Numerik I

Blatt 4 – 05.12.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 5 — Abgabe: 16.12.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num

Aufgabe 1 (2+2+(2+2) Punkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Im Fall, dass $A^\top A$ singulär oder sehr schlecht konditioniert ist, löst man oft statt $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2$ für $\alpha > 0$ das Ersatzproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2 + \alpha\|x\|_2^2. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$, eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^k$, sodass (1) identisch zu

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\|\tilde{A}x - \tilde{b}\right\|_2^2 \tag{2}$$

ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Normalengleichung zum Problem (2) gegeben ist durch

$$(A^\top A + \alpha I_n)x = A^\top b.$$

(c) Nun habe die Matrix <u>keinen</u> vollen Rang, d.h. $\mathrm{Rang}(A) < \min\{m,n\}$. Sei σ_1 der größte Singulärwert der Matrix A. Zeigen Sie

$$\kappa_2(A^\top A + \alpha I_n) = \frac{\sigma_1^2 + \alpha}{\alpha}, \tag{3}$$

wobei κ_2 die Kondition bzgl. der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Matrixnorm bezeichne.
Hinweis: Die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ einer Rang-r-Matrix sind die Wurzeln der positiven Eigenwerte von $A^\top A$.

(d) Betrachten Sie in (3) die Grenzwerte $\alpha \to 0$ und $\alpha \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $v \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ und $\beta = 2/\|v\|_2^2$. Wir betrachten die Householder-Transformation

$$P_v = I_m - \beta vv^\top \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Matrix P_v ist symmetrisch, d.h. $P_v = P_v^\top$.
(b) Die Matrix P_v ist orthogonal, d.h. $P_v^\top P_v = P_v P_v^\top = I_m$.
(c) Es gilt $P_v v = -v$.
(d) Für alle $w \in \mathbb{R}^m$ mit $w^\top v = 0$ gilt $P_v w = w$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie einen Householder-Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft $P_v x \in \operatorname{span}\{e_1\}$ wobei $x^\top = (2, 4, 5, 2)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Householder-Verfahrens eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b^\top = (3\sqrt{2}, -1, 7)$.

Aufgabe 4 (2+1+1 Punkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir nehmen an, dass bereits ein Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ zu einem reellen Eigenwert λ_1 von A bekannt sei.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Householder-Transformation $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$QAQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & c^\top \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

für gewisse $c \in \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ erfüllt ist.
Hinweis: Welchen Vektor sollte man für Qe_1 erhalten, um obige Gleichung realisieren zu können?

(b) Bestimmen Sie den Vektor c für den Fall, dass die Matrix A symmetrisch ist.

(c) Erklären Sie warum $\lambda(A) = \lambda(B) \cup \{\lambda_1\}$ erfüllt ist. Dabei bezeichne $\lambda(\cdot)$ das Spektrum.