Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2022/2023

JProf. Dr. Diyora Salimova, Oliver Suchan

Numerik I

Blatt 6 – 16.01.2023

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 8

Abgabe: 27.01.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $n \geq 2$. Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Wenden Sie die Potenzmethode mit Startvektor $y_0 = e_1$ auf die Matrix S an.
Entscheiden Sie, ob die Iteration konvergiert und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)**.** Gegeben sei eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(a) Zeigen Sie für $\mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Abschätzung

$$\min_{1\leq j\leq n} |\lambda_j - \mu| \leq \frac{\|Ax - \mu x\|_2}{\|x\|_2}.$$

Hinweis: Denken Sie daran, dass ein solches A diagonalisierbar ist, d.h. es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Diagonalelement $a_{jj}, j = 1, \ldots, n$, einen Eigenwert λ der Matrix A gibt, welcher der Ungleichung

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \left(\sum_{j\neq k=1} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}$$

genügt.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil (a) mit $x = e_j$.

(c) Vergleichen Sie diese Aussage in (b) grob mit dem Satz vor Gershgorin.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und eine Householder-Transformation $Q_u = I_k - 2uu^*$ mit $u \in \mathbb{C}^k$ und $\|u\|_2 = 1$.
Wir möchten in dieser Aufgabe einsehen, dass man mit einer geschickten Strategie das Produkt $\hat{A} = Q_u A Q_u$ mit einem (asymptotischen) Hauptaufwand von $4k^2$ komplexen Elementaroperationen berechnen kann. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Berechnen Sie das Produkt $\hat{A} = Q_u A Q_u$ durch Ausmultiplizieren.

2. Setzen Sie $v = -2Au$ und vereinfachen Sie das Ergebnis aus 1.
3. Definieren Sie $\alpha = -u^*v$ und $w = v + \alpha u$ und vereinfachen Sie damit weiter.
4. Sehen Sie nun ein, warum der Hauptaufwand der Berechnung in $4k^2$ komplexen Elementaroperationen zu schaffen ist.

Hinweis: Denken Sie daran, dass $\hat{A}$ hermitesch ist. Sie brauchen also nur etwas mehr als die Hälfte aller Einträge überhaupt zu berechnen!

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.