Lösung – Übungsblatt 2

Aufgabe 1)

(a) Setze $C := A^{-1}$, dann gilt für $x^* = (x_n)_{n=1}^N = A^{-1}b$

$$x_m = \sum_{n=1}^N c_{mn} b_n$$

pro Eintrag: $\left.\begin{array}{l} - N \text{ Multiplikationen} \\ - N-1 \text{ Additionen} \end{array}\right\} N$ Operationen

$\Rightarrow$ alle Einträge: N^2 Operationen

(gilt allgemein für Matrix-Vektor-Multiplikation)

(b) Vorwärtselimination:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & l_{3,2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{N,1} & \cdots & \cdots & l_{N,N-1} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ l_{2,1} y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{N-1} l_{N,n} y_n + y_N \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $y_1 := b_1$, $y_2 := b_2 - l_{2,1} y_1$, …, $y_n := b_n - \sum_{m=1}^{n-1} l_{n,m} y_m$

$\rightsquigarrow$ Für y_n $(n \geq 2)$ sind $n-1$ Additionen und $n-1$ Multiplikationen notwendig

$\Rightarrow$ $n-1$ Operationen

Insgesamt damit: $\sum_{n=1}^N (n-1) = \frac{N(N-1)}{2}$

Rückwärtselimination: $N(N+1)/2$

$\Rightarrow$ Insgesamt für LU-Zerlegung: $\frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2$.

(c) Der Aufwand ist gleich! $\Rightarrow$ selbst bei bekannter Inverse hat das Verwenden der LU-Zerlegung keinen höheren Aufwand als direkte Multiplikation mit A^{-1}.

Aber: Inverse Matrix häufig stressig zu berechnen, Struktur von A überträgt sich nicht auf Struktur von A^{-1}.

Wenn Matrix aber in z.B. Bandstruktur, überträgt sich diese auf L und U.

Aufgabe 2)

LU - Zerlegung: $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

$\det(A_1) = 10$, $\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} = 10$, $\det(5) = 5$ $\Rightarrow \exists!$ norm. LU-Z. von A_1:

Zeilenumformung von A_1 bis U-Gestalt und Zeilenumformung als Matrix darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \end{matrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}}_{L_1 A_1} \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2 L_1 A_1} = U$$

mit $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt also: $L_2 L_1 A_1 = U \Leftrightarrow A_1 = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{=L} U$

mit $L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cholesky - Zerlegung: $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{pmatrix}$

A_2 sym. und pos. definit: $\det(A_2) = 5625$, $\det\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{pmatrix} = 225$, $\det(9) = 9$

$\Rightarrow \exists!\, L \in \mathbb{R}^{3\times 3}: \quad A = LL^T$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3)

(a) – Gauß-Algorithmus: $\mathrm{II} - \gamma_1 \cdot \mathrm{I}$; $\gamma_1 := \frac{c_1}{a_1}$ $(a_1 \neq 0 \Leftarrow |a_1| \geq |c_1| \neq 0)$

Eintrag der Matrix L

$$L \overset{\mathrm{II}-\gamma_1 \mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & a_2-\gamma_1 b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 := a_2 - \gamma_1 b_2$$

$\rightsquigarrow$ Setze $\gamma_2 := \frac{c_2}{\alpha_2}$

- $\alpha_2 \neq 0$, da $|\gamma_1 b_2| = |\gamma_1||b_2| \leq |b_2| < |b_2| + |c_2| \leq |a_2|$
- $|\gamma_2| \leq 1$, da $|c_2| \leq |a_2| - |b_2| \leq |a_2| - |\gamma_1||b_2| \leq \big||a_2| - |\gamma_1 b_2|\big| \leq |a_2 - \gamma_1 b_2| = |\alpha_2|$.

... und so weiter, mit $\gamma_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$, $\alpha_{n+1} = a_{n+1} - \gamma_n b_{n+1}$.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & b_3 & 0 & & \vdots \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \gamma_{N-1} & a_N - \gamma_{N-1} b_N \end{pmatrix}$$

Bemerkung:
Tatsächlich könnte $\alpha_N = 0$ sein, das ist aber nicht weiter schlimm, wir bekommen trotzdem eine gültige LU-Zerlegung.

(b) Lösen von $Ax = d$: I Vorwärtselimination II Rückwärtselimination

(Damit die Gleichung eindeutig lösbar ist, brauchen wir A regulär $\Rightarrow \alpha_N \neq 0$. Wir nehmen also $\alpha_N \neq 0$ an)

I $Ly = d$: $y_1 := d_1$, $y_2 := d_2 - \gamma_1 y_1$, ..., $y_N := d_N - \gamma_{N-1} y_{N-1}$

II $Rx = y$: $x_N := y_N / \alpha_N$, $x_{N-1} := (y_{N-1} - b_N x_N)/\alpha_{N-1}$, ..., $x_1 := (y_1 - b_2 x_2)/\alpha_1$

(c) – y_n $(n \geq 2)$: benötigt 1 Multiplikation + 1 Addition $\Rightarrow$ 1 Operation

↳ insgesamt $N-1$ Operationen

– x_N: 1 Multiplikation

– $x_{N-1}, \ldots, x_1$: jeweils 2 Multiplikationen + 1 Addition $\Rightarrow$ 2 Operationen

↳ insgesamt $2(N-1) + 1$ Operationen

Somit benötigen wir insgesamt $3(N-1) + 1 = 3N - 2$ Operationen zur Lösung des Gleichungssystems bei gegebener LU-Zerlegung

Aufgabe 4)

In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass für A bereits Pivotisierung durchgeführt wurde.
A bezeichnet also eigentlich PA und insbesondere ist L normalisiert.

(a) $A = LU \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ii} u_{ij}$

$\overset{l_{ii}=1}{\Rightarrow} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ii} u_{kj}$ bzw. $u_i^T = a_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_k^T$.

(b) (IA) $i=1$: klar, da erste Zeile von U = erste Zeile von A

(IS) $i \rightsquigarrow i+1$: Es gilt: $\max_{j=1}^{n} |u_{ij}| = \max_{j=1}^{n} \left| a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right| \leq \max_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{k=1}^{i-1} |l_{ik}| \max_{j=1}^{n} |u_{kj}|$.

Mit $|l_{ij}| \leq 1$ und (IV) erhalten wir

$$\max_{j=1}^{n} |u_{ij}| \overset{(IV)}{\leq} \max_{k=1}^{i} \max_{l=1}^{n} |a_{kl}| \left| 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1}}_{\sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1} = 2^{i-1} - 1} \right| = \max_{k=1}^{i} \max_{l=1}^{n} |a_{kl}|\, 2^{i-1}$$

$\square$

(1) folgt dann direkt aus der Bildung des Maximums über alle $i = 1, \dots, n$.

(c) Gauß-Elimination für A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 2^{n-2} \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \max_{i,j=1}^{n} |l_{ij}| = 1, \quad \max_{i,j=1}^{n} |u_{ij}| = 2^{n-1}, \quad \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = 1.$