Numerik I

Blatt 2 – 07.11.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 3 — Abgabe: 18.11.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num`

Aufgabe 1 (1+2+1)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{R}^N$. Dann ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch $x^* = A^{-1}b$. Wir gehen nun *ausnahmsweise* davon aus, dass sowohl die inverse Matrix A^{-1} als auch eine LU-Zerlegung von A der Form $A = LU$ bekannt ist.

(a) Bestimmen Sie den Aufwand der Berechnung der Matrix-Vektor-Multiplikation $A^{-1}b$, wobei wir dabei eine Multiplikation und eine Addition zu einer Operation zusammenfassen.

(b) Betrachten Sie nun zunächst $Ly = b$. Bestimmen Sie explizit den Aufwand der Vorwärtselimination zur Berechnung von y. Geben Sie dann den Aufwand des Lösens von $Ax = b$ durch die gegebene LU-Zerlegung an.
Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die Rückwärtselimination den Aufwand von $N(N + 1)/2$ Operationen aufweist.

(c) Vergleichen Sie den Aufwand aus Teil (a) mit dem Aufwand aus Teil (b).

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die normalisierte LU-Zerlegung von A_1 und die Cholesky-Zerlegung von A_2 mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{pmatrix}$$

sofern diese existieren.

Aufgabe 3 (2+2(+1))**.** Für die Koeffizienten der Tridiagonalmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_3 & & & \\ & c_2 & a_3 & b_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_N \\ & & & & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

gelte $|a_1| \geq |c_1|$, $|a_N| \geq |b_N|, c_n \neq 0$ für alle $n = 1, \dots, N-1$ und

$$|a_n| \geq |b_n| + |c_n| \quad \text{für } n = 2, 3, \dots, N-1.$$

Hinweis: Die Voraussetzungen implizieren, dass die Matrix A *spaltendiagonaldominant* ist.

(a) Zeigen Sie, dass für A eine LU-Zerlegung der Form

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \gamma_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{N-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_N \\ & & & \alpha_N \end{pmatrix}$$

existiert, indem Sie den Gauß-Algorithmus (ohne Zeilentausch) durchführen.

Geben Sie Rekursionsformeln zur Berechnung der α_n und γ_n an. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass die auftretenden Ausdrücke wohldefiniert sind, das heißt, dass $\alpha_n \neq 0$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie simultan, dass $\alpha_n \neq 0$ und $|c_n/\alpha_n| \leq 1$ gilt.

(b) Geben Sie die Rekursionsformeln für die Lösung des Systems $Ax = d$ mit $d \in \mathbb{R}^N$ an, indem Sie die LU-Zerlegung aus Teil (a) verwenden.

(c) Geben Sie den Aufwand an, bei bekannter LU-Zerlegung der obigen Form das lineare Gleichungssystem $Ax = d$ zu lösen.

Aufgabe 4 (1+2+1)**.** Sei $A = LU$ eine LU-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $|l_{ij}| \leq 1$.

(a) Wir bezeichnen die i-te Zeile von A bzw. U mit $a_i^\top$ bzw. u_i^T.
Zeigen Sie $u_i^\top = a_i^\top - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^\top$ für $i = 1, \ldots, n$.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach i die Ungleichung

$$\max_{j=1}^{n} |u_{ij}| \leq 2^{i-1} \max_{k=1}^{i} \max_{l=1}^{n} |a_{kl}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Folgern Sie

$$\max_{i,j=1}^{n} |u_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie auch die geometrische Summenformel in der Form $\sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1} = 2^{i-1} - 1$.

(c) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt in (1) sogar '='.

Bemerkung: Das bedeutet, dass die Gauß-Elimination im Sinne der Rückwärtsanalyse stabil ist, falls die Einträge von L und U nicht zu groß sind. Auch wenn die Abschätzung meist zu pessimistisch ist, ist sie scharf.