Lösung - Übungsblatt 5

Aufgabe 1)

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T \text{ hat Singulärwertzerlegung}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}}_{=U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{=V^T} \Rightarrow \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I $\quad A^+ = V\Sigma^+ U^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

II $\quad A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot A^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Für das Ausgleichsproblem gegeben durch A und $b = (4 \; 1 \; 2 \; 3)^T$ liefert uns A^+b die Lösung mit minimaler Norm:

$$x^* = A^+ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2)

(a) Es gilt: $AV = VD$ (das ist grad die EW-Gleichung in Matrixform)

Da EVen lin. unabh. ist V also invertierbar $\Rightarrow A = VDV^{-1}$.

(b) Beh: $\lambda_2 = \max_{x \neq 0, x \cdot v_1 = 0} \frac{x^TAx}{\|x\|_2^2}$

Bew: $x \cdot v_1 = 0 \iff x \in \operatorname{span}\{v_2, \dots, v_n\}$

x hat also die Darstellung $x = \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i = \frac{x^T v_i}{\|v_i\|^2}$

und somit $\frac{x^TAx}{\|x\|_2^2} = \frac{(\sum_{i=2}^n \alpha_i v_i)^T A (\sum_{i=2}^n \alpha_i v_i)}{\|x\|_2^2} = \frac{(\sum_{i=2}^n \alpha_i v_i)^T (\sum_{i=2}^n \alpha_i \lambda_i v_i)}{\|x\|_2^2}$

$\overset{\text{Orthonom. der EVen}}{=} \frac{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2} \overset{\lambda_i \geq \lambda_{i+1}}{\leq} \frac{\lambda_2 \cancel{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2}}{\cancel{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2}} = \lambda_2$

Für $x = v_2$ gilt: $\frac{v_2^TAv_2}{\|v_2\|_2^2} = \lambda_2 \frac{v_2^Tv_2}{\|v_2\|_2^2} = \lambda_2$, das Maximum wird also angenommen $\Rightarrow$ Beh. $\square$

(c) Beh: $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ EV von $A \iff \nabla r(x^*) = 0$

Bew: Es gilt: $r(x) = r(c \cdot x) \; \forall \, 0 \neq c \in \mathbb{R} \overset{\text{o.B.d.A.}}{\rightsquigarrow} \|x\|_2^2 = 1$ constraint

Betrachte also Lagrange-Fkt. $\mathcal{L}(x) = x^TAx - \lambda(x^Tx - 1)$

$\frac{d}{dx}\mathcal{L}(x) = 2x^TA - 2\lambda x^T \overset{\text{Asymm.}}{=} 2Ax - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \iff Ax = \lambda x \quad ✓$ $\square$

Aufgabe 3)

(a) Beh: $\min c^T x \geq \max b^T y$

Bew: x, y zulässige Lösungen des primalen bzw. dualen Problems.

$$\rightsquigarrow c^T x = x^T c \underset{\text{Nebenbed. duales P.}}{\overset{x \geq 0}{\geq}} x^T A^T y = (Ax)^T y \underset{\text{primale P.}}{\overset{\text{Nebenbed.}}{=}} b^T y$$

Dies gilt für alle zulässigen x, y und damit können wir min und max bilden

$\Rightarrow$ schwache Dualität: $\min c^T x \geq \max b^T y$. $\square$

(b) Beh: x, y zul. Lsg. mit $c^T x = b^T y \Rightarrow x, y$ Optimallsgen

Bew: Minimum und Maximum wird jeweils angenommen $\xRightarrow[\text{Dualität}]{\text{schwache}}$ x, y Optimallösungen $\square$

(c) Beh: Duales Problem unbeschränkt $\Rightarrow \nexists$ zulässige Lösung x

Bew: Da DP. unbeschränkt also kein $\max b^T y$ existiert und daher $\sup b^T y = \infty$, sowie $\min c^T x \geq \max b^T y$

folgt die Behauptung auch direkt aus der schwachen Dualität.

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, also: Primales Problem unbeschränkt $\Rightarrow \nexists$ zul. Lsg. y.

Des Weiteren gibt es noch die starke Dualität, die besagt, dass falls Optimallösungen für PP. bzw. DP. existieren, schon $c^T x = b^T y$ gelten muss. $\square$

Quiz: Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf reguläre $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Die Zielfunktion ist gegeben als $J(x, c) := \langle c, x \rangle$. Mit der Nebenbedingung $Ax = b$ erhalten wir die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, c, \lambda) := \langle c, x \rangle - \langle A_c x - b, \lambda \rangle$ für $\lambda \in \mathbb{R}^n$

Wir betrachten nun die Ableitung von $\mathcal{L}$ nach x, um so die Adjungierte Gleichung zu erhalten:

$$d_x[\langle A_c \cdot - b, \lambda \rangle](x; \overset{\mathbb{R}^n}{\delta_x}) = + \langle c, \delta x \rangle \iff \langle A_c \delta_x, \lambda \rangle = + \langle c, \delta x \rangle$$

$$\iff \langle A_c^T \lambda - c, \delta_x \rangle = 0$$

$$\iff A_c^T \lambda = + c.$$

$$\Rightarrow \lambda_c = + A_c^{-T} c.$$

Im Prinzip wollen wir jetzt die Lagrange-Funktion statt nach λ nach x auflösen:

$$-(A_c x - b)^T \lambda + c^T x \rightsquigarrow + b^T \lambda - x^T A_c^T \lambda + c^T x = + b^T \lambda + \underbrace{x^T(-A_c^T \lambda + c)}_{= -x^T(+A_c^T \lambda - c)}$$

$\iff \max b^T \lambda$ unter der Nebenbedingung $-A_c^T \lambda + c \geq 0 \iff A_c^T \lambda \leq c$ //