



Numerik I

Blatt 1 – 24.10.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 und 2

Abgabe: 04.11.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num>

Hinweis: Der Übungsbetrieb findet in den geraden Semesterwochen statt und beginnt am 24.10.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \quad \frac{\exp(x)-1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| \ll 1$ vermeiden?

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte). Zu fixierten Normen $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n und auf \mathbb{R}^m bezeichne $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Die Operatornorm $\|\cdot\|_{\text{op}}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- (ii) Es gilt

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf\{c \geq 0: \|Ax\| \leq c\|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

und das Supremum und das Infimum werden angenommen.

- (iii) Im Fall $A \neq 0$ folgt für $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|Ax\| = \|A\|_{\text{op}}$ bereits $\|x\| = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Wir betrachten die Abbildung

$$I: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Nun seien $f, \tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $I(f) \neq 0$. Zeigen Sie

$$\frac{|I(f) - I(\tilde{f})|}{|I(f)|} \leq \kappa_1(f) \frac{\|f - \tilde{f}\|_1}{\|f\|_1}$$

mit

$$\kappa_1(f) = \frac{I(|f|)}{|I(f)|}$$

und der Norm

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Interpretieren Sie den Term $\kappa_1(f)$ und entscheiden Sie grob, in welchen Situationen das Problem I schlecht bzw. gut konditioniert ist.

Aufgabe 4 (3+1 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass für *symmetrisches* und *reguläres* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt:

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j|}{\min_{k=1, \dots, n} |\lambda_k|}.$$

- (b) Sei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Diagonalmatrix. Bestimmen Sie die Kondition von D (wieder bzgl. der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Matrixnorm).