$\boxed{A1}$ Auslöschungseffekte vermeiden: (bei beiden für kleine x nahe 0 Auslöscheffekte)

Forme um:

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-2x)(1+x)-(1+2x)}{(1+2x)(1+x)} = \frac{\cancel{1} - x - 2x^2 \cancel{-1} - 2x}{1+3x+2x^2} = \frac{-2x^2-3x}{2x^2+3x+1}$$

$$= -\frac{2x^2+3x}{2x^2+3x+1}$$

Stelle als Reihe dar:

$$\frac{\exp(x)-1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \cancel{+1} \cancel{-1}}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}$$

streng genommen (weil implementieren!)

$$\frac{\exp(x)-1}{x} \approx \frac{\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \sum_{k=1}^{N}\frac{x^{k-1}}{k!} \quad N \text{ groß}$$

A2 Schreibe $\|\cdot\|_{op} =: |||\cdot|||$ als Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ für jew. Normen auf $\mathbb{R}^m$ & $\mathbb{R}^n$.

(i) ~~z.z.~~ $|||\cdot|||$ ist Norm.

~~Bew~~ $|||A||| \overset{VL}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$ ⇝ Führe alles auf Norm-Eig der Normen zurück

(1) $|||\cdot||| \geq 0$ klar. Sei $|||A||| = 0$, dann schon $\|Ax\| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

also mit Definitheit der Norm auf $\mathbb{R}^m$: $Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A = 0$.

Umgekehrt, ist $A = 0 \Rightarrow |||A||| = 0$ klar.

(2) $$|||A+B||| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \underbrace{\|(A+B)x\|}_{=Ax+Bx} \underset{\text{und sup-Regeln}}{\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq}} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Bx\| = |||A||| + |||B|||$$

(3) $$|||\lambda A||| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \underbrace{\|\lambda A x\|}_{\substack{=|\lambda|\,\|Ax\| \\ \text{mit Homogenität der Norm}}} = |\lambda|\cdot|||A|||$$

(ii) z.z. $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf \underbrace{\{ c \geq 0 \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n \}}_{=: M}$
und Inf & Sup werden angenommen.

Bew. Zunächst: $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \|A \cdot \frac{x}{\|x\|}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Setze $S := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$ & $I := \inf M$

1. $I \in M$, d.h. $\|Ax\| \leq I \cdot \|x\| \iff I \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ \forall x \neq 0$ also insbesondere für das Supremum, d.h. $I \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = S$

2. $S = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \iff \|Ax\| \leq S\|x\|$, d.h. $S \in M$
und $S \geq \inf M$ (mit Def. Inf), d.h. $S \geq I$

$\Rightarrow S = I$. Sup & Inf werden angenommen, da lineare Abb + Norm stetig auf Kompaktum (Satz von Min / Max). ∎

(iii) z.z. Falls $A \neq 0$, dann folgt für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|Ax\| = \|A\|$ schon $\|x\| = 1$.

Bew. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ und damit:

$$1 = \frac{\|Ax\|}{\|A\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|A\|} = \|x\| \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \|x\| \overset{\text{n.V.}}{\leq} 1 \quad \text{also } \|x\| = 1.$$ ∎

Aufgabe 3)

Es gilt mit der Linearität und Monotonie des Integrals

$$|I(f) - I(\tilde{f})| = \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|\, dx = \|f - \tilde{f}\|_1$$

und damit

$$\frac{|I(f) - I(\tilde{f})|}{|I(f)|} \leq \frac{\|f - \tilde{f}\|_1}{|I(f)|} = \frac{I(|f|)}{|I(f)|} \frac{\|f - \tilde{f}\|_1}{\|f\|_1} = \kappa_1(f) \frac{\|f - \tilde{f}\|_1}{\|f\|_1}.$$

($\kappa_1(f)$ ist also obere Schranke für die relative normweise Kondition)

Wenn $I(|f|)$ groß im Verhältnis zu $|I(f)|$: schlecht konditioniert

Bei stark oszillierenden Integranden (bei denen sich die Flächen gegenseitig „auslöschen") ist die Kondition des Problems schlecht.

Wenn $f \geq 0$ oder $f \leq 0$: I ist gut konditioniert, da $\kappa_1(f) = 1$.

Aufgabe 4)

(a) Vorlesung: $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter EW von } A^* A}$

A reell + symmetrisch: $A^* A = A^2$

EWe von A^2 sind alle von der Form λ^2, mit λ EW von A.

$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\text{größter EW von } A^* A} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } A\}$

- A regulär: 0 kein EW von A und EW von A^{-1} sind genau λ^{-1}

$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \max\left\{\frac{1}{|\lambda|} : \lambda \text{ EW von } A\right\} = \frac{1}{\min\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } A\}}$

$\Rightarrow \operatorname{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ □

(b) $\kappa(D) = \frac{\max_{j=1,\dots,n} |d_j|}{\min_{j=1,\dots,n} |d_j|}$.