Blatt 4

Donnerstag, 1. Dezember 2022 08:25

Aufgabe 1 (2+2+(2+2) Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Im Fall, dass $A^\top A$ singulär oder sehr schlecht konditioniert ist, löst man oft statt $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2$ für $\alpha > 0$ das Ersatzproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2 + \alpha\|x\|_2^2. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$, eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k\times n}$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^k$, sodass (1) identisch zu

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\|\tilde{A}x - \tilde{b}\right\|_2^2 \tag{2}$$

ist.

$$\min \|Ax-b\|_2^2 + \alpha\|x\|^2 = \min \|Ax-b\|^2 + \|\sqrt{\alpha}\,x - 0\|^2$$

setze also $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\alpha}\cdot I_n \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, damit $k = m+n$

(b) Zeigen Sie, dass die Normalengleichung zum Problem (2) gegeben ist durch

$$(A^\top A + \alpha I_n)x = A^\top b.$$

Nach VL ist die Normalengl. $\tilde{A}^T\tilde{A}x = \tilde{A}^T\tilde{b}$, also

$$\tilde{A}^T\tilde{A} = [A^T \ \sqrt{\alpha}\cdot I_n]\cdot\begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\alpha} I_n \end{bmatrix} = A^TA + \alpha\cdot I_n$$

$$\tilde{A}^T\tilde{b} = [A^T \ \sqrt{\alpha}\cdot I_n]\cdot\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = A^Tb$$

(c) Nun habe die Matrix <u>keinen</u> vollen Rang, d.h. $\mathrm{Rang}(A) < \min\{m,n\}$. Sei σ_1 der größte Singulärwert der Matrix A. Zeigen Sie

$$\kappa_2(\underbrace{A^\top A + \alpha I_n}_{=M}) = \frac{\sigma_1^2+\alpha}{\alpha}, \tag{3}$$

wobei κ_2 die Kondition bzgl. der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Matrixnorm bezeichne.
Hinweis: Die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ einer Rang-r-Matrix sind die Wurzeln der positiven Eigenwerte von $A^\top A$. (*)

(*) A^TA pos. semidef.
$\Rightarrow$ EW alle ≥ 0

Aus B1A4: $\kappa_2(M) = \dfrac{\max|\lambda_j|}{\min|\lambda_j|}$, wobei λ_j EW zu M.

EW von M berechnen sich durch $0 = \det(A^TA + \alpha I_n - \lambda I_n)$
$= \det(A^TA - \underbrace{(\lambda-\alpha)}_{=\sigma^2} I_n) \iff \lambda_i = \sigma_i^2 + \alpha$

also sind die EW von $A^TA + \alpha I_n$ sind:
$\sigma_1^2 + \alpha \geq \_\_ \geq \sigma_r^2 + \alpha \geq \alpha > 0$

Da A n.V. keinen vollen Rang hat, ist 0 ein EW von A und auch von A^TA. D.h. ein EW von $A^TA + \alpha I_n$ ist auch $0 + \alpha = \alpha$ (da kleinste)

$$\Rightarrow \kappa_2(A^TA + \alpha I_n) = \frac{\sigma_1^2+\alpha}{\alpha}$$

(d) Betrachten Sie in (3) die Grenzwerte $\alpha \to 0$ und $\alpha \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

$$\kappa_2(A^TA + \alpha I_n) \xrightarrow{\alpha\to 0} \infty$$
$$\kappa_2(A^TA + \alpha I_n) \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$$

Für größeres \alpha wird die Kondition also immer besser, die Lösung von (1) wird aber auch immer weniger mit der von min|Ax-b|² zu tun haben, da \alpha groß.
Für kleineres \alpha (zu klein) wird es extrem schlecht konditioniert, wobei dann die Lösungen aber mehr miteinander zu tun haben.
In der Praxis muss man also einen Kompromiss finden und \alpha so passend wie möglich für das vorliegende Problem wählen.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $\beta = 2/\|v\|^2$. Wir betrachten die Householder-Transformation

$$P_v = I_m - \beta v v^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Matrix P_v ist symmetrisch, d.h. $P_v = P_v^\top$.
(b) Die Matrix P_v ist orthogonal, d.h. $P_v^\top P_v = P_v P_v^\top = I_m$.
(c) Es gilt $P_v v = -v$.
(d) Für alle $w \in \mathbb{R}^m$ mit $w^\top v = 0$ gilt $P_v w = w$.

a) $P_v^T = (I_m - \beta v v^T)^T = I_m^T - \beta (v v^T)^T = I_m - \beta \overbrace{v^{T^T}}^{=v} v^T = P_v$

b) $P_v^T \overset{a)}{=} P_v$, also berechne nur noch

$$P_v \cdot P_v = (I_m - \beta v v^T)(I_m - \beta v v^T)$$
$$= I_m - 2\beta v v^T + \beta^2 \underbrace{v v^T v v^T}_{= v (v^T v) v^T = \|v\|^2 v v^T}$$
$$= I_m - 2\beta v v^T + \beta \cdot \frac{2}{\cancel{\|v\|^2}} \cancel{\|v\|^2} v v^T = I_m$$

c) $P_v v = (I_m - \beta v v^T) v = v - \beta v \underbrace{v^T v}_{=\|v\|^2} = v - 2v = -v$

d) $P_v w = (I_m - \beta v v^T) w = w - \beta v \underbrace{v^T w}_{= (w^T v)^T = 0} = w$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte).

(a) Bestimmen Sie einen Householder-Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft $P_v x \in \operatorname{span}\{e_1\}$ wobei $x^\top = (2, 4, 5, 2)$.

Mittels Lemma 5.4: $x \neq 0$, $x \notin \operatorname{span}\{e_1\}$

$\sigma = \operatorname{sign}(x_1) = 1$

$\|x\| = 7$

$$v = \frac{x + \sigma \|x\| e_1}{\|x + \sigma \|x\| e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{126}} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nach Lemma (Konstruktion) ist $P_v x = -\sigma \|x\| e_1 = -7 e_1 \in \operatorname{span}\{e_1\}$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Householder-Verfahrens eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b^\top = (3\sqrt{2}, -1, 7)$.

1. $A_1 = A$, $a_1 = e_1$, also keine Householder-Trafo nötig

$\rightsquigarrow Q_1 = I_3$

2. $A_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

a_2, $\sigma = -1$, $\|a_2\| = 2$

$\tilde{v} = a_2 + \sigma \|a_2\| e_1$, $v = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\tilde{Q}_2 = P_v = I_2 - 2 v v^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix}$

Also $Q_2 Q_1 A = Q_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = R$

Also $Q_2 Q_1 A = Q_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = R$

$Q_2 Q_1 A = R \iff A = \underbrace{Q_1^{-1} Q_2^{-1}} \cdot R$

$= Q = Q_1^T Q_2^T = I_3^T Q_2^T = Q_2^T$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Löse $b = Ax = QRx$, d.h.
löse $Qy = b \iff y = Q^T b$, $y = [3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]^T$
löse $Rx = y$ (Rückwärtssubst.), $x = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}]^T$.

Aufgabe 4 (2+1+1 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir nehmen an, dass bereits ein Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ zu einem reellen Eigenwert λ_1 von A bekannt sei.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Householder-Transformation $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass

$$QAQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & c^\top \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

für gewisse $c \in \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ erfüllt ist.
Hinweis: Welchen Vektor sollte man für Qe_1 erhalten, um obige Gleichung realisieren zu können?

(b) Bestimmen Sie den Vektor c für den Fall, dass die Matrix A symmetrisch ist.

(c) Erklären Sie warum $\lambda(A) = \lambda(B) \cup \{\lambda_1\}$ erfüllt ist. Dabei bezeichne $\lambda(\cdot)$ das Spektrum.

a) $QAQe_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{Q = Q^T = Q^{-1}}{\iff} A(Qe_1) = \lambda_1 (Qe_1)$

$\Rightarrow Qe_1$ ist EV zu λ_1
Q ist orthogonal, d.h. längentreu, d.h. hier $\|e_1\| = 1$ bleibt,
wähle $Qe_1 = \frac{v}{\|v\|}$
$\iff e_1 = Q \frac{v}{\|v\|} \in \operatorname{span}\{e_1\}$

$\Rightarrow P_w = I_n - 2ww^T$, $w = \frac{v + \sigma \|v\| e_1}{\|v + \sigma \|v\| e_1\|}$

dann ist $\overbrace{P_w \cdot \frac{v}{\|v\|}}^{\text{(mit Lemma)}} = \frac{1}{\|v\|} P_w v = \frac{1}{\|v\|}(-\sigma \|v\| e_1) = -\sigma e_1 \overbrace{=}^{\text{OBdA } v_1 \geq 0 \text{, sonst betrachte } -v} -e_1$

Setze also $Q = -P_w$ (dann konform mit Eig. aus Lemma)
Es gilt dann (wie gewünscht):
$QAQe_1 = QA\frac{v}{\|v\|} = Q\frac{\lambda_1 v}{\|v\|} = \lambda_1 Q \frac{v}{\|v\|} = \lambda_1 e_1$

Eigentlich aber egal ob $Q = \pm P_w$:
Falls $Q = P_w$ gilt nämlich auch
$QAQe_1 = QA\left(-\frac{v}{\|v\|}\right) = -QA\frac{v}{\|v\|} = -Q\frac{\lambda_1 v}{\|v\|} = -\lambda_1 Q \frac{v}{\|v\|} = -\lambda_1(-e_1) = \lambda_1 e_1$
wie gewünscht.

b) Falls $A^T = A$: $(QAQ)^T = Q^T A^T Q^T = QAQ$, d.h. symmetrisch

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & c^T \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ c & B^T \end{pmatrix}$, d.h. $c = 0$.

c) wegen $Q = Q^T = Q^{-1}$ gilt: QAQ ist ähnlich zu A

(allgemein: B ist ähnlich zu A, falls eine reguläre Matrix S ex. mit $B = S^{-1}AS$)

$\xRightarrow{\text{ähnlich}} \lambda(QAQ) = \lambda(A)$

also $\lambda(A) \overset{a)}{=} \lambda\begin{pmatrix} \lambda_1 & c^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \lambda(B) \cup \{\lambda_1\}$, denn

$$(*)\quad 0 = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & c^T \\ \underbrace{0} & B - \lambda I_{n-1} \end{pmatrix} \overset{LA}{=} \underbrace{\det(\lambda_1 - \lambda)}_{\rightsquigarrow \{\lambda_1\}} \cdot \underbrace{\det(B - \lambda I_{n-1})}_{\rightsquigarrow \lambda(B)}$$