Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2022/2023

JProf. Dr. Diyora Salimova, Oliver Suchan

Numerik I

Blatt 3 – 21.11.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 3 + 4 + 5.1 Abgabe: 02.12.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num`

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. In der Praxis weiß man oft nicht, ob die Matrix A denn positiv definit ist oder nicht, denn die definierende Bedingung ($v^\top Av > 0$ für alle $v \neq 0$) lässt sich nicht so einfach nachprüfen (wie z.B. Symmetrie).

(a) Betrachten Sie den Algorithmus zur Cholesky-Zerlegung (aus der Vorlesung oder das rekursive Vorgehen) und begründen Sie, warum es nicht nötig ist, im Voraus zu wissen, ob die Matrix A tatsächlich positiv definit ist, wenn man an der ggfs. vorhandenen Cholesky-Zerlegung interessiert ist.
Hinweis: Ignorieren Sie in der Begründung die Rundungsfehler der Gleitkommaoperationen.

(b) Erklären Sie mit Teil (a), wie man von einer Matrix numerisch bestimmen könnte, ob diese positiv definit ist (ohne die Eigenwerte der Matrix zu berechnen).

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Setze $L^{(k)} = I_n - l_k e_k^\top$ mit $l_k = (0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{n,k})^\top$ für $k = 1, \dots, n-1$ und $\tilde{L} = L^{(n-1)}L^{(n-2)} \cdots L^{(1)}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{L}^{-1} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^\top .$$

Hinweis: Die Matrizen $L^{(k)}$ sind von der Klasse der (unipotenten) *Frobeniusmatrizen.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times4}$ so, dass die Matrix PA eine normalisierte LU Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (17, -23, -13, 51)^\top$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung

$$t \mapsto \|A(x + ty) - b\|_2^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

und folgern Sie die Gaußsche Normalengleichung, falls x eine Lösung des Ausgleichsproblems ist.