A4 Streusalzproduzent

Auftrag:
Rom 50t
Paris 20t
Berlin 30t

Bestand:
Prag 40t
Amsterdam 60t

Transportkosten pro 10t:

	Rom	Paris	Berlin
Prag	700	600	200
Amsterdam	800	300	400

a) Definiere

$$x = \begin{bmatrix} \text{Prag nach} \begin{cases} \text{Rom} \\ \text{Paris} \\ \text{Berlin} \end{cases} \\ \text{Amst. nach} \begin{cases} \text{Rom} \\ \text{Paris} \\ \text{Berlin} \end{cases} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6_{\geq 0}$$

Berechne alles in "$\cdot$ 10 Tonnen", also z.B. Rom kriegt $b_1 = 5$, also 50t (wegen Kostentabelle)

dann ist

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{I} & x_1 + x_4 = 5 \\ \mathrm{II} & x_2 + x_5 = 2 \\ \mathrm{III} & x_3 + x_6 = 3 \\ \mathrm{IV} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \mathrm{V} & x_4 + x_5 + x_6 = 6 \end{array}$$

, d.h.

$$\underset{\mathbb{R}^{5\times 6}}{A \in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{\mathbb{R}^5}{b \in} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Auftrag} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Bestand} \end{matrix}$$

Mit $c^T = [700 \;\; 600 \;\; 200 \;\; 800 \;\; 300 \;\; 400]$ haben wir damit das

PP: $\min_x c^T x$ udN $Ax = b$, $x \geq 0$ (Minimiere Kosten, wobei Auftrag erfüllt)

wegen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist die letzte Zeile in A redundant, d.h. für die Berechnung mittels Simplex, reduziere die Nebenbed. zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=: \tilde{A}} \cdot x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \tilde{b}$$

Dann hat das neue $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{4\times 6}$ vollen $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 4 = m$ und wir können das Simplex-Verfahren auf $\min_x c^T x$ udN $\tilde{A}x = \tilde{b}$, $x \geq 0$ anwenden:

1. Finde zunächst eine Ecke (zulässige Lsg.):

"Löse" dafür $\tilde{A}x = \tilde{b}$, $x \geq 0$ oder durch Ausprobieren / scharfes Hinsehen / Anstarren:

$x = [0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 0]^T$ ist zulässig

$I = \{2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 6\}$

$A_I = [a_2, a_3, a_4, a_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit linear unabhängigen Spalten (regulär)

$\xRightarrow{\text{Satz 7.2}}$ x ist Ecke.

2. Berechne $u = c_J - A_J^T A_I^{-T} c_I$, $\quad A_I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$u = \begin{bmatrix} 700 \\ 400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 200 \\ 800 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$u \ngeq 0$, $u_r = u_1 < 0$

3. Definiere $d = A_I^{-1} a_r$, $r = 1$

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i=2 \\ \leftarrow i=3 \\ \leftarrow i=4 \\ \leftarrow i=5 \end{matrix}$$

4. Suche passendes $s \in I$, mit $d_s > 0$.

passend im Sinne von : $t = \min\limits_{\substack{i \in I \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$

also $\min\limits_{\substack{i = 2,3,4,5 \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \min\left\{\frac{1}{1} ; \frac{5}{1}\right\} = 1 = t = \frac{x_s}{d_s}$, $s = 2$

5. Definiere $x_{neu} =: x$

$$x := x_{neu} = \left\{ \begin{matrix} x_i - t d_i & , i \in \{3,4,5\} \\ t & , i = 1 \\ 0 & , i \in \{2,6\} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ist neue Ecke mit $f(x_{neu}) \le f(x)$

$\leftarrow \begin{cases} I = \{1,3,4,5\} \\ J = \{2,6\} \end{cases}$

6. Wiederhole Schritt 2.

$$u = c_J - A_J^T A_I^{-T} c_I = \begin{bmatrix} 600 \\ 400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 800 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 100 \end{bmatrix} \geq 0$$

Satz 7.3 $\Rightarrow$ x ist Lösung des Problems. $\min c^T x$ udN $Ax = b, x \geq 0$

ist 5100

Anmerkungen

(1) Im Allgemeinen ist das Finden einer Ecke für die Initialisierung oft gar nicht so einfach.
$\leadsto$ weiterführende Anpassungen des Verfahrens (siehe Seminar)

(2) MatLab stellt mit "linprog" einen Solver für lineare Programme zur Verfügung.
(Ist aber allerdings kein Simplex-Verfahren dahinter)
Zur Lösung / Kontrolle der obigen Aufgabe :

```
linprog( c, [ ], [ ], A, b, zeros(6,1), +Inf · ones(6,1))
ans = [1 0 3 4 2 0]^T
```

- $+Inf \cdot ones(6,1)$: upper bound für $x \geq 0$
- $zeros(6,1)$: lower bound für $x \geq 0$
- A, b : Gleichheitsbedingungen
- $[ ], [ ]$: "$\le$" - Bedingungen
- c : "min $c^T x$"

b) Duales Problem (wieder alles in "· 10 Tonnen")

DP : $\max\limits_y g(y) = b^T y$ udN $A^T y \le c$

$$\max_y \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^5} \text{ udN } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{6 \times 5}} \cdot y \le \begin{bmatrix} 700 \\ 600 \\ 200 \\ 800 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix} \left\} \begin{matrix} y_1 + y_4 \le 700 \\ y_2 + y_4 \le 600 \\ y_3 + y_4 \le 200 \\ y_1 + y_5 \le 800 \\ y_2 + y_5 \le 300 \\ y_3 + y_5 \le 400 \end{matrix} \right. \quad (y \geq 0)$$

In Textform : Gibt (ziemlich sicher) mehrere Szenarien, aber z.B. :
einfach gesagt : maximiere Gewinn, wobei Transportkosten nicht überstiegen werden dürfen.
ausführlich : Die Streusalzfirma (S1) überlegt (aufgrund von Personalmangel / Kosten / whatever ...), den Auftrag zusammen mit einer zweiten Streusalzfirma (S2) zu bearbeiten, die aber derzeit keinen Bestand hat (bald aber nachproduziert).

ausführlich: Die Streusalzfirma (S1) überlegt (aufgrund von Personalmangel / Kosten / whatever ...), den Auftrag zusammen mit einer zweiten Streusalzfirma (S2) zu bearbeiten, die aber derzeit keinen Bestand hat (bald aber nachproduziert). Der Deal ist: S2 liefert Auftrag mit Salz von S1 und füllt Bestand dann wieder auf (letzteres wäre für S1 ohne Kosten verbunden). Dafür macht S2 das Angebot an S1 in Form von $y \in \mathbb{R}^5$ wie oben, wobei $y_1, \dots, y_3$ Kosten für Belieferung & y_4, y_5 Kosten fürs Auffüllen. Zielwert ist Gesamtgewinn für S2. (vgl. dazu Aufschrieb: "Primales vs. Duales Problem")

c) Lösung des dualen Problems (irgendwie):

(1) über irgendein Programm:

MatLab: linprog($\underbrace{-b}$, $\underbrace{A', c}$, $\underbrace{[\,], [\,]}$, $\underbrace{\text{zeros}(5,1), +\text{Inf} \cdot \text{ones}(5,1)}$)

└ lower & upper bound für y

└ Gleichheitsbed. (keine)

└ "$\leq$" - Bed.

└ "max $b^T y$" $\Leftrightarrow$ "min $-b^T y$" (linprog arbeitet nur mit Minimierung)

$\underline{\text{ans}} = [700\ 200\ 200\ 0\ 100]^T$

und $\underline{b^T \cdot \text{ans} = 5100}$ (starke Dualität ✓)

(2) Mittels Simplex. Schlupfvariablen einführen, Problem in Normalform schreiben, lösen (Programm oder händisch)

(3) Händisch (in urspr. Form)?

Primales vs. Duales Problem

mathematisch: siehe Skripte, Afgn, etc.

Textform: prinzipiell: minimieren (z.B. Kosten) vs. maximieren (z.B. Gewinn)

als Szenario: z.B. (aus Wikipedia)

① Fabrik 1 produziert Produkte $i = 1, \dots, n$

x_i Menge von Produkt i, $x \geq 0$ Produktvektor

c_i Marktpreis für Produkt i, $c \geq 0$ Preisvektor

b Rohstoffvektor, was zur Verfügung steht in der Fabrik

A beschreibt Rohstoff-Produkt-Matrix (wie viele Einheiten pro Produkt gebraucht werden)

Für Fabrik 1 gilt das PP: $\underbrace{\max c^T x}_{\text{maximiere Einnahmen}}$ udN $\underbrace{Ax \leq b}_{\text{höchstens } b \text{ Rohstoffe verbrauchen}}$, $\underbrace{x \geq 0}_{\nexists \text{ negative Produktmenge}}$

Fabrik 2 hat keine Rohstoffe und will diese von Fabrik 1 abkaufen, macht Angebot y:

y_i Preis pro Einheit für Rohstoff i, $y \geq 0$ Preisvektor

b_i Menge von Rohstoff i

Für Fabrik 2 gilt das zugehörige DP: $\underbrace{\min b^T y}_{\text{minimiere Ausgaben für Rohstoffe}}$ udN $\underbrace{A^T y \geq c}_{(*)}$, $\underbrace{y \geq 0}_{\text{keine negativen Preise}}$

(*) Angebot muss gesamt mind. so groß wie c sein, da sonst Fabrik 1 mehr ~~geld~~ Geld verdienen würde, ihre Produkte zu produzieren und zu verkaufen - anstatt ihre Rohstoffe zu verkaufen. Dann würde F1 nicht annehmen.

② Streusalzproduzent erhält Auftrag von Prag / Amsterdam (Lager) an Rom, Paris, Berlin zu liefern. Dafür entstehen Transportkosten.

x Transportvektor, x_i ist Menge von / nach

c Transportkostenvektor

b Auftrag und Bestand (gleicht sich aus)

A beschreibt Verhältnis von Transportwegen zum Auftrag

Für Streusalzprod. gilt das PP: $\underbrace{\min c^T x}_{\text{minimiere Transportkosten}}$ udN $\underbrace{Ax = b}_{\text{Auftrag erfüllt}}$, $\underbrace{x \geq 0}_{\nexists \text{ negativer Transport}}$

Dem Streusalzprod. sind die Transportkosten tendenziell zu teuer und überlegt, den Auftrag mit einem zweiten Streusalzprod. zusammen zu erfüllen. Diese transportieren alles, haben aber fast keinen Bestand zurzeit. S2 nimmt Salz von S1, beliefert

Dem Streusalzprod. sind die Transportkosten tendenziell zu teuer und überlegt, den Auftrag mit einem zweiten Streusalzprod. zusammen zu erfüllen. Diese transportieren alles, haben aber fast keinen Bestand zurzeit. S2 nimmt Salz von S1, beliefert und füllt Lager wieder auf. Dafür macht S2 ein Angebot an S1:
$y_1 - y_3$ Kosten für Belieferung, y_4, y_5 Kosten für Bestand auffüllen.
Für S2 gilt dann das zugehörige DP: $\underbrace{\max b^T y}_{\text{maximiere Gewinn}}$ udN $\underbrace{A^T y \le c}_{(*)}$

(*) Angebot darf Transportkosten für S1 nicht übersteigen, denn sonst wäre es besser, einfach direkt zu liefern ohne S2 miteinzubeziehen. (vgl. Afg.)

Es gilt <u>starke Dualität</u>: Der max. Preis von S2 wird dem min. Preis von S1 entsprechen, denn sonst würde S1 seinen urspr. Transport abwickeln
Auch im ersten Bsp. gilt das: Sollten die min. Ausgaben für Rohstoffe nicht gleich den max. Einnahmen von F1 entsprechen, würde F1 also weniger (als sein max) für den Verkauf der Rohstoffe einnehmen, also keinen Deal eingehen.