Numerik I

Blatt 5 – 19.12.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 6 & 7 Abgabe: 13.01.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top$. Verwenden Sie A^+, um das durch A und $b = (4,1,2,3)^\top$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)**.**

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit lin. unabh. EVen v_i und zugeh. EWen λ_i. Zeigen Sie die Darstellung $A = VDV^{-1}$ mit $V = (v_1 \dots v_n)$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max_{x\neq 0, x\cdot v_1 = 0} \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}.$$

(c) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix A ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}.$$

Aufgabe 3 (2+1+1 Punkte)**.** Zu jedem linearen Programm

$$\text{Minimiere } f(x) = c^\top x \text{ unter der Nebenbedingung } Ax = b, x \geq 0$$

mit $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ lässt sich das sogenannte *duale Problem* wie folgt definieren

$$\text{Maximiere } g(y) = b^\top y \text{ unter der Nebenbedingung } A^\top y \leq c, y \in \mathbb{R}^m$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für zulässige Lösungen x bzw. y gilt die *schwache Dualität*: $\min c^\top x \geq \max b^\top y$

(b) Seien nun x und y zulässige Lösungen mit $c^\top x = b^\top y$. Dann gilt, x und y sind Optimallösungen.

(c) Ist das duale Problem unbeschränkt, so gibt es keine zulässige Lösung x.

Quiz (sehr schwierig): Wie kann man formal das duale Problem herleiten?

Aufgabe 4 (2+1+1 Punkte)**.** Ein Produzent von Streusalz erhält den Auftrag, 50 Tonnen Streusalz nach Rom, 20 nach Paris und 30 nach Berlin zu liefern. In Lagern in Prag und Amsterdam sind 40 beziehungsweise 60 Tonnen verfügbar. Die Kosten pro 10 Tonnen Transportmenge in Euro sind gemäß der folgenden Tabelle gegeben.

	Rom	Paris	Berlin
Prag	700	600	200
Amsterdam	800	300	400

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm in Normalform, um die Gesamtkosten für den Transport zu minimieren. Lösen Sie das Problem dann mit Hilfe des Simplex-Verfahrens.

(b) Formulieren Sie das duale Problem formal und in Textform.

(c) Berechnen Sie die Lösung des dualen Problems (irgendwie).