert also
$$\widetilde{A}u_{n_k} \rightharpoonup \widetilde{A}u \ \text{ in } L^{p'}(I;V^*) \quad (k \to \infty)\,.$$
Da die gesamte Argumentation für alle konvergenten Teilfolgen gilt, liefert das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iv) dass der Operator $\widetilde{A}$ demistetig ist. ■

3.2.5 Quasilineare parabolische Gleichungen

Als Anwendung des Satzes 2.50 betrachten wir folgende *quasilineare parabolische* Gleichung:
$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + s\,u &= f && \text{in } I \times \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega\,, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,. \end{aligned} \tag{2.64}$$
Dabei sei $1 < p < \infty$, Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $s \ge 0$ und $I = (0,T)$ ein endliches Zeitintervall. Die rechte Seite f und der Anfangswert u_0 seien gegeben. Wir setzen $V := W_0^{1,p}(\Omega), H := L^2(\Omega)$ und $X := L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$, wobei wir V mit der äquivalenten Norm $\|\nabla u\|_p$ versehen (cf. (A.12.27)). Für $p \ge \frac{2d}{d+2}$ ist (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel. Die Gleichung (2.64) in die *instationäre* Version der quasilinearen elliptischen Gleichung (1.23). Für deren Behandlung haben wir den Operator (cf. (1.25))
$$\langle Au, v\rangle_V := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + s\,u\,v\,dx\,, \qquad u,v \in V\,, \tag{2.65}$$
benutzt. In den Lemmata 1.27 und 1.30 haben wir gezeigt, dass der Operator $A\colon V \to V^*$ für $p \ge \frac{2d}{d+2}$ beschränkt, koerziv, stetig und strikt monoton ist. Diese Eigenschaften übertragen sich auf den induzierten Operator $A\colon L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$.

2.66 Lemma. *Sei $p \geq \frac{2d}{d+2}$, $s \geq 0$ und sei $A\colon V \to V^*$ in (2.65) definiert. Dann bildet der induzierte Operator den Raum $X = L^p(I;V)$ in seinen Dualraum $X^* = L^{p'}(I;V^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ab. Weiterhin ist der Operator $A\colon X \to X^*$ beschränkt, stetig, strikt monoton und genügt der Koerzivitätsbedingung*

$$\langle Au, u\rangle_X \geq c_0 \, \|u\|_X^p \,, \qquad u \in X \,, c_0 > 0 \,. \tag{2.67}$$

Beweis. Im Beweis von Lemma 1.27 (cf. (1.29)) haben wir gezeigt, dass der Operator $A\colon V \to V^*$ die Wachstumsbedingung (2.62) erfüllt und in Lemma 1.30 haben wir bewiesen, dass $A\colon V \to V^*$ stetig ist. Somit impliziert Lemma 2.61 dass der induzierte Operator $A\colon X \to X^*$ beschränkt ist. Genau wie im Beispiel im Abschnitt 2.1.1 zeigt man, dass $u \in X$ genau dann gilt, wenn $u, \nabla u \in L^p(I \times \Omega)$. Somit kann man die fehlenden Behauptungen völlig analog zum Beweis von Lemma 1.30 zeigen, allerdings muss man anstatt mit Ω mit $I \times \Omega$ arbeiten. ■

2.68 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und sei $I = (0,T)$ ein endliches Zeitintervall. Sei ferner $p \geq \frac{2d}{d+2}$ und $s \geq 0$. Dann gibt es für alle $u_0 \in H$ und alle $f \in L^{p'}(I \times \Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, eine Lösung $u \in W$ des Problems (2.64), wobei W in (2.44) definiert ist.*

Beweis. Offensichtlich ist (V, H, V^*) für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ ein Gelfand–Tripel und V ein separabler, reflexiver Banachraum. Sei $A\colon V \to V^*$ der in (2.65) definierte Operator. Aufgrund von Lemma 2.66 ist der induzierte Operator $A\colon X \to X^*$ beschränkt, stetig, strikt monoton und genügt der Koerzivitätsbedingung (2.67). Lemma 2.6 (i) impliziert somit, dass $A\colon X \to X^*$ auch pseudomonoton ist. Analog zum Schritt 2 im Beweis von Lemma 1.27 zeigt man, dass durch

$$\langle b, v\rangle_X := \int\limits_I \int\limits_\Omega f\, v \, dx\, dt$$

ein Funktional $b \in X^*$ definiert wird. Satz 2.50 liefert somit die Existenz einer Lösung $u \in W$ des Problems (2.64). ■

$s > 0$ Modifikation von wachstum, koerzivitaet als Bemerkung

Bei der Behandlung des Problems (2.64), das die instationäre Version von Gleichung 1.23 ist, haben wir nicht das ganze Potential des Satzes 2.50 ausgenutzt, da der zugehörige Operator $A\colon X \to X^*$ nicht nur pseudomonoton ist, sondern sogar strikt monoton. Aus Abschnitt 3.2.2 wissen wir, dass die zur Gleichung (2.13) gehörigen Operatoren im Allgemeinen nur pseudomonoton sind. Deshalb wollen wir nun die instationäre Version dieser Gleichung betrachten:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + g(u) &= f && \text{in } I \times \Omega \,, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega \,, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega \,, \end{aligned} \tag{2.69}$$

wobei f eine gegebene rechte Seite ist, u_0 ein gegebener Anfangswert und die Funktion g die Bedingungen (2.18) und (2.23) erfüllt. Sei $I = (0, T)$ ein endliches Zeitintervall und sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$. Wir setzen wiederum $V := W_0^{1,p}(\Omega), H := L^2(\Omega)$ und $X := L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$, wobei wir V mit der äquivalenten Norm $\|\nabla u\|_p$ versehen (cf. (A.12.27)). Genau wie beim Problem (2.13) beschränken wir uns auf den Fall $p < d$, um die Darstellung einfacher zu halten. In Analogie zur quasilinearen elliptischen Gleichung (2.13) definieren wir für alle $u, v \in X$:

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v\rangle_X &:= \int\limits_I \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \,, \\ \langle A_2 u, v\rangle_X &:= \int\limits_I \int\limits_\Omega g(u)\, v \, dx \, dt \,. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Aus den obigen Betrachtungen wissen wir, dass der Operator A_1 der induzierte Operator zum Operator A aus (2.65) ($s = 0$) ist. In Lemma 2.66 haben wir gezeigt, dass sich alle Eigenschaften des Operators $A \colon V \to V^*$ aus (2.65) (cf. Lemmata 1.27, 1.30) auf den Operator $A_1 \colon X \to X^*$ übertragen. Insbesondere ist der Operator $A_1 \colon X \to X^*$ beschränkt, stetig, strikt monoton und genügt der Koerzivitätsbedingung (2.67). Analog ist der Operator A_2 in $(2.70)_2$ der induzierte Operator zum Operator $A_2 \colon V \to V^*$ aus (2.15). Wir wissen aus Lemma 2.17, dass der Operator $A_2 \colon V \to V^*$ beschränkt und stark stetig ist, falls $r < \frac{dp}{d-p}$. Die Frage ist nun, ob sich auch diese Eigenschaften auf den induzierten Operator übertragen, d.h. ob der Operator A_2 definiert in $(2.70)_2$ den Raum $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ in seinen Dualraum $X^* = (L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)))^* = L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ abbildet, und dort beschränkt und stark stetig ist.

Im Beweis von Lemma 2.17 wurde für den Nachweis der starken Stetigkeit von A_2 die *kompakte* Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q < \frac{dp}{d-p}$, benutzt (cf. Satz A.12.25). Im Allgemeinen gilt allerdings *nicht*, dass die Einbettung

$$X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^p(I; L^q(\Omega)) \,,$$

mit $q < \frac{dp}{d-p}$, kompakt ist. Dies sieht man sofort, wenn man eine Folge $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ betrachtet, die schwach in $L^p(I)$ gegen ein $f \in L^p(I)$ konvergiert, für die aber nicht $f_n \to f$ stark in $L^p(I)\,(n \to \infty)$ gilt. Für ein beliebiges, aber festes, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ kann dann die Folge

$$u_n(t,x) = f_n(t) v(x) \ \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$$

nicht stark in $L^p(I; L^q(\Omega))$ konvergieren. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^p_{L^p(I;L^q(\Omega))} &= \int\limits_0^T \bigg(\int\limits_\Omega |f_n(t) - f(t)|^q \, |v(x)|^q \, dx \bigg)^{\frac{p}{q}} dt \\ &= \|v\|^p_{L^q(\Omega)} \, \|f_n - f\|^p_{L^p(I)} \end{aligned}$$

und somit konvergiert $u_n \to u$ in $L^p(I; L^q(\Omega))$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $f_n \to f$ in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$.

Also kann man Satz 2.50 nicht auf die Gleichung (2.69) anwenden, da $A_2 \colon X \to X^*$ nicht stark stetig sein kann und somit $A_1 + A_2 \colon X \to X^*$ nicht pseudomonoton ist. Wenn man allerdings noch zusätzliche Informationen über die verallgemeinerte Zeitableitung einer Funktion $u \in X$ hat, kann man zeigen, dass die Einbettung nach $L^p(I; L^q(\Omega))$ für $q < \frac{dp}{d-p}$ kompakt ist (cf. Folgerung 2.85). Desweiteren werden wir für den Raum

$$W = \Big\{ u \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}\big(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big) \Big\} \tag{2.71}$$

eine kompakte Einbettung nach $L^q(I \times \Omega)$ mit geeignetem q beweisen (cf. Folgerung 2.94). Mithilfe dieser Einbettung kann man dann zeigen, dass der Operator A_2 eingeschränkt auf den Raum W stark stetig ist und somit $A_1 + A_2 \colon W \to W^*$ pseudomonoton ist. Allerdings können wir auch aufgrund dieser neuen Informationen Satz 2.50 nicht anwenden, da wir im Unterraum W von X, versehen mit einer anderen Topologie, arbeiten müssten, und diese Situation in Satz 2.50 nicht behandelt wird. Es wird sich aber zeigen, dass wir die Beweisideen von Satz 2.50 entsprechend adaptieren können.

Um die obige Einbettung zu beweisen, betrachten wir zunächst folgende allgemeine Situation: Seien B, B_0, B_1 Banachräume, wobei B_0 und B_1 reflexiv sind und folgende Einbettungen gelten:

$$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1\,, \tag{2.72}$$

d.h. insbesondere bettet B_0 kompakt in B ein. Wir bezeichnen

$$W_0 := \Big\{ u \in L^{p_0}(I; B_0) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(I; B_1) \Big\}\,,$$

mit $1 < p_0, p_1 < \infty$, und versehen W_0 mit der Norm

$$\|u\|_{W_0} := \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)}\,.$$

Offensichtlich ist W_0 ein reflexiver Banachraum und es gilt:

$$W_0 \hookrightarrow L^{p_0}(I; B)\,. \tag{2.73}$$

Allerdings kann man folgende stärkere Einbettung beweisen:

2.74 Lemma (Aubin 1963, Lions 1969). *Unter den Voraussetzungen (2.72) und $1 < p_0, p_1 < \infty$ ist die Einbettung (2.73) kompakt, d.h.*

$$W_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(I; B)\,.$$

Bevor wir dies beweisen, benötigen wir noch folgendes Resultat:

2.75 Lemma. *Unter den Voraussetzungen (2.72) gibt es für alle $\eta > 0$ eine Konstante $d(\eta)$, so dass für alle $v \in B_0$ gilt:*

$$\|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} + d(\eta)\|v\|_{B_1} \,. \tag{2.76}$$

Beweis. Falls (2.76) nicht gilt, gibt es ein $\eta > 0$ und Folgen $(v_n) \subset B_0$ und $(d_n) \subset \mathbb{R}^+, d_n \to \infty \, (n \to \infty)$, so dass

$$\|v_n\|_B > \eta \|v_n\|_{B_0} + d_n \|v_n\|_{B_1} \,.$$

Wir setzen $w_n = v_n / \|v_n\|_{B_0}$ und erhalten

$$\|w_n\|_B > \eta + d_n \|w_n\|_{B_1} \,. \tag{2.77}$$

Aufgrund der Einbettung (2.72) und der Definition von w_n gilt:

$$\|w_n\|_B \le c\,\|w_n\|_{B_0} = c\,,$$

und somit folgt aus (2.77) und $d_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, dass

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0 \qquad (n \to \infty)\,. \tag{2.78}$$

Allerdings gilt nach Konstruktion: $\|w_n\|_{B_0} = 1$. Somit folgt aus der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$, dass es eine Teilfolge (w_{n_k}) gibt, so dass

$$w_{n_k} \to w \ \text{ in } B \qquad (k \to \infty)\,.$$

Aus der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ ergibt sich sofort

$$w_{n_k} \to w \ \text{ in } B_1 \qquad (k \to \infty)\,,$$

was zusammen mit (2.78) $w = 0$ liefert. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass gilt:

$$\|w_{n_k}\|_B \to 0 \qquad (k \to \infty)\,,$$

was ein Widerspruch zu (2.77) ist, da $\eta > 0$. ■

Beweis (Lemma 2.74). Sei (v_n) eine beschränkte Folge in W_0. Da W_0 reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}), für die gilt:

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \ \text{ in } W_0 \qquad (k \to \infty)\,.$$

Wenn wir zur Folge $u_k = v_{n_k} - v$ übergehen, erhalten wir also

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup 0 && \text{in } W_0 \qquad (n \to \infty)\,,\\ &\|u_n\|_{W_0} \le c && \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Aufgrund von Lemma 2.75 gibt es für alle $\eta > 0$ ein $d(\eta)$ mit

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \eta\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + d(\eta)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)}\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus dieser Ungleichung mit $\eta = \frac{\varepsilon}{2c}$ und $(2.79)_2$ erhalten wir

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \frac{\varepsilon}{2} + d(\varepsilon)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)}\,.$$

Um den Satz zu beweisen, reicht es also zu zeigen, dass

$$u_n \to 0 \qquad \text{in } L^{p_0}(I;B_1) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{2.80}$$

Für $p := \min(p_0, p_1)$ folgt aus der Definition von W_0 und der Einbettung $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ (cf. Satz A.12.24, Satz A.12.6) sofort

$$W_0 \hookrightarrow W^{1,p}(I;B_1) \hookrightarrow C(\bar{I};B_1)\,.$$

Aus dieser Einbettung und $(2.79)_2$ erhalten wir weiter, dass für alle $t \in I$ gilt:

$$\|u_n(t)\|_{B_1} \le c\,. \tag{2.81}$$

Wir definieren für $0 < \lambda < 1$ fest, aber beliebig,

$$w_n(t) := u_n(\lambda t)$$

und erhalten unter Benutzung von $(2.79)_2$

$$\begin{aligned} w_n(0) &= u_n(0)\,, \\ \|w_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p_0}}}\|u_n\|_{L^{p_0}(0,\lambda T;B_0)} \le c\,\lambda^{-\frac{1}{p_0}}\,, \\ \Big\|\frac{d}{dt}w_n\Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)} &= \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{p_1}}}\Big\|\frac{d}{dt}u_n\Big\|_{L^{p_1}(0,\lambda T;B_1)} \le c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}}\,. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Sei $\varphi \in C^1(I)$ derart, dass $\varphi(T) = 0\,, \varphi(0) = -1$. Dann gilt:

$$w_n(0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\big(w_n(t)\varphi(t)\big)\,dt = \int_0^T \varphi(t)\,\frac{dw_n(t)}{dt}\,dt + \int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt}\,w_n(t)\,dt\,,$$

was zusammen mit $(2.82)_3$ liefert

$$\begin{aligned} \|w_n(0)\|_{B_1} &\le c(\varphi)\,\Big\|\frac{dw_n}{dt}\Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)} + \Big\|\int_0^T \frac{d\varphi}{dt}w_n\,dt\Big\|_{B_1} \\ &\le c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} + \Big\|\int_0^T \frac{d\varphi}{dt}w_n\,dt\Big\|_{B_1}\,. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Da $p_1 > 1$ ist, können wir $\lambda \in (0,1)$ derart wählen, dass

$$c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.84}$$

gilt. Aufgrund von $(2.82)_2$ haben wir $w_n \in L^{p_0}(I;B_0) \hookrightarrow L^1(I;B_0)$, und erhalten somit mithilfe von (2.1.17), dass für alle $g \in B_0^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \Big\langle g, \int_0^T w_n\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt\Big\rangle_{B_0} &= \int_0^T \langle g, w_n\rangle_{B_0}\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt \\ &= \int_0^{\lambda T} \Big\langle g\,\frac{d\varphi}{ds}\big(\frac{s}{\lambda}\big), u_n(s)\Big\rangle_{B_0}\,ds \to 0 \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

da $\frac{d\varphi}{ds}\, g \in L^{p_0'}(0, \lambda T; B_0^*)$ und $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^{p_0}(0, \lambda T; B_0)$ $(n \to \infty)$, aufgrund von (2.79). Also haben wir gezeigt, dass

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\, dt \rightharpoonup 0 \;\text{ in } B_0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

was aufgrund der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$ impliziert

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\, dt \to 0 \;\text{ in } B \qquad (n \to \infty)\,.$$

Dies zusammen mit (2.83), (2.84) und $B \hookrightarrow B_1$ ergibt, da ε beliebig war,

$$u_n(0) = w_n(0) \to 0 \;\text{ in } B_1 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Sei nun $s \in I$ beliebig. Ein völlig analoges Vorgehen mit w_n ersetzt durch

$$\widetilde{w}_n(t) = u_n(s + \lambda t)\,,$$

liefert sofort für alle $s \in I$

$$u_n(s) \to 0 \;\text{ in } B_1 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Dies zusammen mit (2.81) und dem Satz über majorisierte Konvergenz (cf. Satz A.11.10), angewendet auf die reelle Funktionenfolge $\big(\|\mathbf{u}_n(\cdot)\|_{B_1}^{p_0}\big)$, liefert (2.80) und der Satz ist bewiesen. ∎

Wenn man Lemma 2.74 auf die Situation von Problem (2.69) anwendet erhält man folgende

2.85 Folgerung. *Sei $1 \le p < d$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,, d \ge 2$, ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und sei B_1 ein reflexiver Banachraum mit $L^2(\Omega) \hookrightarrow B_1$. Dann bettet der Raum*

$$W_0 := \Big\{ u \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(I; B_1) \Big\}\,,$$

mit $1 < p_1 < \infty$, kompakt nach $L^p(I; L^q(\Omega))$ ein, falls

$$1 \le q < \frac{pd}{d-p}\,,$$

d.h.

$$W_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I; L^q(\Omega))\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz A.12.24 ist die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \le q < \frac{pd}{d-p}$ kompakt und somit folgt die Behauptung sofort aus Lemma 2.74. ∎

Um eine „optimale“ kompakte Einbettung für den Raum W, definiert in (2.71), zu erhalten, benötigen wir ein „parabolisches“ Interpolationsresultat.

2.86 Lemma. *Sei $1 \leq p < d$, $q > 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Für alle Funktionen $u \in L^p(I; L^q(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega))$ gilt:*

$$\int_I \|u(t)\|_{L^\beta}^\alpha \, dt \leq \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{\alpha-p}{2}} \int_I \|u(t)\|_{L^q}^p \, dt \,, \tag{2.87}$$

wobei $\beta \in (2, q)$ und $\alpha \in (p, \infty)$ der Bedingung

$$\frac{q}{\beta} + \frac{p}{\alpha} \Big(\frac{q}{2} - 1 \Big) = \frac{q}{2} \tag{2.88}$$

genügen.

Beweis. Mithilfe des Interpolationssatzes A.12.12 erhalten wir

$$\|u\|_{L^\beta} \leq \|u\|_{L^q}^\lambda \|u\|_{L^2}^{1-\lambda} \,, \tag{2.89}$$

mit $\frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{2}$. Die Forderung

$$\alpha\lambda = p$$

liefert nach Integration von (2.89) zur Potenz α über das Zeitintervall I sofort (2.87) und (2.88). ■

Bemerkungen. (i) Aufgrund der Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q = \frac{pd}{d-p}$ erhält man aus Lemma 2.86 im Falle $\alpha = \beta$

$$\int_I \|u(t)\|_{L^\alpha}^\alpha \, dt \leq c \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{p}{d}} \int_I \|\nabla u(t)\|_{L^p}^p \, dt \,, \tag{2.90}$$

und

$$\alpha = \frac{d+2}{d} \, p \,. \tag{2.91}$$

(ii) In Lemma 2.45 haben wir die Einbettung $W \hookrightarrow C(\overline{I}; H)$ bewiesen, d.h. es gilt:

$$\sup_{t \in \overline{I}} \|u(t)\|_H \leq c \, \|u\|_W \,. \tag{2.92}$$

Demzufolge gilt (2.90) für alle u aus dem Raum W, der in (2.71) mithilfe des Gelfand–Tripels $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ definiert wurde. Insbesondere kann man (2.90) für alle $u \in W$ schreiben als

$$\|u\|_{L^q(I \times \Omega)} \leq c \, \|u\|_W \,, \qquad q = p \, \frac{d+2}{d} \,. \tag{2.93}$$

2.94 Folgerung. *Sei* $\frac{2d}{d+2} < p < d$ *und* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, *ein beschränktes Gebiet mit Rand* $\partial\Omega \in C^{0,1}$ *und sei der Raum* W *in* (2.71) *mithilfe des Gelfand–Tripels* $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ *definiert. Dann ist die Einbettung*

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I \times \Omega)$$

kompakt falls

$$1 \leq q < p\,\frac{d+2}{d}\,.$$

Beweis. Das Gelfand–Tripel $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ erfüllt die Voraussetzungen von Folgerung 2.85, die

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I; L^s(\Omega))\,, \tag{2.95}$$

mit $1 \leq s < \frac{dp}{d-p}$, liefert. Sei nun O.B.d.A. $(u_n) \subseteq W$ eine beschränkte, schwach konvergente Folge. Aufgrund von (2.95) gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \to u \ \text{ in } L^p(I; L^s(\Omega)) \quad (k \to \infty)\,. \tag{2.96}$$

Aus (2.90), (2.92), (2.96) und der Beschränkheit von (u_n) in W folgt also

$$\begin{aligned}\int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^q}^q\,dt &\leq c\,\|u_{n_k} - u\|_W^{\frac{p}{d}} \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^s}^p\,dt \\ &\leq c \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^s}^p\,dt \ \to 0 \quad (k \to \infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $u_{n_k} \to u$ in $L^q(I \times \Omega)$ $(k \to \infty)$, falls $q < p\,\frac{d+2}{d}$. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um den Operator A_2 zu betrachten (cf. Lemma 2.17).

2.97 Lemma. *Sei* $\frac{2d}{d+2} < p < d$, $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ *und genüge die stetige Funktion* g *der Bedingung* (2.18), *d.h.* g *besitzt* $(r-1)$*–Wachstum.*

(i) *Wenn* $1 \leq r \leq p\,\frac{d+2}{d}$ *gilt, dann bildet der Operator* A_2, *definiert in* $(2.70)_2$, *den Raum* $X \cap L^\infty(I; L^2(\Omega))$ *nach* X^* *ab und ist beschränkt.*

(ii) *Für* $1 \leq r < p\,\frac{d+2}{d}$ *ist* $A_2 \colon W \to W^*$ *beschränkt und stark stetig, wobei der Raum* W *in* (2.71) *definiert ist.*

(iii) *Für* $1 \leq r < \infty$ *ist* $A_2 \colon L^r(I \times \Omega) \to L^{r'}(I \times \Omega)$ *stetig.*

Beweis. ad (i): Setze $r_0 := p\,\frac{d+2}{d}$. Aufgrund der Wachstumsbedingung (2.18) und $r \leq r_0$ gilt für alle $u \in X \cap L^\infty(I; L^2(\Omega))$, $v \in X$

$$
\begin{aligned}
|\langle A_2 u, v\rangle| &\le c \int\limits_I \int\limits_\Omega (1+|u|)^{r_0-1}|v|\,dx\,dt \\
&\le c \int\limits_I \Big(1 + \|u(t)\|^{r_0-1}_{L^{\frac{(r_0-1)pd}{d(p-1)+p}}}\Big)\,\|\nabla v(t)\|_{L^p}\,dt \\
&\le c \Big(1 + \int\limits_I \|u(t)\|^{(r_0-1)p'}_{L^{\frac{(r_0-1)pd}{d(p-1)+p}}}\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int\limits_I \|\nabla v(t)\|^p_{L^p}\,dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le c\,\Big(1 + \|u\|^{r_0-1}_{L^{(r_0-1)p'}(I;L^{\frac{(r_0-1)pd}{d(p-1)+p}}(\Omega))}\Big)\,\|v\|_X\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Hölder–Ungleichung mit $\frac{dp}{d(p-1)+p}, \frac{dp}{d-p}$ und die Einbettung $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$ für v benutzt haben. Man rechnet leicht nach, dass $\alpha = (r_0-1)\,p'$ und $\beta = \frac{(r_0-1)pd}{d(p-1)+p}$ die Bedingung (2.88) für $q = \frac{dp}{d-p}$ erfüllen. Somit erhalten wir aufgrund von (2.87) und $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$, dass $A_2 : X \cap L^\infty(I;L^2(\Omega)) \to X^*$ beschränkt ist.

ad (ii): In Lemma 2.45 haben wir die Einbettung $W \hookrightarrow C(\overline{I};L^2(\Omega))$ bewiesen. Somit folgt aus (i) und $X^* \hookrightarrow W^*$, dass $A_2 \colon W \to W^*$ beschränkt ist. Um zu zeigen, dass A_2 stark stetig ist, sei $(u_n) \subseteq W$ eine schwach konvergente Folge. Aufgrund von Folgerung 2.94 gibt es eine Teilfolge mit

$$
u_{n_k} \to u \ \text{ in } L^q(I\times\Omega) \qquad (k\to\infty)\,,
$$

wobei $q < p\,\frac{d+2}{d}$. Wir setzen (cf. Beweis von Lemma 2.17, Teil 2)

$$
F(u) = g(u)
$$

und erhalten aus Lemma 1.20, dass der Nemyckii–Operator

$$
F : L^q(I\times\Omega) \to L^{q'}(I\times\Omega)
$$

stetig ist, d.h.

$$
\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{q'}(I\times\Omega)} \to 0 \qquad (k\to\infty)\,.
$$

Daraus, aus der Einbettung $W \hookrightarrow L^q(I\times\Omega)$ und aus der Definition der Norm in W^* erhalten wir sofort

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi\in W\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in W\\ \|\varphi\|\le 1}} \int\limits_I \int\limits_\Omega |g(u_{n_k}) - g(u)||\varphi|\,dx\,dt \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in W\\ \|\varphi\|\le 1}} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{q'}(I\times\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(I\times\Omega)} \\
&\le c\,\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{q'}} \to 0 \quad (k\to\infty)\,,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$A_2 u_{n_k} \to A_2 u \ \text{ in } W^* \qquad (k \to \infty)\,.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iv) liefert, dass $A_2 : W \to W^*$ stark stetig ist.

ad (iii): Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^r(I\times\Omega)$ $(n\to\infty)$. Genau wie in (ii) folgt, dass der Nemyckii–Operator $F : L^r(I\times\Omega) \to L^{r'}(I\times\Omega)$ stetig ist. Wiederum genau wie in (ii) folgt nun, dass $A_2 u_n \to A_2 u$ in $L^{r'}(I\times\Omega)$. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um Problem (2.69) zu behandeln.

2.98 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$, sei $I = [0,T]$ ein endliches Zeitintervall und sei der Raum W in (2.71) mithilfe des Gelfand–Tripels $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ definiert. Sei ferner $\frac{2d}{d+2} < p < d$ und die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen (2.18) und (2.23) mit $1 \le r < r_0 := p\,\frac{d+2}{d}$. Dann gibt es für alle $f \in L^{p'}(I\times\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, eine Lösung $u \in W$ des Problems (2.69), d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(I\times\Omega)$ gilt:*

$$\begin{aligned}\int_I \Big\langle \frac{du(t)}{dt}, \varphi(t)\Big\rangle_{W_0^{1,p}} dt &+ \int_I\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)\cdot\nabla\varphi(t)\,dx\,dt \\ &+ \int_I\int_\Omega g(u(t))\,\varphi(t)\,dx\,dt = \int_I\int_\Omega f(t)\,\varphi(t)\,dx\,dt\,.\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis des Satzes folgt im Wesentlichen dem Beweis von Satz 2.50, wobei wir allerdings einige Argumente modifizieren müssen um den Operator A_2 zu behandeln. Wir wollen wiederum das *Galerkin Verfahren* benutzen. Allerdings benötigen wir eine spezielle Basis des Raumes $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1. Spezielle Basis: Wir wählen $s \in \mathbb{N}$ so, dass $W_0^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,d}(\Omega)$ gilt, d.h. $s \ge \frac{d}{2}$ (cf. Satz A.12.24 (i)), und betrachten den Operator $B\colon W_0^{s,2}(\Omega) \to (W_0^{s,2}(\Omega))^*$ definiert durch

$$\langle Bu, \varphi\rangle_{W_0^{s,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le s}\int_\Omega \partial^\alpha u\,\partial^\alpha\varphi\,dx\,, \qquad \forall u,\varphi \in W_0^{s,2}(\Omega)\,.$$

Man beachte, dass die rechte Seite in dieser Definition auch das Skalarprodukt von u und φ in $W^{s,2}(\Omega)$ ist, welches wir mit $(u,\varphi)_{W^{s,2}}$ bezeichnen. Die Eigenvektoren des Operators B werden die gesuchte Basis bilden. Diese erhalten wir mithilfe des Satzes A.10.4. Aus dem Lemma von Lax–Milgram (cf. Lemma A.10.5) folgt, wie im Falle des Dirichlet Problems für die Laplace Gleichung (cf. Beweis von Satz 1.2.56), dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{s,2}(\Omega)$ des Problems $Bu = f$ existiert, d.h.

$$\sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega \partial^\alpha u \, \partial^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx \,. \tag{2.99}$$

Demzufolge können wir den inversen Operator

$$B^{-1} \colon L^2(\Omega) \to W_0^{s,2}(\Omega) \colon f \mapsto u \tag{2.100}$$

definieren. Aufgrund der kompakten Einbettung $W_0^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (cf. Satz A.12.25) ist dieser Operator aufgefasst als $B^{-1} \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt. Sei $g \in L^2(\Omega)$ und sei $v \in W_0^{s,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des Problems $Bv = g$. Wenn man nun $\varphi = B^{-1} g$ in (2.99) wählt und benutzt dass $B^{-1} f = u$ ist, erhält man aufgrund der Symmetrie der linken Seite in (2.99) und entsprechender Argumente für die Gleichung für $Bv = g$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f \, B^{-1} g \, dx &= \sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega \partial^\alpha B^{-1} f \, \partial^\alpha B^{-1} g \, dx \\
&= \sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega \partial^\alpha B^{-1} g \, \partial^\alpha B^{-1} f \, dx \\
&= \int_\Omega g \, B^{-1} f \, dx = \int_\Omega B^{-1} f \, g \, dx \,,
\end{aligned}$$

d.h. der Operator B^{-1} ist selbstadjungiert. Weiterhin ist der Operator B^{-1} injektiv, da aus $B^{-1} f = 0$ folgt, dass

$$\int_\Omega f \, \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt und demzufolge $f = 0$, d.h. $\operatorname{Ker}(B^{-1}) = \{0\}$ und positiv semidefinit, da (wähle in (2.99) $\varphi = B^{-1} f$)

$$\int_\Omega f \, B^{-1} f \, dx = \sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega \partial^\alpha B^{-1} f \, \partial^\alpha B^{-1} f \, dx = \|B^{-1} f\|^2_{W_0^{s,2}(\Omega)} \ge 0 \,.$$

Satz A.10.4 liefert nun, dass es eine Orthonormalbasis $\{w_k \,\big|\, k \in \mathbb{N}\}$ von $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenvektoren von B^{-1} gibt, d.h.

$$B^{-1} w_k = \lambda_k w_k \,, \qquad k \in \mathbb{N} \,. \tag{2.101}$$

Insbesondere gilt für die Eigenwerte $\lambda_k \in \big(0, \|B^{-1}\|_{L(L^2(\Omega)),L^2(\Omega))}\big]$, dass $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und aufgrund von (2.100) erhalten wir $(w_k) \subset W_0^{s,2}(\Omega)$. Aus (2.101) folgt sofort, dass (w_k) auch Eigenvektoren des Operators B sind, d.h.

$$B w_k = \mu_k w_k \,, \qquad k \in \mathbb{N} \,, \tag{2.102}$$

wobei für die zugehörigen Eigenwerte $0 < \mu_k := \lambda_k^{-1}$ gilt $\mu_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Die Eigenvektoren (w_k) bilden auch eine Basis von $W_0^{s,2}(\Omega)$. In der Tat, falls $X := \overline{\operatorname{span}(w_k \,|\, k \in \mathbb{N})}^{W_0^{s,2}(\Omega)} \neq W_0^{s,2}(\Omega)$ ist, dann existiert ein Element $\psi \in W_0^{s,2}(\Omega) \setminus X$ mit $\|\psi\|_{W_0^{s,2}(\Omega)} = 1$ und

$$0 = \langle w_k, \psi \rangle_{W_0^{s,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le s} \int_\Omega \partial^\alpha w_k \, \partial^\alpha \psi \, dx = \mu_k \int_\Omega w_k \, \psi \, dx \,, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,.$$

Da (w_k) eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ ist folgt daraus $\psi = 0$, was ein Widerspruch ist. Somit bilden (w_k) eine Orthogonalbasis des $W_0^{s,2}(\Omega)$, d.h. für alle $k, j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(w_k, w_j)_{W^{s,2}} = \delta_{kj} \sqrt{\mu_k} \sqrt{\mu_j} \,, \qquad \text{(keine Summation über } k, j) \,. \tag{2.103}$$

2. Projektion P_n: Wir setzen $H_n := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ und definieren die Orthogonalprojektionen $P_n \colon L^2(\Omega) \to H_n$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$P_n(v) := \sum_{k=1}^n (v, w_k)_{L^2} w_k \,.$$

Für $v \in W_0^{s,2}(\Omega)$ erhalten wir aufgrund der Eigenschaften von (w_k) (cf. (2.102), (2.103))

$$\begin{aligned} \|P_n(v)\|_{W^{s,2}}^2 &= \sum_{k=1}^n (v, w_k)_{L^2}^2 (w_k, w_k)_{W^{s,2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(v, w_k)_{W^{s,2}}^2}{\mu_k^2} (w_k, w_k)_{W^{s,2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \Big(v, \frac{w_k}{\sqrt{\mu_k}} \Big)_{W^{s,2}}^2 \Big(\frac{w_k}{\sqrt{\mu_k}}, \frac{w_k}{\sqrt{\mu_k}} \Big)_{W^{s,2}} \\ &\le \|v\|_{W^{s,2}}^2 \,, \end{aligned} \tag{2.104}$$

und für $v \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\|P_n(v)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^n (v, w_k)_{L^2}^2 (w_k, w_k)_{L^2} \le \|v\|_{L^2}^2 \,, \tag{2.105}$$

aufgrund der Orthonormalität von (w_k) in $L^2(\Omega)$. Somit sind die Projektionen P_n sowohl als Operatoren aus $L(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ als auch als Operatoren aus $L(W_0^{s,2}(\Omega), W_0^{s,2}(\Omega))$ gleichmäßig durch 1 beschränkt.

3. Galerkin–Approximation und apriori Abschätzungen: Zuerst soll an die Bezeichnungen $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $X = L^p(I; V)$ sowie

$$\langle A_1 u, v\rangle_X = \int_I \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \,,$$
$$\langle A_2 u, v\rangle_X = \int_I \int_\Omega g(u) \, v \, dx \, dt \,,$$
$$\langle b, v\rangle_X = \int_I \int_\Omega f \, v \, dx \, dt$$

erinnert werden. Wir suchen *approximative Lösungen* u_n des Problems (2.69) in der Form

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k^n(t) \, w_k \,,$$

die für alle $t \in I$ das *Galerkin–System*

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{du_n(t)}{dt}, w_k \Big\rangle_V + \big\langle A_1 u_n(t) + A_2 u_n(t), w_k \big\rangle_V &= \langle b_n(t), w_k\rangle_V \,, \quad k = 1, \dots, n \,, \\ u_n(0) &= u_0^n \end{aligned} \tag{2.106}$$

lösen. Hierbei ist $b_n \in C(\overline{I}; V^*)$ eine Folge, die stark in $X^* = L^{p'}(I; V^*)$ gegen $b \in X^*$ konvergiert (cf. Lemma 2.1.24 (ii)) und $u_0^n = \sum_{i=1}^n c_{0i}^n w_i \in H_n$ eine Folge, die stark in H gegen $u_0 \in H$ konvergiert. Die Lösbarkeit von (2.106) zeigt man genau wie die Lösbarkeit von (2.52). Dazu schreibt man das Galerkin–System (2.106) als System gewöhnlicher Differentialgleichungen für Funktionen $t \mapsto \mathbf{c}^n(t) = (c_1^n(t), \dots, c_n^n(t)) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}^n(t)}{dt} &= \mathbf{f}^n(t, \mathbf{c}^n(t)) \,, \\ \mathbf{c}^n(0) &= \mathbf{c}_0^n \,, \end{aligned} \tag{2.107}$$

mit $f_k^n(t, \mathbf{c}) := \langle b_n(t), w_k\rangle - \big\langle A_1\big(\sum_{l=1}^n c_l \, w_l\big), w_k\big\rangle - \langle A_2\big(\sum_{l=1}^n c_l \, w_l\big), w_k\big\rangle$, $k = 1, \dots, n$, und $\mathbf{c}_0^n = (c_{01}^n, \dots, c_{0n}^n)$. Die Operatoren $A_1, A_2 \colon V \to V^*$ sind aufgrund von der Lemmata 1.27, 1.30 und 2.17 demistetig, da für $p \ge \frac{2d}{d+2}$ gilt $p\frac{d+2}{d} \le \frac{dp}{d-p}$. Dies und $b^n \in C(\overline{I}; V^*)$ impliziert, dass $\mathbf{f}^n \colon \overline{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, da in endlich–dimensionalen Räumen starke und schwache Konvergenz übereinstimmen (cf. Lemma A.8.8). Um die *globale* Lösbarkeit von (2.106) bzw. (2.107) für $t \in I$ zu zeigen, benötigen wir folgende *apriori Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{C(\overline{I}; H)}^2 + \|u_n\|_X^p &\le c\,(b, u_0, T) \,, \\ \|A_1 u_n\|_{X^*} + \|A_2 u_n\|_{X^*} &\le c\,(b, u_0, T) \,, \end{aligned} \tag{2.108}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $c(b, u_0)$. Sei $u_n \in C^1(\overline{I}; H_n) \subset W$ eine Lösung von (2.106). Wenn wir die k–te Gleichung in (2.106) mit $c_k^n(t)$

multiplizieren, die Gleichungen dann addieren und das Resultat über $(0,t)$, $0 < t \le T$ integrieren, erhalten wir mithilfe von (2.47), sowie (2.24), (2.25) (cf. (2.55))

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_n(s)\|_V^p\,ds \le \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \|b_n(s)\|_{V^*}^{p'}\,ds + c_0\,T\,.$$

Aus $u_0^n \to u_0$ in H $(n\to\infty)$ und $b_n \to b$ in X^* $(n\to\infty)$ folgt nun $(2.108)_1$. Da aufgrund der Lemmata 2.66 und 2.97 die Operatoren $A_1\colon X \to X^*$ und $A_2\colon X \cap L^\infty(I;H) \to X^*$ beschränkt sind, folgt aus $(2.108)_1$ sofort $(2.108)_2$. Mit denselben Argumenten wie in Beweis von Satz 2.50 kann man nun schließen, dass das Galerkin–System (2.106) für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall I lösbar ist und die Lösungen $u_n \in W$ die apriori Abschätzungen (2.108) erfüllen. Zur Behandlung des Operators A_2 benötigen wir noch folgende *apriori Abschätzung* für die Zeitableitungen

$$\left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_{L^q(I;(W_0^{s,2}(\Omega))^*)} \le c\,(b,u_0,T)\,, \tag{2.109}$$

mit $q := \frac{p}{r_0-1}$. Aufgrund der Eigenschaften der Orthogonalprojektionen P_n, insbesondere $P_n \circ P_n = P_n$ und $\big(P_n(u),\varphi\big)_H = \big(u,P_n(\varphi)\big)_H$, $u,\varphi \in H$, sowie $u_n = P_n(u_n)$ erhalten wir für alle $\varphi \in W_0^{s,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \frac{du_n}{dt}\,\varphi\,dx &= \int\limits_\Omega \frac{du_n}{dt}\,P_n(\varphi)\,dx\\ &= \int\limits_\Omega b_n\,P_n(\varphi) - A_1u_n\,P_n(\varphi) - A_2u_n\,P_n(\varphi)\,dx\,,\end{aligned}$$

wobei wir die Galerkin–Gleichungen (2.106) benutzt haben. Die rechte Seite dieser Identität kann aufgrund der Eigenschaften von b_n, der Operatoren A_1, A_2 (cf. Lemmata 1.27, 2.17), sowie der Einbettung $W_0^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}&\big(\|b_n\|_{V^*} + \|A_1u_n\|_{V^*} + \|A_2u_n\|_{V^*}\big)\|P_n(\varphi)\|_V\\ &\le c\,\big(1 + \|b\|_{V^*} + \|u_n\|_V^{p-1} + \|u_n\|_V^{r_0-1}\big)\|P_n(\varphi)\|_{W^{s,2}}\,.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir mithilfe der Eigenschaften der Orthogonalprojektionen P_n (cf. (2.104)), der Definition von q, $p \le r_0$ und der Definition der Norm im Dualraum

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^q(I;(W_0^{s,2}(\Omega))^*)} &= \sup_{\substack{\varphi \in L^{q'}(I;W_0^{s,2}(\Omega)) \\ \|\varphi\|_{L^{q'}(I;W_0^{s,2}(\Omega))} \le 1}} \Big| \int_0^T \int_\Omega \frac{du_n}{dt}\, \varphi \, dx\, dt \Big| \\
&\le c \int_0^T \big(1 + \|b\|_{V^*} + \|u_n\|_V^{r_0 - 1}\big) \|P_n(\varphi)\|_{W^{s,2}}\, dt \\
&\le c\,\big(1 + \|b\|_{L^{p'}(I;V^*)} + \|u_n\|_{L^p(I;V)}^{r_0-1}\big) \|\varphi\|_{L^{q'}(I;W_0^{s,2}(\Omega))} \\
&\le c(b, u_0, T)\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir $(2.108)_1$ benutzt haben.

4. Konvergenz des Galerkin–Verfahrens: Aus den apriori Abschätzungen (2.108), (2.109) und Folgerung 2.85 mit $p_1 = \frac{p}{r_0 - 1}$, $B_1 = (W_0^{s,2}(\Omega))^*$ folgt, dass es eine Teilfolge von (u_n) gibt, die wir wieder mit (u_n) bezeichnen, mit

$$
\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X && (n \to \infty)\,, \\
u_n &\to u && \text{in } L^p(I; L^{\tilde{s}}(\Omega)) && (n \to \infty)\,, \\
A_1 u_n &\rightharpoonup \xi && \text{in } X^* && (n \to \infty)\,, \\
u_n(T) &\rightharpoonup u^* && \text{in } H && (n \to \infty)\,,
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

wobei $1 \le \tilde{s} < \frac{pd}{d-p}$. Aus $(2.108)_1$, $(2.110)_2$ und Lemma 2.86 mit $q = \tilde{s}$, $\alpha = \beta$ folgt nun für $1 \le s < p\frac{d+2}{d}$

$$
\begin{aligned}
u_n &\to u && \text{in } L^s(I \times \Omega) && (n \to \infty)\,, \\
A_2 u_n &\to A_2 u && \text{in } L^{s'}(I \times \Omega) && (n \to \infty)\,,
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

wobei wir für die zweite Behauptung Lemma 2.97 (iii) benutzt haben. Nun können wir wieder im Wesentlichen wie im Beweis von Satz 2.50 vorgehen. Für alle $w \in \bigcup_{k=1}^\infty H_k$ gibt es ein n_0 mit $w \in H_{n_0}$. Da u_n eine Lösung von (2.106) ist, erhalten wir für alle $n \ge n_0$

$$
\Big\langle \frac{du_n(t)}{dt}, w \Big\rangle + \big\langle A_1 u_n(t) + A_2 u_n(t), w \big\rangle = \langle b_n(t), w \rangle\,.
$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit $\varphi \in C^1(\overline{I})$, integrieren bezüglich der Zeit über I und erhalten mithilfe von (2.46) und (2.42)

$$
\begin{aligned}
&- \int_I (u_n(t), w)_H \varphi'(t)\, dt + \int_I \big\langle A_1 u_n(t) + A_2 u_n(t), w \big\rangle_V \varphi(t)\, dt \\
&\quad = \int_I \langle b_n(t), w \rangle_V \varphi(t)\, dt - (u_n(T), w)_H \varphi(T) + (u_0^n, w)_H \varphi(0)\,.
\end{aligned}
$$

Der Grenzübergang $(n \to \infty)$ liefert aufgrund von (2.110), (2.111), sowie $b_n \to b$ in X^* $(n \to \infty)$ und $u_0^n \to u_0$ in H $(n \to \infty)$

$$\begin{aligned} -\int_I (u(t), w)_H \varphi'(t)\, dt + \int_I \big\langle \xi + A_2 u, w \big\rangle_V \varphi(t)\, dt \\ = \int_I \langle b(t), w\rangle_V \varphi(t)\, dt - (u^*, w)_H \varphi(T) + (u_0, w)_H \varphi(0)\,. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Da $\bigcup_{k=1}^\infty H_k$ dicht in $W_0^{s,2}(\Omega)$ liegt und dies wiederum dicht in $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist, gilt (2.57) für alle $w \in V$ und alle $\varphi \in C^1(\overline{I})$. Wenn wir nun $\varphi \in C_0^\infty(I)$ in (2.112) wählen, erhalten wir aufgrund von Definition 2.43 dass gilt:

$$\frac{du}{dt} = b - \xi - A_2 u\,. \tag{2.113}$$

Aufgrund der Voraussetzungen, (2.110), Lemma 2.97 (i) liegt die rechte Seite von (2.113) im Raum X^* und somit ist auch $u \in W$. Aus (2.113) und (2.46) (setze $v(t) = \varphi(t)w$) folgt

$$\begin{aligned} \int_I (u(t), w)_H \varphi'(t) + \big\langle b - \xi - A_2 u, w \big\rangle_V \varphi(t)\, dt \\ = (u(T), w)_H \varphi(T) + (u(0), w)_H \varphi(0)\,, \end{aligned}$$

was zusammen mit (2.112)

$$(u(T), w)_H \varphi(T) + (u(0), w)_H \varphi(0) = (u^*, w)_H \varphi(T) - (u_0, w)_H \varphi(0)$$

liefert. Wenn wir nun φ so wählen, dass $\varphi(T) = 1$ und $\varphi(0) = 0$, bzw. $\varphi(T) = 0$ und $\varphi(0) = 1$ gilt, erhalten wir

$$u(T) = u^*\,, \qquad u(0) = u_0\,. \tag{2.114}$$

Um $A_1 u = \xi$ zu zeigen, benutzen wir die Pseudomonotonie von A_1, die aus den Lemmata 2.66 und 2.6 (i) folgt. Wenn wir die k–te Gleichung in (2.106) mit $c_k^n(t)$ multiplizieren, die Gleichungen dann addieren und das Resultat über I integrieren, erhalten wir mithilfe von (2.47)

$$\int_0^T \big\langle A_1 u_n + A_2 u_n, u_n \big\rangle\, dt = \int_0^T \langle b_n, u_n\rangle\, dt - \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2\,.$$

Hieraus folgern wir mithilfe von $b_n \to b$ in X^* $(n \to \infty)$, (2.110), (2.111), $(2.114)_1$, sowie der Unterhalbstetigkeit der Norm (cf. Lemma A.8.6 (iii)) dass gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle A_1 u_n, u_n \big\rangle \, dt \le \int_0^T \langle b - A_2 u, u\rangle \, dt - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 \,. \tag{2.115}$$

Andererseits gilt aufgrund von (2.47) und (2.113)

$$-\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 = -\int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}, u \Big\rangle \, dt = \int_0^T \big\langle \xi + A_2 u - b, u \big\rangle \, dt \,,$$

was zusammen mit (2.115)

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle A_1 u_n, u_n \big\rangle \, dt \le \int_0^T \langle \xi, u\rangle \, dt$$

ergibt. Da der Operator A_1 pseudomonoton und beschränkt ist, erfüllt er aufgrund von Lemma 2.6 (iv) auch die Bedingung (M), und somit gilt: $A_1 u = \xi$. Dies zusammen mit (2.113) und $(2.114)_2$ impliziert, dass $u \in W$ eine Lösung von (2.69) ist. Der Beweis des Satzes ist vollständig. ∎

3.3 Maximal monotone Operatoren

Die Theorie *maximal monotoner* Operatoren bringt die Grundideen der Theorie monotoner Operatoren zur vollen Entfaltung und ist sehr allgemein. Intuitiv kann man sich unter einem maximal monotonen Operator einen monotonen Operator vorstellen, der *keine echte* monotone Erweiterung besitzt.

Beispiele. 1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton wachsend, z.B. sei

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 & \text{für } x \ge 0\,. \end{cases}$$

Dann ist diese Funktion f maximal monoton.

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend, aber unstetig, z.B. sei

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x \ge 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion f ist monoton, aber *nicht* maximal monoton. Es gibt nämlich eine monotone Erweiterung, z.B.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ [0,2] & \text{für } x = 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Allerdings müssen wir für die maximale Monotonie „bezahlen", denn wir müssen „mehrdeutige Funktionen" oder genauer Abbildungen zulassen. Im Folgenden bezeichnen wir mit 2^Y die *Potenzmenge* einer Menge Y.

3.1 Definition. *Seien M, Y Mengen und sei $A : M \to 2^Y$ eine* ***Abbildung****, d.h. A ordnet allen $u \in M$ eine Teilmenge $Au \subseteq Y$ zu, d.h. $Au \in 2^Y$. Dann ist*

$$D(A) := \{u \in M \,\big|\, Au \neq \emptyset\}$$

der ***effektive Definitionsbereich****, ferner ist*

$$R(A) := \bigcup_{u \in D(A)} Au$$

der ***Wertebereich*** *und*

$$G(A) = \{(u,v) \in M \times Y \,\big|\, u \in D(A), v \in Au\}$$

der ***Graph*** *von A. Wir schreiben für $(u,v) \in G(A)$ einfacher $(u,v) \in A$.*

Bemerkungen. (i) Die *inverse Abbildung* $A^{-1} \colon Y \to 2^M$ existiert *immer* und ist definiert durch

$$A^{-1}(v) = \{u \in M \,\big|\, v \in Au\}\,.$$

Offensichtlich haben wir $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$ und $(u,v) \in A$ genau dann, wenn $(v,u) \in A^{-1}$.

(ii) Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $M \subseteq X$. Für gegebene Abbildungen $A, B \colon M \to 2^Y$ und für feste α, $\beta \in \mathbb{K}$ definieren wir die **Linearkombination**

$$(\alpha A + \beta B)(u) = \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu & \text{für } u \in D(A) \cap D(B)\,, \\ \emptyset & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(iii) Jede eindeutige Abbildung $A \colon D(A) \subseteq M \to Y$ kann mit einer mehrdeutigen Abbildung $\bar{A} \colon M \to 2^Y$ identifiziert werden, indem wir

$$\bar{A}u = \begin{cases} \{Au\} & \text{für } u \in D(A)\,, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen. Dann gilt

$$D(\bar{A}) = D(A) \qquad \text{und} \qquad R(\bar{A}) = R(A)\,.$$

Im Folgenden verwenden wir immer diese Identifizierung und schreiben kürzer A statt $\bar{A}$.

3.2 Definition. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Abbildung $A\colon M \to 2^{X^*}$ heißt*

(i) ***monoton*** *genau dann, wenn für alle $(u, u^*), (v, v^*) \in A$ gilt:*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geq 0\,,$$

(ii) ***maximal monoton*** *genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u, u^*) \in M \times X^*$ sowie*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A$$

folgt, dass $(u, u^*) \in A$.

Bemerkungen. (i) Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ kann mit obiger Identifizierung als mehrdeutige Abbildung $\bar{A}\colon X \to 2^{X^*}$ aufgefasst werden. Die Definition 1.1 der Monotonie des Operators A ist mit der Definition 3.2 der Monotonie der mehrdeutigen Abbildung $\bar{A}$ identisch.

(ii) Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ heißt *maximal monoton* genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u, u^*) \in X \times X^*$ sowie

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle_X \geq 0 \qquad \forall v \in D(A)$$

folgt, dass $u \in D(A)$ und $u^* = Au$ gelten.

Die einfachsten Beispiele maximal monotoner Operatoren erhält man mithilfe reeller Funktionen. Jede monoton wachsende und möglicherweise unstetige Funktion erzeugt offensichtlich einen monotonen Operator. Ferner gilt

3.3 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und stetige Funktion. Dann ist f maximal monoton.*

Beweis. Sei $(u, u^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und es gelte für alle $v \in \mathbb{R}$

$$\big(u^* - f(v)\big)(u - v) \geq 0\,.$$

Es ist zu zeigen, dass $u^* = f(u)$ gilt, denn $u \in \mathbb{R} = D(f)$ wurde ja vorausgesetzt. Für $u > v$ erhalten wir $u^* - f(v) \geq 0$, d.h. $u^* \geq f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, mit einer Folge (u_n), für die gilt: $u_n \nearrow u$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von f impliziert $u^* \geq f(u)$. Für $u < v$ folgt $u^* \leq f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, wobei (u_n) eine Folge ist mit $u_n \searrow u$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von f liefert $u^* \leq f(u)$. Somit gilt sowohl $u^* \geq f(u)$ als auch $u^* \leq f(u)$, d.h. $u^* = f(u)$. ∎

Das zweite Beispiel vor Definition 3.1 zeigt, dass unstetige monoton wachsende Funktionen nicht maximal monoton sein müssen. Eine zu Lemma 3.3 analoge Aussage erhalten wir auch für monotone Operatoren.

3.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein monotoner, hemistetiger Operator. Dann ist A maximal monoton.*

Beweis. Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$ und es gelte für alle $v \in X$

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle \geq 0 \,.$$

Wir setzen $v = u \pm tw$ mit $w \in X$ und $t > 0$. Dann folgt für alle $w \in X$

$$\mp t \langle u^* - A(u \pm tw), w \rangle \geq 0 \,,$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \langle u^* - A(u + tw), w \rangle &\leq 0 \,, \\ \langle u^* - A(u - tw), w \rangle &\geq 0 \,. \end{aligned}$$

Da A hemistetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0^+$, dass für alle $w \in X$ gilt:

$$\langle u^* - Au, w \rangle = 0 \,,$$

d.h. $u^* = Au$. ∎

Bemerkung. Die inverse Abbildung $A^{-1} \colon X^* \to 2^X$ einer maximal monotonen Abbildung $A \colon X \to 2^{X^*}$ auf einem reflexiven Banachraum X ist wieder maximal monoton. In der Tat, da X reflexiv ist, haben wir die Identifizierung $X \cong X^{**}$ und somit kann man A^{-1} auch als Abbildung $A^{-1} \colon X^* \to 2^{X^{**}}$ auffassen. Weiterhin gilt $\langle u^*, u \rangle_X = \langle u, u^* \rangle_{X^*}$ für alle $(u, u^*) \in X \times X^*$ und somit folgt die Behauptung mithilfe der Definition der inversen Abbildung

$$G(A^{-1}) = \{(u^*, u) \in X^* \times X \,\big|\, (u, u^*) \in G(A)\} \,.$$

3.3.1 Subdifferentiale

Ein weiteres Beispiel maximal monotoner Operatoren sind *Subdifferentiale*, die den klassischen Begriff der Ableitung für konvexe Funktionen verallgemeinern.

3.5 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf X. Ein Element $u^* \in X^*$ heißt* ***Subgradient*** *von f an der Stelle $u \in X$ genau dann, wenn $f(u) \neq \pm\infty$ und*

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle_X \qquad \forall\, v \in X \,.$$

Die Menge aller Subgradienten von f in u heißt ***Subdifferential*** *$\partial f(u)$. Falls an der Stelle u kein Subgradient existiert, setzen wir $\partial f(u) = \emptyset$.*

Beispiele. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $\partial f(u)$ die Menge aller Anstiege von Geraden, die durch $(u, f(u))$ gehen und *vollständig* unter dem Graphen von f liegen.

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -b\,x & \text{für } x \le 0\,, \\ \ \ a\,x & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $\partial f(0) = [-b, a]$. In der Tat, wenn wir die Ungleichung $f(v) \ge u^* v$ betrachten, so bemerken wir, dass für $v > 0$ die Ungleichung $av \ge u^* v$ impliziert, dass $a \ge u^*$ gilt, und für $v < 0$ aus der Ungleichung $-bv \ge u^* v$ folgt, dass $-b \le u^*$ gilt. Also kann $f(v) \ge u^*$ für alle $v \in \mathbb{R}$ nur gelten, wenn $u^* \in [-b, a]$.

(ii) Es gibt differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Subdifferential die leere Menge ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $\sin(x)$, für deren Subdifferential gilt: $\partial \sin(x) = \emptyset$, falls $x \ne \frac{3}{2}\pi + 2k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\partial \sin(x) = 0$, falls $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Falls eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 ein Minimum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Mithilfe des Subdifferentials erhält man folgende Verallgemeinerung.

3.6 Lemma. *Sei $f : X \to (-\infty, \infty]$ ein Funktional auf einem reellen Banachraum X mit $f \not\equiv \infty$. Dann ist u eine Lösung des Minimierungsproblems*

$$f(u) = \min_{v \in X} f(v)\,, \qquad\qquad u \in X\,,$$

genau dann, wenn

$$0 \in \partial f(u)\,.$$

Beweis. 1. Sei $0 \in \partial f(u)$. Nach Definition des Subgradienten gilt für alle $v \in X$ und $u^* \in \partial f(u)$

$$f(v) - f(u) \ge \langle u^*, v - u \rangle\,.$$

Wenn wir $u^* = 0$ einsetzen erhalten wir, dass für alle $v \in X$ gilt: $f(u) \le f(v)$.

2. Es gelte $f(u) \le f(v)$ für alle $v \in X$. Somit ist insbesondere $f(u) \ne \infty$ und wir erhalten für alle $v \in X$

$$f(v) - f(u) \ge 0 = \langle 0, v - u \rangle\,,$$

d.h. $0 \in \partial f(u)$. ∎

Das folgende Lemma stellt die Lösbarkeit des Minimierungsproblems sicher.

3.7 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes X. Das Funktional $f\colon C \to \mathbb{R}$ sei konvex, unterhalbstetig und koerziv, d.h. $f(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$, $u \in C$. Dann besitzt f auf C ein Minimum.*

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, dass f nichttrivial ist, d.h. $f \not\equiv \infty$. Sei $(u_n) \subset C$ eine Minimalfolge von f, d.h.

$$f(u_n) \to \inf_{v \in C} f(v) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgrund der Koerzivität von f muss die Folge (u_n) beschränkt sein. Also gibt es aufgrund von Satz A.8.15 eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ $(k \to \infty)$, und Satz A.8.9 liefert $u_0 \in C$. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig, und sei k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$f(u_{n_k}) \leq \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,. \tag{3.8}$$

Ferner gibt es, aufgrund von Folgerung A.8.10, eine Folge $(v_j) \subset C$ von konvexen Linearkombinationen der u_{n_k}, $n_k \geq k_0$, d.h. $v_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j u_{n_k}$, $n_k \geq k_0$, $0 \leq c_k^j \leq 1$, $\sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1$, die stark gegen u_0 konvergiert. Wegen der Konvexität des Funktionals f und (3.8) folgt

$$f(v_j) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j f(u_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j \big(\inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\big) = \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,. \tag{3.9}$$

Da in Banachräumen die Unterhalbstetigkeit äquivalent zur Bedingung (cf. [7, Kapitel 1])

$$f(x_0) \leq \liminf_{x_n \to x_0} f(x_n)$$

ist, erhalten wir aus (3.9)

$$f(u_0) \leq \liminf_{j \to \infty} f(v_j) \leq \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $f(u_0) = \inf\limits_C f$, d.h. das Minimum wird angenommen. ∎

Falls die Ableitung $f'(u)$ und das Subdifferential $\partial f(u)$ existieren, d.h. $\partial f(u) \neq \emptyset$, so ist $\partial f(u) = \{f'(u)\}$. Dies gilt nicht nur für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sondern auch für reellwertige Funktionen auf Banachräumen. Im Zusammenhang mit monotonen Operatoren und Subdifferentialen ist es besonders fruchtbar, konvexe Funktionen zu betrachten. Denn aus der reellen Analysis wissen wir, dass f' monoton wachsend ist, sofern $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar ist.

3.10 Lemma. *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Dann gilt:*

(i) *Falls f konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $Df(u)$ im Punkt u besitzt, dann gilt:*
$$\partial f(u) = \{Df(u)\}\,. \tag{3.11}$$

(ii) *Umgekehrt, falls $\partial f\colon X \to X^*$ hemistetig und eindeutig ist, d.h. für alle $u \in X$ existiert ein $u^* \in X^*$ mit $\partial f(u) = \{u^*\}$, dann ist f Gâteaux–differenzierbar und (3.11) gilt für alle $u \in X$.*

Beweis. ad (i): Sei $h \in X$ beliebig. Wir setzen $\varphi(t) = f(u + th)$. Dann ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, denn aufgrund der Konvexität von f gilt, für alle $\tau \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\varphi\big((1-\tau)t + \tau s\big) &= f\big(((1-\tau)+\tau)u + (1-\tau)th + \tau sh\big)\\ &\le (1-\tau)f(u+th) + \tau f(u+sh)\\ &= (1-\tau)\varphi(t) + \tau\varphi(s)\,.\end{aligned}$$

Da f Gâteaux–differenzierbar ist, existiert $\varphi'(0)$. Dies und die Konvexität von φ liefern insbesondere

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\\ &\le \lim_{t\to 0^+} \frac{t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0) - \varphi(0)}{t}\\ &= \varphi(1) - \varphi(0)\,.\end{aligned}$$

Setzen wir die Definition von φ und der Gâteaux–Differenzierbarkeit ein, ergibt sich daraus für alle $h \in X$

$$f(u+h) - f(u) \ge \langle Df(u), h\rangle\,,$$

d.h. nach der Definition des Subgradienten gilt $Df(u) \in \partial f(u)$. Sei nun $u^* \in \partial f(u)$. Dann gilt für alle $h \in X$ und $t > 0$

$$f(u+th) - f(u) \ge \langle u^*, th\rangle\,,$$

was man umschreiben kann als

$$\frac{f(u+th)-f(u)}{t} \ge \langle u^*, h\rangle\,, \qquad \forall h \in X\,.$$

Im Grenzübergang $t \to 0^+$ folgt

$$\langle Df(u), h\rangle \ge \langle u^*, h\rangle\,, \qquad \forall h \in X\,,$$

da f Gâteaux–differenzierbar ist. Wir ersetzen h durch $-h$, und erhalten

$$\langle Df(u), h\rangle = \langle u^*, h\rangle\,, \qquad \forall h \in X\,,$$

d.h. wir haben gezeigt $u^* = Df(u)$. Zusammen mit dem vorher Gezeigten folgt daher $\partial f(u) = \{Df(u)\}$.

ad (ii): Für $t > 0$ und $h \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} f(u+th) - f(u) &\geq \langle \partial f(u), th\rangle\,, \\ f(u) - f(u+th) &\geq -\langle \partial f(u+th), th\rangle\,, \end{aligned}$$

und demzufolge haben wir

$$\begin{aligned} \langle \partial f(u), h\rangle &\leq \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+th)-f(u)}{t} \\ &\leq \limsup_{t\to 0^+} \frac{f(u+th)-f(u)}{t} \\ &\leq \limsup_{t\to 0^+} \langle \partial f(u+th), h\rangle \\ &= \langle \partial f(u), h\rangle\,, \end{aligned}$$

da $\partial f(u)$ hemistetig ist. Also sind alle Ungleichheitszeichen Gleichheitszeichen. Daher existiert $Df(u)$ und (3.11) gilt. ■

Die meisten Eigenschaften konvexer, unterhalbstetiger Funktionale auf einem Banachraum X werden mithilfe von Trennungssätzen konvexer Mengen bewiesen, die auf der geometrischen Form des Satzes von Hahn–Banach beruhen (cf. Satz A.10.12).

3.12 Lemma. *Sei $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ ein konvexes, unterhalbstetiges Funktional auf einem reellen Banachraum X und seien $g_i\colon X \to (-\infty, \infty]$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, konvexe Funktionale. Dann gilt:*

(i) *Falls $f \not\equiv \infty$ gilt, existieren $a \in \mathbb{R}$ und $u^* \in X^*$ so, dass für alle $u \in X$ gilt:*

$$f(u) \geq a + \langle u^*, u\rangle\,.$$

(ii) *Sei $M \subseteq X$ eine konvexe, abgeschlossene Menge, so dass $f\colon M \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig auf dem Inneren $\operatorname{int}(M)$ der Menge M.*

(iii) *Falls $f(u) < \infty$ und f stetig in u ist, dann ist $\partial f(u)$ eine nichtleere konvexe Menge.*

(iv) *Sei $f \not\equiv \infty$ und sei $\operatorname{dom}(f) := \{u \in X \,|\, f(u) < \infty\}$. Dann ist die Menge der Punkte u, in denen $\partial f(u) \neq \emptyset$ gilt, dicht in $\operatorname{dom}(f)$.*

(v) *Falls ein Punkt $u_0 \in X$ existiert, so dass alle Funktionale g_i, $i = 1, \ldots, n$, endlich sind und die Funktionale g_j, $j = 1, \ldots, n-1$, stetig in u_0 sind, dann gilt die Summenformel für Subdifferentiale:*

$$\partial\big(g_1 + \ldots + g_n\big)(u_0) = \partial g_1(u_0) + \ldots + \partial g_n(u_0)\,.$$

Beweis. Der Beweis dieser Behauptungen erfordert einen Aufwand, der den Rahmen des Buches sprengen würde. Die Beweise können in [19, Kapitel 47] oder in [7, Kapitel 1] gefunden werden. ■

Sei X ein reeller Banachraum und $C \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge, deren **Indikatorfunktion** χ durch

$$\chi(u) := \begin{cases} 0 & \text{für } u \in C\,, \\ \infty & \text{für } u \in X \setminus C\,, \end{cases}$$

definiert ist. Unter einem **Trägerfunktional** von C im Punkt $u \in X$ verstehen wir ein Funktional $u^* \in X^*$, so dass für alle $v \in C$ gilt:

$$\langle u^*, u - v \rangle \geq 0\,. \tag{3.13}$$

Für ein gegebenes Paar $(u, u^*) \in X \times X^*$ beschreibt die Gleichung

$$\langle u^*, u - v \rangle = 0 \tag{3.14}$$

eine abgeschlossene *Hyperebene* H in X durch den Punkt u, d.h. obige Bedingung besagt, dass die Menge C auf einer Seite der Hyperebene H liegt.

Zwischen der Indikatorfunktion und dem Trägerfunktional gibt es folgende Beziehung:

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \text{Menge aller Trägerfunktionale} & \text{für } u \in C\,, \\ \emptyset & \text{für } u \in X \setminus C\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

In der Tat, nach der Definition des Subgradienten ist $u^* \in \partial\chi(u)$, falls für alle $v \in X$ gilt:

$$\chi(v) \geq \chi(u) + \langle u^*, v - u \rangle\,. \tag{3.16}$$

Sei $u \in C$. Falls wir auch $v \in C$ haben, ist diese Ungleichung nichts anderes als (3.13), d.h. insbesondere, dass u^* ein Trägerfunktional von C im Punkt $u \in C$ ist. Umgekehrt sei u^* ein Trägerfunktional von C im Punkt $u \in C$. Aus der Definition der Indikatorfunktion und (3.13) erhalten wir sofort (3.16), d.h. $u^* \in \partial\chi(u)$. Falls dagegen $u \in X \setminus C$, dann ist $\chi(u) = \infty$ und damit $\partial f(u) = \emptyset$ nach Definition 3.5.

Insbesondere ist der Graph des Subdifferentials der Indikatorfunktion χ nicht leer und es gelten folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} u \in C \quad &\Rightarrow \quad 0 \in \partial\chi(u)\,, \\ u \in \operatorname{int} C \quad &\Rightarrow \quad \partial\chi(u) = \{0\}\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

In der Tat ist für $u \in C$ die Ungleichung $0 \leq \langle u^*, u - v \rangle$ sogar für alle $v \in X$ erfüllt, wenn man $u^* = 0$ setzt. Falls $u \in \operatorname{int} C$, dann folgt aus $u^* \in \partial\chi(u)$, dass $u^* = 0$. Denn zu $u \in \operatorname{int} C$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(u) \subseteq C$. Wir haben also für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$, dass $v := u + \frac{r}{2}\, w \in C$. Aus (3.13) folgt dann

$$0 \le \left\langle u^*, u - (u + \tfrac{r}{2}\, w) \right\rangle = -\tfrac{r}{2} \left\langle u^*, w \right\rangle .$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten $0 \le \frac{r}{2}\langle u^*, w\rangle$. Insgesamt folgt daher $0 = \langle u^*, w\rangle$ für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$ und also $u^* = 0$.

3.18 Lemma. *Sei C eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reellen Banachraumes X. Dann ist $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. 1. $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ ist monoton: Seien (u, u^*), $(v, v^*) \in \partial\chi$, d.h. $u, v \in D(\partial\chi) = C, u^* \in \partial\chi(u), v^* \in \partial\chi(v)$, dann gilt nach (3.13) und (3.15) für alle $w \in C$:

$$\langle u^*, u - w\rangle \ge 0\,,$$
$$\langle v^*, v - w\rangle \ge 0\,,$$

und somit

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle = \langle u^*, u - v\rangle + \langle v^*, v - u\rangle \ge 0\,,$$

d.h. $\partial\chi$ ist monoton.

2. $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ ist maximal monoton: Sei $(u, u^*) \in C \times X^*$, und es gelte für alle $(v, v^*) \in \partial\chi$

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \ge 0\,.$$

Nun ist aber nach $(3.17)_1$ $0 \in \partial\chi(v)$ und wir erhalten

$$\langle u^*, u - v\rangle \ge 0\,,$$

d.h. $u^* \in \partial\chi(u)$. ■

Es stellt sich nun die Frage, ob $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ ebenfalls maximal monoton ist. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir einen kurzen Ausflug in die Theorie der *Konvexitäts-* und *Glattheitseigenschaften* von Banachräumen machen (cf. Abschnitt A.9).

3.19 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $\varphi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_X^2$. Dann wird die* ***Dualitätsabbildung*** *$J : X \to 2^{X^*}$ definiert durch*

$$J(u) := \partial\varphi(u)\,.$$

3.20 Lemma. *Sei H ein reeller Hilbertraum und J die Dualitätsabbildung $J\colon H \to 2^{H^*}$. Dann bildet J auf einelementige Mengen ab und kann daher als Operator $J\colon H \to H^*$ aufgefasst werden. Für diesen Operator gilt:*

$$\langle J(u), v\rangle_H = (u, v)_H\,.$$

Beweis. Nach Lemma 3.10 ist $\partial\varphi(u)$ einelementig, falls φ konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $D\varphi(u)$ besitzt. In diesem Fall gilt $\partial\varphi(u) = \{D\varphi(u)\}$.

1. φ ist konvex: Sei $t \in [0,1]$. Dann gilt für u, $v \in H$:

$$\begin{aligned}
\varphi\big(tu + (1-t)v\big) &= \frac{1}{2}\|tu + (1-t)v\|^2 \\
&\le \frac{1}{2}\big(t\|u\| + (1-t)\|v\|\big)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\Big(t^2\|u\|^2 + (1-t)^2\|v\|^2 + t(1-t)\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(t\|u\|^2 + (1-t)\|v\|^2\Big) = t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)\,,
\end{aligned}$$

da $2ab \le a^2 + b^2$.

2. φ besitzt eine Gâteaux–Ableitung: Für $t \in \mathbb{R}$ und $v \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(u + tv) &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u + tv\|^2\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}(u,u) + t(u,v) + \frac{1}{2}t^2(v,v)\Big) \\
&= (u,v) + t(v,v)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Gâteaux–Ableitung existiert und dass gilt:

$$\langle D\varphi(u), v\rangle = \frac{d}{dt}\varphi(u + tv)\Big|_{t=0} = (u,v)\,.$$

Die obige Formel für J folgt aus der Gleichungskette

$$\langle J(u), v\rangle = \langle \partial\varphi(u), v\rangle = \langle D\varphi(u), v\rangle = (u,v)\,,$$

wobei wir (3.11) benutzt haben. ∎

Im Falle von Banachräumen haben wir:

3.21 Satz. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Falls der Dualraum X^* strikt konvex ist, dann bildet die Dualitätsabbildung J auf einelementige Mengen ab und kann daher als Operator $J\colon X \to X^*$ aufgefasst werden. Dieser Operator ist demistetig, koerziv, beschränkt, surjektiv und maximal monoton. Weiterhin haben wir für alle $u \in X$*

$$Ju = D\varphi(u)\,,$$

wobei $D\varphi$ die Gâteaux–Ableitung von $\varphi = \frac{1}{2}\|u\|_X^2$ ist.

(ii) *Falls zusätzlich X strikt konvex ist, dann ist J strikt monoton.*

(iii) *Falls der Dualraum X^* lokal gleichmäßig konvex ist, dann ist der Operator J zusätzlich zu den Behauptungen in* (i) *stetig und insbesondere ist φ Fréchet–differenzierbar.*

Beweis. Der Beweis dieses Satzes kann in [19, Chapter 47] gefunden werden. ?? ∎

Bemerkungen. (i) Aus der Kettenregel (cf. Satz 2.2.7 und Bemerkungen danach) und den Behauptungen des Satzes folgt, mithilfe der Formel $\|u\| = \big(2\varphi(u)\big)^{1/2}$, dass die Norm $u \mapsto \|u\|$ auf $X \setminus \{0\}$ Gâteaux– bzw. Fréchet–differenzierbar ist, falls der Dualraum X^* strikt konvex bzw. lokal gleichmäßig konvex ist.

(ii) Die Behauptung aus Bemerkung (i) ist im Allgemeinen, ohne die zusätzlichen Annahmen, falsch. Davon überzeugt man sich leicht am Beispiel des $\mathbb{R}^2$, versehen mit der Maximumsnorm. Aus der Darstellung

$$\|z\|_\infty = \max(|x|, |y|) = \frac{1}{2}\Big(|x| + |y| + \big||y| - |x|\big|\Big)$$

für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ berechnet sich der Gradient der Funktion $z \mapsto \|z\|_\infty$ formal als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\Big(1 - \frac{|y| - |x|}{\big||y| - |x|\big|}\Big), \frac{y}{|y|}\Big(1 + \frac{|y| - |x|}{\big||y| - |x|\big|}\Big)\right)$$

und ist somit in den Punkten $(x, \pm x), x \in \mathbb{R}$ nicht definiert. In der Tat ist $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ *nicht* strikt konvex, da die Oberfläche der „Einheitskugel" $\partial B_1(0)$ Geradenstücke enthält.

Der folgende Satz ist der Schlüssel zur Beantwortung unserer Frage nach der maximalen Monotonie von $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$. Das Herzstück des Satzes 3.23 ist in folgenden Lemma enthalten. Es benutzt tiefe Zusammenhänge zwischen *Konvexitätseigenschaften* von X und *Glattheitseigenschaften* der Norm auf X.

3.22 Lemma. *Sei $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig auf dem reflexiven, reellen Banachraum X und sei $f \not\equiv +\infty$. Dann existiert ein strikt monotoner Operator $A\colon X \to X^*$ mit $R(A + \partial f) = X^*$.*

Beweis. Der Beweis kann in [19, S. 397] gefunden werden. ∎

3.23 Satz (Rockafellar 1966). *Sei $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig auf dem reflexiven, reellen Banachraum X und sei $f \not\equiv +\infty$. Dann ist $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. 1. $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ ist monoton. Aufgrund von Lemma 3.12 (iv) ist ∂f nicht trivial. Seien (u, u^*), $(v, v^*) \in \partial f$, d.h. $u, v \in D(\partial f)$, $u^* \in \partial f(u)$, $v^* \in \partial f(v)$. Dann gilt nach Definition des Subdifferentials

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &\geq \langle u^*, v - u\rangle \qquad \forall v \in X\,, \\ f(u) - f(v) &\geq \langle v^*, u - v\rangle \qquad \forall u \in X\,. \end{aligned}$$

Eine Addition beider Ungleichungen ergibt

$$0 \geq \langle u^* - v^*, v - u \rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq \langle u^* - v^*, u - v \rangle \,,$$

d.h. ∂f ist monoton.

2. $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ ist maximal monoton: Sei $(u_0, u_0^*) \in X \times X^*$ so, dass für alle $(u, u^*) \in \partial f$ gelte

$$\langle u_0^* - u^*, u_0 - u \rangle \geq 0 \,. \tag{3.24}$$

Zu zeigen ist jetzt, dass daraus $u_0^* \in \partial f(u_0)$ folgt, denn dann ist ∂f maximal monoton. Dazu benutzen wir den Operator A aus Lemma 3.22. Da $A(u_0) + u_0^* \in X^*$ und $R(A + \partial f) = X^*$ gilt, erhalten wir, dass $(u, u^*) \in \partial f$ existiert mit

$$A(u) + u^* = A(u_0) + u_0^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_0^* - u^* = A(u) - A(u_0) \,. \tag{3.25}$$

Die Ungleichung (3.24) liefert

$$0 \leq \langle u_0^* - u^*, u_0 - u \rangle = \langle A(u) - A(u_0), u_0 - u \rangle \,,$$

d.h. $\langle A(u_0) - A(u), u_0 - u \rangle \leq 0$. Der Operator A ist aber strikt monoton und somit erhalten wir $u = u_0$. Aus (3.25) folgern wir

$$u^* = u_0^* \in \partial f(u) = \partial f(u_0) \,,$$

d.h. ∂f ist maximal monoton. ■

Hieraus folgt die folgende Verschärfung von Satz 3.21.

3.26 Folgerung. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum. Dann ist die Dualitätsabbildung $J\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. Sei φ durch $\varphi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_X^2$ definiert. Dann ist offensichtlich $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty) \subseteq (-\infty, \infty]$ ein konvexes (cf. Beweis von Lemma 3.20), unterhalbstetiges Funktional (φ ist sogar stetig). Nach Satz 3.23 ist $J = \partial\varphi$ maximal monoton. ■

Satz 3.23 liefert auch die Antwort auf unsere Frage nach der maximalen Monotonie von $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$.

3.27 Folgerung. *Sei C eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reflexiven, reellen Banachraumes X und $\chi\colon X \to (-\infty, \infty]$ seine Indikatorfunktion. Dann ist $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. Wir überprüfen, dass χ die Voraussetzungen von Satz 3.23 erfüllt.

1. Nach Definition der Indikatorfunktion nimmt χ nur die Werte 0 und ∞ an, d.h. $\chi\colon X \to (-\infty, \infty]$. Da die Menge C nicht leer ist, ist offensichtlich $\chi \not\equiv \infty$.

2. χ ist konvex: Da C konvex ist, gilt für alle $u, v \in C$:

$$\chi\big((1-t)u+tv\big) = 0 = 0+0 = (1-t)\chi(u) + t\chi(v)\,.$$

Falls $u \notin C$ und/oder $v \notin C$, gilt offensichtlich

$$\chi\big((1-t)u+tv\big) \leq \infty = (1-t)\chi(u) + t\chi(v)\,.$$

3. χ ist unterhalbstetig: Wir müssen überprüfen, ob für alle $r \in \mathbb{R}$ das Urbild $\chi^{-1}((-\infty, r])$ abgeschlossen ist. Es gilt aber:

$$\chi^{-1}((-\infty, r]) = \{u \,|\, \chi(u) \leq r\} = \begin{cases} \emptyset\,, & \text{falls } r < 0\,, \\ C\,, & \text{falls } r \geq 0\,. \end{cases}$$

Die leere Menge $\emptyset$ ist abgeschlossen und C ebenfalls nach Voraussetzung; also ist χ unterhalbstetig.

Satz 3.23 liefert nun, dass $\partial\chi \colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. ∎

3.3.2 Der Satz von Browder

Ähnlich wie in den vorangegangenen Abschnitten wollen wir die Lösbarkeit von

$$b \in Au + Bu\,, \qquad u \in C\,, \tag{3.28}$$

untersuchen, wobei $A \colon C \subseteq X \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator und $B \colon C \to X^*$ ein pseudomonotoner Operator ist. Die Beziehung (3.28) bedeutet, wenn A eine mehrdeutige Abbildung ist, dass wir für ein gegebenes $b \in X^*$ ein Element $u \in C$ suchen, so dass gilt:

$$b = v + Bu\,, \qquad \text{mit } v \in Au\,.$$

Wenn A und B Operatoren sind, dann ist (3.28) äquivalent zu

$$b = Au + Bu\,, \qquad u \in C\,.$$

3.29 Satz (Browder 1968). *Sei $C \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven, reellen Banachraumes X und sei $b \in X^*$. Ferner sei $A \colon C \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator und $B \colon C \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter, demistetiger Operator. Falls C unbeschränkt ist, sei der Operator B koerziv bzgl. des Operators A und des Elements $b \in X^*$, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$, und eine Zahl $r > 0$, so dass für alle $u \in C$ mit $\|u\| > r$ gilt:*

$$\langle Bu, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle\,.$$

Dann existiert eine Lösung $u \in C \cap D(A)$ des Problems (3.28).

Beweis. Die Strategie, die diesem Beweis zugrunde liegt, ist folgende:

- Galerkin–Approximation; aber dieses Mal führen wir sie nicht mit Gleichungen sondern mit Ungleichungen durch.
- Lösbarkeit der Galerkin–Ungleichungen; hierzu verwenden wir ein Abschneide–Argument.
- Apriori Abschätzungen für die Lösung der Galerkin–Ungleichungen; diese folgen aus der Koerzivität von B.
- Konvergenz der Galerkin–Methode; diese basiert auf der Pseudomonotonie von B.

Da $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und C nichtleer, ist auch der Graph von A nicht leer. In der Tat, angenommen er sei leer, dann ist die Bedingung

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall\, (v, v^*) \in A$$

für ein beliebiges Paar $(u, u^*) \in C \times X^*$ erfüllt, da der Graph von A leer ist. Daraus folgt, dass $(u, u^*) \in A$ gilt, da A maximal monoton ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also existiert $(u_0, u_0^*) \in A$.

Man sieht sofort, dass für beschränkte Mengen C der Operator B koerziv bzgl. des Operators A und jedes Elements $b \in X^*$ ist, da für genügend großes r gilt: $C \cap \big(X \setminus B_r(0)\big) = \emptyset$.

Da der Graph von A nicht leer ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(0, 0) \in A$. Ansonsten gehen wir von dem Problem

$$b \in Au + Bu\,, \qquad\qquad u \in C\,,$$

über zu

$$b - u_0^* \in \bar{A}v + \bar{B}v\,, \qquad\qquad v \in C - u_0\,,$$

wobei $\bar{A}v := A(v + u_0)$ und $\bar{B}v := B(v + u_0) - u_0^*$. Aufgrund der Definition von $\bar{A}$ erhalten wir, dass $(v, v^*) \in \bar{A} \;\Leftrightarrow\; (v + u_0, v^*) \in A$ gilt. Sei nun $(u, u^*) \in (C - u_0) \times X^*$ derart, dass für alle $(v, v^*) \in \bar{A}$ gilt:

$$0 \leq \langle u^* - v^*, u - v\rangle = \langle u^* - v^*, u + u_0 - (v + u_0)\rangle\,.$$

Dies zusammen mit der maximalen Monotonie von $A : C \to 2^{X^*}$ impliziert, dass auch $\bar{A}\colon C - u_0 \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. Da auch $\bar{B}$ nur eine Verschiebung von B ist, sieht man sofort, dass $\bar{B}\colon C - u_0 \to X^*$ demistetig und beschränkt ist. Um die Pseudomonotonie von $\bar{B}$ zu zeigen, wählen wir eine Folge $(u_n) \subset C - u_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ und

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} \langle \bar{B}u_n, u_n - u\rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle B(u_n + u_0) - u_0^*, u_n + u_0 - (u + u_0)\rangle\,.$$

Aufgrund der Pseudomonotonie von B erhalten wir für alle $w \in X$

$$\langle B(u + u_0) - u_0^*, u + u_0 - w\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle B(u_n + u_0) - u_0^*, u_n + u_0 - w\rangle\,,$$

was mit der Bezeichnung $\tilde{w} = w - u_0$ die Ungleichung

$$\langle \bar{B}u, u - \tilde{w} \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle \bar{B}u_n, u_n - \tilde{w} \rangle$$

impliziert, d.h. $\bar{B}$ ist pseudomonoton. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b folgt für $v = u - u_0 \in C - u_0$, mit $\|v\| > r - \|u_0\|$,

$$\begin{aligned} \langle \bar{B}v, v \rangle &= \langle B(v + u_0) - u_0^*, v \rangle = \langle Bu - u_0^*, u - u_0 \rangle \\ &> \langle b - u_0^*, u - u_0 \rangle = \langle b - u_0^*, v \rangle \,, \end{aligned}$$

d.h. $\bar{B}$ ist koerziv bezüglich $\bar{A}$ und $b - u_0^*$. Also erfüllt auch $\bar{B}$ die Voraussetzungen des Satzes.

1. Äquivalente Variationsungleichung: Wir suchen ein $u \in C$ mit:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \,. \tag{3.30}$$

Dieses Problem ist äquivalent zu unserem ursprünglichen Problem (3.28). Wenn nämlich $u \in C$ die Ungleichung (3.30) löst, dann folgt aus der maximalen Monotonie von A, dass $(u, b - Bu) \in A$, d.h. insbesondere $b \in Au + Bu$ und $u \in D(A)$. Falls umgekehrt u eine Lösung von (3.28) ist, dann ist $b - Bu \in Au$ und die Ungleichung gilt aufgrund der Monotonie von A.

2. Apriori Abschätzung: Sei $u \in C$ eine Lösung von (3.30). Da $(0, 0) \in A$, gilt

$$\langle b - Bu, u \rangle \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Bu - b, u \rangle \leq 0 \,.$$

Andererseits ist B koerziv bezüglich A und b mit $u_0 = 0$. Daher gibt es ein $r > 0$ mit $\langle Bu - b, u \rangle > 0$ für alle $\|u\| > r$. Diese und die obige Ungleichung liefern die *apriori Abschätzung*

$$\|u\| \leq r \,, \tag{3.31}$$

falls $u \in C$ eine Lösung von (3.30) ist.

3. Galerkin–Ungleichung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Menge aller endlich–dimensionalen linearen Unterräume Y von X. Wir wählen ein festes $Y \in \mathcal{L}$. Anstelle von (3.30) betrachten wir das approximative Problem: Wir suchen $u_Y \in C \cap Y$, das die Ungleichung

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v \rangle_Y \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y \tag{3.32}$$

löst. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass aus $Y \subseteq X$ die Relation $X^* \subseteq Y^*$ folgt. Dies ist so zu verstehen, dass für $v^* \in X^*$ die Einschränkung auf $Y \subseteq X$ sofort ein Element aus Y^* liefert, d.h. die Dualitätsprodukte auf beiden Räumen werden miteinander identifiziert, und es gilt für alle $v \in Y$:

$$\langle v^*, v \rangle_Y := \langle v^*, v \rangle_X \,.$$

4. Lösung von (3.32): Wir müssen eine weitere Approximation des Problems (3.32) durchführen. Dazu setzen wir für $R > 0$

$$\begin{aligned} K_R &:= \{v \in C \cap Y \,\big|\, \|v\|_X \leq R\}\,, \\ G_R &:= \{(v, v^*) \in A \,\big|\, v \in K_R\}\,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass beide Mengen nichtleer sind, da $(0, 0) \in A$. Wir approximieren (3.32) durch das *abgeschnittene Problem*: Suche $u_R \in K_R$:

$$\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v\rangle_Y \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in G_R\,. \tag{3.33}$$

(a) Lösung des abgeschnittenen Problems: Auf das Problem (3.33) wollen wir Lemma 1.2.25 anwenden. Dazu setzen wir:
   (α) $K = K_R$. Die Menge $K \subset Y$ ist konvex aufgrund der Definition und kompakt, da sie eine abgeschlossene Teilmenge des endlich–dimensionalen Raumes Y ist.
   (β) $M = G_R$. Die Menge M ist monoton, da der Operator A insbesondere monoton ist.
   (γ) $T\colon K \to X^*\colon\ u \mapsto b - Bu$. Der Operator T ist stetig, da B demistetig ist, d.h. aus $u_n \to u\,(n \to \infty)$, folgt $Bu_n \rightharpoonup Bu$ $(n \to \infty)$. Wir betrachten aber B eingeschränkt auf Y, d.h. $B\colon C \cap Y \to X^* \subseteq Y^*$ mit $\dim Y^* < \infty$. In endlich–dimensionalen Räumen impliziert schwache Konvergenz aber starke Konvergenz (cf. Lemma A.8.8). Also erhalten wir $Bu_n \to Bu$ $(n \to \infty)$, d.h. T ist stetig.

   Nach Lemma 1.2.25 hat das abgeschnittene Problem (3.33) demnach eine Lösung $u_R \in K_R$.

(b) Lösung der Galerkin–Ungleichung (3.32): Wir setzen

$$\mathcal{S}_R := \big\{u_R \in K_R \,\big|\, u_R \text{ ist eine Lösung von (3.33)}\big\}\,,$$

   d.h. $\mathcal{S}_R \subseteq K_R$ für alle $R > 0$. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b (cf. Schritt 2) folgt:

$$\|u_R\| \leq r, \tag{3.34}$$

   wobei r unabhängig von R und $Y \in \mathcal{L}$ ist. Die Menge $\mathcal{S}_R$ hat folgende Eigenschaften:
   (α) $\mathcal{S}_R$ ist abgeschlossen: Sei $(u_n) \subset \mathcal{S}_R$, mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Da B demistetig ist folgt also $Bu_n \rightharpoonup Bu$ $(n \to \infty)$. Somit bleibt die Ungleichung (3.33) beim Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten, d.h. $u \in \mathcal{S}_R$.
   (β) $\mathcal{S}_R$ ist kompakt: Die Menge $\mathcal{S}_R$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von K_R, und K_R, als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des endlich–dimensionalen Raumes Y, ist selbst kompakt.
   (γ) $\mathcal{S}_{R'} \subseteq \mathcal{S}_R$ für alle R', R mit $R' \geq R \geq r$: Für $R' \geq R \geq r$ gilt aufgrund der Konstruktion: $G_R \subseteq G_{R'}$.

Für eine Folge $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ bilden also die Mengen $\mathcal{S}_{R_n}$ eine absteigende Folge kompakter Mengen und somit (cf. endliches Durchschnittsprinzip Lemma A.1.3) folgt die Existenz eines Elements u_Y mit

$$u_Y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{R_n} .$$

Aus (3.34) und der Definition von $K_R \subseteq C$ erhalten wir sofort

$$\|u_Y\| \le r \qquad \text{und} \qquad u_Y \in C\,. \tag{3.35}$$

Außerdem ist u_Y eine Lösung von (3.32), denn für $(v, v^*) \in A, v \in C \cap Y$ gilt: Es existiert ein R_{n_0}, so dass $\|v\| \le R_{n_0}$. Damit ist u_Y eine Lösung von (3.33) für R_{n_0}. Da aber u_Y für alle R_n $(n \to \infty)$ in $\mathcal{S}_{R_n}$ liegt und v beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y.$$

5. Konvergenz der Galerkin–Lösungen u_Y: Wir wollen zeigen, dass in einem gewissem Sinne gilt: “$u_Y \to u$“, wobei u eine Lösung von (3.30) sein wird. Hierbei tritt das Problem auf, dass Pseudomonotonie nur über (abzählbare) Folgen definiert ist, das System $\mathcal{L}$ aber überabzählbar ist. Also ist eine weitere Approximation nötig. Seien $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen

$$M_Z := \{(u_Y, Bu_Y) \in C \times X^* \,\big|\, u_Y \text{ Lösung von (3.32) mit } Y \supseteq Z\}\,.$$

Zuerst zeigen wir, dass es ein Element

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^{w} \tag{3.36}$$

gibt, wobei $\overline{M}_Z^{w}$ der Abschluss von M_Z in $X \times X^*$ bzgl. der schwachen Topologie ist. Dieses u wird letztendlich die gesuchte Lösung sein.

(a) Beweis von (3.36): Aus der apriori Abschätzung (3.35) erhalten wir, dass für alle $Y \in \mathcal{L}$ gilt $\|u_Y\| \le r$. Da $B\colon X \to X^*$ beschränkt ist, ist die Bildmenge $B(B_r)$ auch beschränkt. Also gibt es einen abgeschlossenen Ball $K \subseteq X \times X^*$, so dass

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} M_Z \subseteq K\,.$$

Da X reflexiv ist, sind es auch X^* und $X \times X^*$ (cf. Lemma A.7.4). Da K stark abgeschlossen, beschränkt und konvex ist, ist K auch schwach kompakt (cf. Folgerung A.8.14). Nun ist aber für alle $Z \in \mathcal{L}$ die Menge $\overline{M}_Z^{w}$ schwach abgeschlossen und es gilt: $\overline{M}_Z^{w} \subseteq K$. Demzufolge ist auch

$\overline{M}_Z^w$ schwach kompakt, und

$$\bigcup_{Z\in\mathcal{L}} \overline{M}_Z^w \subseteq K\,.$$

Seien nun $Y, Z \in \mathcal{L}$ beliebig aber fest. Wir setzen $S = \operatorname{span}\{Y, Z\}$ und erhalten $M_Y \cap M_Z \supseteq M_S$. In der Tat, sei $(u_S, Bu_S) \in M_S$. Dann ist u_S eine Lösung von (3.32) in einem Raum $U \supseteq S = \operatorname{span}\{Y, Z\} \supseteq Y$ und $U \supseteq S \supseteq Z$. Das bedeutet aber $(u_S, Bu_S) \in M_Z \cap M_Y$. Wiederholen wir dieses Argument endlich oft, erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^{N} \overline{M}_{Y_i}^w \neq \emptyset \qquad\qquad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, Y_i \in \mathcal{L}\,.$$

Aus dem endlichen Durchschnittsprinzip (cf. Lemma A.1.3) folgt somit (3.36).

(b) Konstruktion eines speziellen Paares (v_0, v_0^*): Es existiert $(v_0, v_0^*) \in A$, so dass gilt:

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0\rangle \leq 0\,. \tag{3.37}$$

Sei dem nicht so, dann gilt für alle $(v, v^*) \in A$:

$$\langle b - u^* - v^*, u - v\rangle > 0\,.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $b - u^* \in Au$. Somit können wir $v = u$ und $v^* = b - u^*$ wählen und erhalten $\langle b - u^* - v^*, u - v\rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt (3.37).

(c) Spezielle Approximation: Wir wählen nun $Y \in \mathcal{L}$ fest: Die Menge $\overline{M}_Y^w$ ist schwach abgeschlossen in $X \times X^*$, und $(u, u^*) \in \overline{M}_Y^w$ wegen (3.36). Aufgrund von Lemma A.8.17 gibt es eine Folge $(u_n, u_n^*) \subset M_Y$ mit $(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*)$ in $X \times X^*\, (n \to \infty)$. Nach Konstruktion von M_Y ist $u_n^* = Bu_n$ und insbesondere $u_n \in C$. Die Menge C ist stark abgeschlossen und konvex, also auch schwach abgeschlossen (cf. Satz A.8.9), daher liegt auch u in C. Nach Lemma A.8.17 gibt es eine Folge $(u_n) \subset C$, so dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X \\ Bu_n &\rightharpoonup u^* \quad \text{in } X^* \end{aligned} \qquad (n \to \infty)\,, \tag{3.38}$$

und

$$\langle b - Bu_n - v^*\,,\ u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,, \tag{3.39}$$

denn $u_n \in M_Y$, und Elemente von M_Y sind Lösungen von (3.32).

(d) Pseudomonotonie von B: Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \langle b - v^*, u - v\rangle \qquad \forall\, (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,,$$

denn damit haben wir gezeigt, dass (3.30) und damit auch (3.28) für alle $v \in Y \cap C$ gilt. Wir beschränken uns dazu auf solche $Y \in \mathcal{L}$ mit $v_0 \in Y$, wobei v_0 das Element aus 5. (b) ist. Wir wählen ein festes, aber beliebiges Y mit dieser Eigenschaft. Aus (3.39) folgt für alle $w \in C$, $(v, v^*) \in A, v \in Y \cap C$, und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Bu_n, u_n - w \rangle \le \langle b - v^*, u_n - v \rangle + \langle Bu_n, v - w \rangle . \tag{3.40}$$

Wir wählen insbesondere $w = v$. Dies ist möglich, da $D(A) \subseteq C$. Somit folgt aus (3.40)

$$\langle Bu_n, u_n - v \rangle \le \langle b - v^*, u_n - v \rangle \qquad \forall\, (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C . \tag{3.41}$$

Nun wählen wir $w = u$, $v = v_0$ und $v^* = v_0^*$, wobei (v_0, v_0^*) das spezielle Paar aus 5. (b) ist, und erhalten aus (3.40)

$$\langle Bu_n, u_n - u \rangle \le \langle b - v_0^*, u_n - v_0 \rangle + \langle Bu_n, v_0 - u \rangle$$

und somit mit Hilfe von (3.38) und (3.37)

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \le \langle b - v_0^* - u^*, u - v_0 \rangle \le 0 ,$$

d.h. $\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \le 0$. Da der Operator B pseudomonoton ist und $u_n \rightharpoonup u\, (n \to \infty)$, folgt mit Hilfe von (3.41) für alle $(v, v^*) \in A, v \in Y \cap C$

$$\begin{aligned} \langle Bu, u - v \rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v \rangle \\ &\le \langle b - v^*, u - v \rangle , \end{aligned}$$

d.h. für alle $(v, v^*) \in A$, und $v \in Y \cap C$ gilt:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v \rangle \ge 0 .$$

Zu beliebigem $(v, v^*) \in A$ gibt es ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $v \in Y$, denn $\bigcup_{\substack{Y\in\mathcal{L}\\ v_0\in Y}} Y = X$.

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\langle b - Bu - v^*, u - v \rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A ,$$

d.h. $u \in C$ ist eine Lösung von (3.30).

Der Beweis des Satzes ist vollständig. ■

Bemerkungen. (i) Wie wir bereits im Beweis des Satzes bemerkt haben sind die Voraussetzungen des Satzes 3.29 für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls die Menge C beschränkt ist.

(ii) Die Voraussetzungen von Satz 3.29 sind auch für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls B **koerziv bezüglich** A ist, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$, so dass

$$\lim_{\substack{\|u\| \to \infty \\ u \in C}} \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty \,. \tag{3.42}$$

Dann gibt es für alle $b \in X^*$ eine Lösung von (3.30), d.h. $R(A + B) = X^*$. In der Tat haben wir für $\|u\| > r$

$$\begin{aligned} \frac{\langle Bu - b, u - u_0 \rangle}{\|u\|} &\geq \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\| \, \|u - u_0\|}{\|u\|} \\ &\geq \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} - \|b\| \frac{\|u\| + \|u_0\|}{\|u\|} \\ &\geq \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} - 2\|b\| \,. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen ∞ für $\|u\| \to \infty$. Somit gilt $\langle Bu, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle$ für alle $\|u\| > r$ mit r groß genug, d.h. die Bedingungen des Satzes 3.29 sind für alle $b \in X^*$ erfüllt.

3.3.3 Variationsungleichungen

Wir wollen nun Satz 3.29 auf Variationsungleichungen anwenden. Gegeben sei ein Operator $A \colon C \to X^*$, wobei $C \subseteq X$ eine konvexe, abgeschlossene Menge ist, und $b \in X^*$. Wir suchen ein $u \in C$ so, dass

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall v \in C \,. \tag{3.43}$$

Eine äquivalente Formulierung von (3.43) ist: Suche ein $u \in C$, so dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au \,, \tag{3.44}$$

wobei χ die Indikatorfunktion von C ist, d.h.

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & u \in C \,, \\ \infty & u \in X \setminus C \,. \end{cases}$$

Wir haben gezeigt, dass das Subdifferential $\partial\chi$ gegeben ist durch:

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \{u^* \in X^* \,\big|\, \langle u^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C\} & u \in C \,, \\ \emptyset & u \in X \setminus C \,. \end{cases}$$

Daher ist $u \in C$ mit $b \in \partial\chi(u) + Au$ äquivalent zu $\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0$ für alle $v \in C$. Falls $C = X$, so ist (3.43) äquivalent zur Operatorgleichung $Au = b$.

3.45 Satz. *Sei $C \neq \emptyset$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven, reellen Banachraumes X. Der Operator $A\colon C \to X^*$ sei pseudomonoton, demistetig und beschränkt. Falls C unbeschränkt ist, existiere ein $u_0 \in C$, so dass*

$$\lim_{\substack{\|u\| \to \infty \\ u \in C}} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty \,.$$

Dann gilt:

(i) *Für alle $b \in X^*$ gibt es eine Lösung u von (3.43).*

(ii) *Falls $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist die Lösungsmenge von (3.43) abgeschlossen und konvex.*

(iii) *Falls $A\colon C \to X^*$ strikt monoton ist, ist (3.43) eindeutig lösbar.*

Beweis. ad (i): Die Menge C ist konvex, abgeschlossen und nichtleer, daher ist nach Lemma 3.27 das Subdifferential der Indikatorfunktion $\partial\chi : C \to 2^{X^*}$ maximal monoton. Wir haben auch gezeigt, dass für $u \in C$ gilt $\partial\chi(u) \neq \emptyset$ (cf. (3.17)). Um Satz 3.29 und die Bemerkungen nach diesem Satz anwenden zu können, wählen wir $A = \partial\chi$ und $B = A$. Also existiert ein $u \in C$, so dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au \,.$$

Dies ist aufgrund obiger Überlegungen äquivalent zur Existenz einer Lösung von (3.43).

ad (ii): Wenn $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist (3.43) äquivalent zu: Suche $u \in C$, so dass

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C \,. \tag{3.46}$$

In der Tat, sei u eine Lösung von (3.43), dann haben wir aufgrund der Monotonie von A

$$\begin{aligned} \langle Av, v - u \rangle &= \langle Au, v - u \rangle + \langle Av - Au, v - u \rangle \\ &\geq \langle Au, v - u \rangle \overset{(3.43)}{\geq} \langle b, v - u \rangle \,, \end{aligned}$$

d.h. u ist eine Lösung von (3.46). Sei umgekehrt u eine Lösung von (3.46). Wir setzen $v = (1-t)u + tw$, $w \in C$, $0 < t < 1$. Da C konvex ist, folgt $v \in C$. Die Ungleichung (3.46) impliziert daher

$$\langle b - A((1-t)u + tw)), u - w \rangle t \geq 0$$

oder äquivalent

$$\langle b - A((1-t)u + tw), u - w \rangle \geq 0 \,.$$

Im Grenzübergang $t \to 0^+$ folgt, da A demistetig ist,

$$\langle b - Au, u - w \rangle \geq 0 \,.$$

Das ist aber gerade (3.43).

Sei S die Lösungsmenge von (3.46) und seien $u, \bar{u} \in S$. Dann gilt für $w = (1-t)u + t\bar{u}$:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, (1-t)u + t\bar{u} - ((1-t)v + tv)\rangle \\ &= (1-t)\langle b - Av, u - v\rangle + t\langle b - Av, \bar{u} - v\rangle \geq 0\,,\end{aligned}$$

aufgrund von (3.46), d.h. die Lösungsmenge S ist konvex. Sei $(u_n) \subseteq S$ eine Folge mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Dann gilt:

$$\langle b - Av, u_n - v\rangle \geq 0\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0$ und damit $u \in S$. Also ist S abgeschlossen.

ad (iii): Für $u, \bar{u} \in S$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle b - Au, u - v\rangle &\geq 0\,, \\ \langle b - A\bar{u}, \bar{u} - v\rangle &\geq 0\,.\end{aligned}$$

Wir setzen $v = \bar{u}$ in die 1. Ungleichung ein und $v = u$ in die 2. Ungleichung, danach addieren wir beide Ungleichungen. Dies ergibt

$$\langle -Au + A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Au - A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \leq 0\,.$$

Da A strikt monoton ist, folgt daraus $u = \bar{u}$. ∎

Beispiel. Wir betrachten folgendes *Hindernisproblem*: Gesucht ist ein Element $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \\ u &\geq g && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.47}$$

wobei f, g gegebene Funktionen sind und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet ist. Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten einer elastischen Membran unter dem Einfluss einer Kraft f, falls die Bewegung durch ein Hindernis g beeinflusst wird.

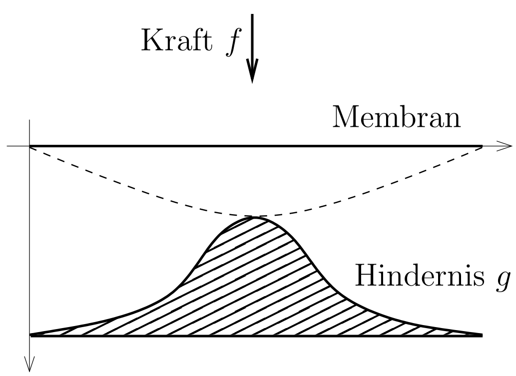

Abb. 2

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
C &:= \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, u \geq g \right\} , \\
\langle Au, v\rangle &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, , \\
\langle b, v\rangle &:= \int_\Omega f v \, dx \, ,
\end{aligned}
$$

und betrachten die folgende *Variationsungleichung*: Suche ein $u \in C$ mit

$$
\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0 \, , \qquad \forall v \in C \, , \tag{3.48}
$$

d.h. suche ein $u \in C$ mit

$$
\int_\Omega f(u-v) \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-v) \, dx \geq 0 \qquad \forall v \in C \, .
$$

3.49 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in W^{1,2}(\Omega)\,, g \leq 0$ auf $\partial\Omega$, genau eine Lösung $u \in C$ der Variationsungleichung* (3.48).

Beweis. 1. Die Menge C ist nichtleer, da für

$$
v = \max\,(g, 0) = g^+
$$

offensichtlich $v \geq g$ gilt und man zeigen kann, dass v zum Raum $W^{1,2}(\Omega)$ gehört (cf. [9, Satz 4.2.4 (iii)]). Da auf dem Rand $\partial\Omega$ aufgrund unserer Voraussetzungen $v = 0$ gilt, ist also $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Offensichtlich ist C konvex. Die Menge C ist auch abgeschlossen, da für eine Folge $(u_n) \subseteq C$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)\,(n \to \infty)$ folgt, dass es eine Teilfolge gibt mit $u_{n_k}(x) \to u(x)$ fast überall in $\Omega\,(k \to \infty)$ (cf. Satz A.12.24, Satz A.11.12). Daraus folgt, dass auch $u \in C$.

2. Der Operator A ist stetig, strikt monoton und koerziv, wie wir in Lemma 1.30 gezeigt haben ($p = 2, s = 0$).

Satz 3.45 liefert also sofort die Behauptung. ∎

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Lösung der *Variationsungleichung* (3.48) und der Lösung unseres *ursprünglichen Problems* (3.47)? Falls die Lösung u und die Daten f, g glatt sind, dann erhalten wir, dass

$$
O := \{x \in \Omega \,|\, u(x) > g(x)\}
$$

offen ist und dass

$$
B := \{x \in \Omega \,|\, u(x) = g(x)\}
$$

abgeschlossen ist. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(O)$ und $|\tau|$ klein. Da u und g glatt sind, ist $v \in C$, und es folgt

$$-\tau \int_\Omega f\varphi \, dx + \tau \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \tau \int_O \nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi \, dx \geq 0 \, .$$

Wir ersetzen τ durch $-\tau$, und erhalten insgesamt

$$\int_O f\varphi \, dx - \int_O \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(O) \, .$$

Daraus folgt durch partielle Integration (cf. (A.12.18)), dass

$$\int_O (f + \Delta u) \, \varphi \, dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(O) \, ,$$

woraus wir schließen

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } O \, .$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $0 < \tau \leq 1$. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$. Dann ist $v \in C$ und es gilt:

$$-\tau \int_\Omega f\varphi \, dx + \tau \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx \geq 0 \, .$$

Partielle Integration der Gleichung ergibt

$$-\int_\Omega (f + \Delta u) \, \varphi \, dx \geq 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \; \varphi \geq 0 \, ,$$

woraus wir schließen können

$$-\Delta u \geq f \qquad \text{in } \Omega \, .$$

Wir haben also gezeigt, dass eine glatte Lösung u der Variationsungleichung (3.48) das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &\geq f, \quad u \geq g \qquad && \text{in } \Omega \, , \\ -\Delta u &= f, \quad u > g \qquad && \text{in } O \, . \end{aligned}$$

löst. Man vergleiche dies mit dem Originalproblem (3.47).

Literaturverzeichnis

1. R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.
2. H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin, 2002.
3. H. Amann and J. Escher, , Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics], Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
4. H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
5. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces—selected topics*, Springer, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485.
6. N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators. I. General Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
7. I. Ekeland and R. Témam, *Convex analysis and variational problems*, Classics in Applied Mathematics, vol. 28, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
8. R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
9. L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
10. H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
11. H. Heuser, *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
12. A. Kufner, O. John, and S. Fučík, *Function Spaces*, Academia, Praha, 1977.
13. R. Meise and D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.
14. G. De Rham, *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
15. W. Rudin, *Reelle und komplexe Analysis*, R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999.
16. J. Lukeš and J. Malý, *Measure and Integral*, Matfyzpress, Prague, 1995.
17. J. Wloka, *Partielle Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.
18. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer, Berlin, 1980.
19. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. III*, Springer, New York, 1985, Variational methods and optimization.
20. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I*, Springer, New York, 1986, Fixed-point theorems.
21. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. IV*, Springer, New York, 1988, Applications to mathematical physics.
22. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*, Springer, New York, 1990, Linear monotone operators.

23. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*, Springer, New York, 1990, Nonlinear monotone operators.
24. E. Zeidler, *Applied functional analysis*, Applied Mathematical Sciences, vol. 109, Springer, New York, 1995, Main principles and their applications.

Index

$B_r(x_0)$ 181
ε–Netz 181
$\mathbb{N}_0$ 205
σ–Algebra 197
– Borel 197
$X \hookrightarrow Y$ 206

Abbildung 117
– bilineare 48
– folgenstetig 180
– maximal monoton 118
– monoton 118
– stetig 178
– unterhalbstetig 178
Abbildungsgrad
– Brouwer 141, 164
– Leray–Schauder 167
Ableitung
– Fréchet 46
– Gâteaux 45
– partielle 205
– Radon–Nikodým 210
– Richtungs- 45
– schwache partielle 211
– verallgemeinerte Zeit- 91
Abstand 181
apriori Abschätzung 32, 58, 66, 81, 90, 94, 112, 131, 172

Basis 183, 184
Bilinearform 31, 194

Carathéodory–Bedingung 69
Cauchy–Folge 181

Definitionsbereich 45
– effektiver 117
Diffeomorphismus 47
Differentialgleichung
– gewöhnliche 5, 29
– partielle 31, 71, 75, 76, 82, 84, 90, 98, 99, 109, 138
Dimension 183
Dualität 186
Dualitätsabbildung 125
Dualitätsprodukt 186
Dualraum
– von $C(\overline{\Omega})$ 205
– von $L^p(\Omega)$ 210
– von $W_0^{k,p}(\Omega)$ 212
Durchmesser 181

Eigenvektor 185
Eigenwert 185
Einbettung 206, 211, 213
– kompakt 206
– stetig 206
endliches Durchschnittsprinzip 179
Energiefunktional 11
Euler–Lagrange–Gleichungen 12
Exponent
– duale 43, 208

fast überall 199
Fehlerabschätzung 4
Fixpunkt 1
Fixpunktsatz 1
– Banach 2
– Brouwer 9
– Schauder 9, 27, 28
Fourierreihe 184
Funktion
– Bochner–messbar 36
– charakteristische 199
– integrierbar 201
– konvex 122

– Lipschitz–stetig 206
– lokal integrierbar 208
– messbar 198
– stetig 44, 178, 204
– stetig differenzierbar 47
– unterhalbstetig 121

Galerkin–Verfahren 58, 65, 81, 93, 109
Gebiet 204
Gelfand–Tripel 91
Glättungsoperator 209
gleichgradig stetig 205
Gleichung
– Euler–Lagrange 12
– Laplace 31, 173
– Navier–Stokes 85
– quasilineare elliptische 71, 76, 82, 174
– quasilineare parabolische 98
– Wärmeleitungs– 90
Gradient 11, 205
Graph 117

Hindernisproblem 138
Homöomorphismus 178
Homotopie 141, 168
Hyperebene 195

Indikatorfunktion 124
Integral
– Bochner 35, 36
– Lebesgue 36, 200
– Parameter– 202
Interpolation 208
Isometrie 164, 185
Isomorphismus 164, 185
iterative Folge 2

Kettenregel 48
Kompaktheit 179
Konvergenz 186
– $*$–schwache 188
– einer Folge 180, 181, 183
– schwache 188
– stark 188
Konvergenzprinzip 60
konvexe Hülle 182
Konvolution 209
Kronecker–Symbol 184

Kugel 181

Lösung
– schwach 32
Lagrangefunktion 11
Laplace–Gleichung 31
Lebesgue–Maß 35, 197
Lemma
– von Aubin–Lions 101
– von Fatou 202
– von Lax–Milgram 194
– von Mazur 28
linear unabhängig 183
lineare Hülle 182
lineares Funktional 186
Linearkombination 182

Maß 197
– äußeres 196
– σ–endlich 198
– absolut stetig 210
– Borel 198
– Lebesgue 197
– regulär 198
– signiertes 198
– vollständig 198
Maßraum 198
Menge
– überdeckungskompakt 179
– abgeschlossen 177
– Borel 197
– dicht 178
– folgenkompakt 180
– konvex 182
– Lebesgue–messbar 197
– monoton 18
– offen 177, 181
– präkompakt 181
– relativ kompakt 179
– relativ folgenkompakt 180
Metrik 181
Minimierungsproblem 120
Minimum 12
Minty Trick 58

Navier–Stokes–Gleichungen 85
Nemyckii–Operator 69
Newtonverfahren 4
Norm 183

– äquivalente 7, 215
Null–Lagrangefunktion 13
Nullmenge 198

Operator 185
– adjungiert 186
– Bedingung (M) 76
– beschränkt 63, 185
– Bildraum 185
– demistetig 63
– hemistetig 57, 63
– Integral- 23
– invers 185
– Kern 185
– koerziv 58, 62, 129, 136
– kompakt 23
– linear 185
– lokal beschränkt 63
– maximal monoton 18, 59, 116
– monoton 17, 57, 61
– positiv semidefinit 186
– pseudomonoton 17, 76, 77
– selbstadjungiert 186
– stark monoton 62
– stark stetig 63
– stetig 185
– strikt monoton 61
Operatornorm 185
orthogonal 184
Orthogonalkomplement 184
Orthonormalbasis 184
Orthonormalsystem 184
– vollständig 184

partielle Integration 211, 213
Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 194
Produktmaß 203
– äußeres 203
Produktregel 48

Rand 207
Randwert
– schwacher 213
Randwertproblem 31, 71
Raum
– $C(U;Y)$ 44
– $C(\overline{\Omega})$ 204
– $C_0^\infty(\Omega)$ 206
– $C^k(\overline{\Omega})$ 205
– $C^n(U;Y)$ 47, 50
– $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ 206
– $L(X,Y)$ 185
– $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 208
– $L^\infty(\Omega)$ 208
– $L^p(S;X)$ 41
– $L^p(\Omega)$ 207
– $W^{k,p}(\Omega)$ 211
– $W_0^{k,p}(\Omega)$ 212
– Banachraum 183, 184
– Basis 184
– Bidualraum 187
– Dualraum 186
– gleichmäßig konvex 192
– Hausdorff–Raum 177
– Hilbertraum 184
– Lebesgue–Raum, $L^p(\Omega)$ 207
– lokal gleichmäßig konvex 192
– metrischer 180
– normierter Vektorraum 183
– reflexiv 187
– separabel 178
– Sobolev–Raum, $W^{k,p}(\Omega)$ 211
– strikt konvex 192
– topologischer 177, 181
– Vektorraum 182
– vollständiger 181
Retraktion 10

Satz
– über die inverse Funktion 54
– über implizite Funktionen 51
– über majorisierte Konvergenz 201
– über monotone Konvergenz 201
– Mittelwert- 46
– Projektions- 193
– Reduktions- 165
– Rieszscher Darstellungs- 193
– Transformations- 204
– von Arzelà–Ascoli 205
– von Baire 195
– von Banach–Aloaglu–Bourbaki 191
– von Banach–Steinhaus 194
– von Bochner 38
– von Borsuk 161, 170
– von Brouwer 162
– von Browder 129
– von Browder–Minty 65

– von De Rham 89
– von Eberlein–Šmuljan 191
– von Egorov 200
– von Fubini 203
– von Hahn 198
– von Hahn–Banach 195, 196
– von Kadec–Troyanski 193
– von Kolmogorov 210
– von Levi 201
– von Lusin 199
– von Mazur 190
– von Milman–Pettis 192
– von Minty 59
– von Pettis 37
– von Radon–Nikodým 210
– von Riesz 188
– von Riesz–Radon 205
– von Schauder 170, 173
– von Taylor 50
– von Weierstrass 204
schwache Formulierung 31, 71, 90
Skalarprodukt 184
Spur 213
Spuroperator 213
Subdifferential 119
Subgradient 119

Topologie 177
– induzierte 181
– schwache 188
Träger einer Funktion 179
Trägerfunktional 124
Treppenfunktion 35, 199

Umgebung 177
Ungleichung
– Hölder 43, 208
– Minkowski 209
– Poincaré 214
– Young 208

Variationsrechnung 11
Variationsungleichung 136, 139
Vektorraum 182

Wärmeleitungsgleichung 90
Wachstumsbedingung 69
Wertebereich 117

Zerlegung der Eins 19, 25, 179, 212