Blatt 6

Donnerstag, 19. Januar 2023 22:42

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $n \geq 2$. Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Wenden Sie die Potenzmethode mit Startvektor $y_0 = e_1$ auf die Matrix S an. Entscheiden Sie, ob die Iteration konvergiert und begründen Sie Ihre Entscheidung.

$y_0 = e_1$ (normiert), $\varepsilon > 0$, $\mu_0 = 0$

$k=0$. $\tilde{y}_1 = Sy_0 = e_n$, $\mu_1 = \|\tilde{y}_1\| = 1$, $y_1 = \frac{\tilde{y}_1}{\|\tilde{y}_1\|} = e_n$, $|\mu_1 - \mu_0| = 1$

$k=1$. $\tilde{y}_2 = Sy_1 = e_{n-1}$, $\mu_2 = 1$, $y_2 = \tilde{y}_2 = e_{n-1}$, $\underbrace{|\mu_2 - \mu_1| = 0 < \varepsilon}_{\text{Abbruch}}$

$k=2$. $\tilde{y}_3 = Sy_2 = e_{n-2}$, $y_3 = e_{n-2}$

$\vdots$

$k=n-1$. $y_n = e_{n-(n-1)} = e_1$ (dann wdh.)

Das Verfahren konvergiert nicht, da die Berechnungen von y_k zyklisch sind ($S^n = Id$)($S^{n+1} = S$).

(Angenommen die Iteration wäre konvergent, dann wäre für k hinreichend groß $\underbrace{S^k y}_{=e_i} \approx \alpha_1 \underbrace{\lambda_1^k}_{=1} v_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ↯)

Sinn der Potenzmethode ist ja (Satz 8.4 (Vorwort)) durch k-maliges Potenzieren am Ende eine Folge (x_k) normierter Eigenvektoren zum betragsmäßig dominierenden Eigenwert zu approximieren. Unere Folge ist aber zyklisch, wird also insbesondere nicht besser mit zunehmenden Iterationen und approximieren den Eigenvektor [1,...,1]^T zu \lambda_1 = 1 zudem nicht.

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte). Gegeben sei eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(a) Zeigen Sie für $\mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Abschätzung d.h. $A = A^*$

$$\min_{1\leq j\leq n} |\lambda_j - \mu| \leq \frac{\|Ax - \mu x\|_2}{\|x\|_2}.$$

Hinweis: Denken Sie daran, dass ein solches A diagonalisierbar ist, d.h. es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D \iff A = UDU^*$

d.h. $U^{-1} = U^*$

Bew. Mit dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned} \|Ax - \mu x\| &= \|UDU^*x - \mu UU^*x\| \\ &= \|U(D - \mu Id)U^*x\| \\ &= \|(D-\mu Id)U^*x\| \\ &\geq \min_j |\lambda_j - \mu| \cdot \|U^*x\| \\ &= \min_j |\lambda_j - \mu| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

, da für orthogonale Matrizen Q $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

∎

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Diagonalelement $a_{jj}, j = 1, \dots, n$, einen Eigenwert λ der Matrix A gibt, welcher der Ungleichung

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \left(\sum_{j \neq k = 1}^{n} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2}$$

genügt.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil (a) mit $x = e_j$.

Bew. // Setze in a) $x = e_j$ und $\mu = a_{jj}$ (fest)

$$\underbrace{\min_k |\lambda_k - a_{jj}|}_{=: |\lambda - a_{jj}|} \leq \frac{\|Ae_j - a_{jj}e_j\|}{\underbrace{\|e_j\|}_{=1}} = \| a^j - a_{jj} e_j \| = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2}$$

a^j: j-te Spalte von A

für λ dasjenige wofür das Minimum angenommen wird.

(c) Vergleichen Sie diese Aussage in (b) grob mit dem Satz vor Gershgorin.

// b) sagt aus: In jedem Intervall $D_j := \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{jj}| \leq \left(\sum_{k \neq j} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2} \}$ liegt mind. ein EW

- haben hier Intervalle in $\mathbb{R}$ anstatt Kreisscheiben bei Gershgorin
- Gershgorin: 1-Norm in den K_i (Kreisscheiben)
  hier: 2-Norm in den D_j
- Satz von Gershgorin gibt uns nur $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, d.h. es kann nicht sichergestellt werden, dass auch in jedem Gershgorinkreis ein EW liegt.
  Hier: wissen, in jedem D_j liegt ein EW.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Gegeben sei eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$ und eine Householder-Transformation $Q_u = I_k - 2uu^*$ mit $u \in \mathbb{C}^k$ und $\|u\|_2 = 1$.
Wir möchten in dieser Aufgabe einsehen, dass man mit einer geschickten Strategie das Produkt $\hat{A} = Q_u A Q_u$ mit einem (asymptotischen) Hauptaufwand von $4k^2$ komplexen Elementaroperationen berechnen kann. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Berechnen Sie das Produkt $\hat{A} = Q_u A Q_u$ durch Ausmultiplizieren.
2. Setzen Sie $v = -2Au$ und vereinfachen Sie das Ergebnis aus 1.
3. Definieren Sie $\alpha = -u^* v$ und $w = v + \alpha u$ und vereinfachen Sie damit weiter.
4. Sehen Sie nun ein, warum der Hauptaufwand der Berechnung in $4k^2$ komplexen Elementaroperationen zu schaffen ist.

Hinweis: Denken Sie daran, dass $\hat{A}$ hermitesch ist. Sie brauchen also nur etwas mehr als die Hälfte aller Einträge überhaupt zu berechnen!

// 1. Berechne $\hat{A} = Q_u A Q_u$

$$\hat{A} = (A - 2uu^*A)(I_k - 2uu^*) = A - 2Auu^* - 2u\underbrace{u^*A}_{=(Au)^*} + 4uu^*Auu^* \dots$$

2. Setze $v = -2Au$

$$\dots = A + vu^* + uv^* - 2uu^*vu^* \dots$$

3. Setze $\alpha = -u^*v$ & $w = v + \alpha u$

dann ist $w = v - u^*vu$

$w^* = v^* - u^* v^* u$ und

$wu^* = vu^* - u^* v u u^* \iff vu^* = wu^* + u^* v u u^* = wu^* - \alpha u u^*$

$uw^* = uv^* - u u^* v^* u \iff uv^* = uw^* + v^* u u u^* = uw^* - \alpha u u^*$

$\uparrow$

$-v^* u = 2u^* A^* u = 2u^* A u = -u^* v = \alpha$

$\dots = A + wu^* \cancel{- \alpha u u^*} + uw^* \cancel{- \alpha u u^*} \cancel{+ 2\alpha u u^*}$

$= A + wu^* + uw^*$

4. Aufwand (Fasse keine Operationen zsm.)

Für jedes $\hat{a}_{ij} = a_{ij} + w_i \bar{u}_j + u_i \bar{w}_j$: 2 Additionen & 2 Multiplikationen

Da $\hat{A}$ symmetrisch (Hinweis), brauchen wir nur die Diagonale und die obere Hälfte zu berechnen $\rightsquigarrow$, d.h. (kleine Gauß) $\frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow$ Für $\hat{A}$: $4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \approx \underline{\underline{2n^2}}$ Elementarop.

Für v : Matrix-Vektor Multiplikation, also für jeden Eintrag $n-1$ Add., n Multipl. und eine Multipl. (mit -2), d.h. für jeden Eintrag $2n$ und für ganz v $\underline{\underline{2n^2}}$ Elementarop.

Für α :
Für w :
$\Big\}$ $O(n)$ Aufwand, also redundant

$\Rightarrow$ insgesamt $2n^2 + 2n^2 = 4n^2$ komplexe Elementarop.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.

1. Eigenwerte

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 1\cdot 5\cdot(1-\lambda) - 0$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 5(1-\lambda) = (1-\lambda)\big((3-\lambda)(2-\lambda) - 5\big)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

2. QR-Verfahren (1 Schritt)

(1) Bestimme QRZ von A (vgl. B4A3):

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$, erhöhe $i \to i+1$, $Q_1 = E_3$

$a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\sigma = +1$, $\|a_2\| = \sqrt{10}$

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\sqrt{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 6\sqrt{10} + 10 + 1}}\tilde{v}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{20 + 6\sqrt{10}}}\begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}_2 = E_2 - 2vv^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{20 + 6\sqrt{10}}\cdot\begin{bmatrix} (3+\sqrt{10})^2 & 3+\sqrt{10} \\ 3+\sqrt{10} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10 + 3\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -\text{''}- \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Wolfram Alpha}}{=} \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$[\tilde{Q}_2]$}} \\ 0 & & \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q_2 Q_1 A = Q_2 A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -\sqrt{10} & -\frac{17\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = R$$

$$\text{mit} \quad Q = Q_1^{-1} Q_2^{-1} = Q_1^T Q_2^T = Q_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{R\cdot Q}^{(A_{k+1})} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{11\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 47/10 & -41/10 \\ 0 & -1/10 & 3/10 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0{,}95 & 3{,}48 \\ 0 & 4{,}7 & -4{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

3. Vergleich

Schon nach einem Schritt im QR-Verfahren gilt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 = (RQ)_{11} \\ \lambda_2 &= \frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4{,}7913 \approx (RQ)_{22} \\ \lambda_3 &= \frac{5-\sqrt{21}}{2} \approx 0{,}2087 \approx (RQ)_{33} \end{aligned}\right\} \text{bzw} \left\{\begin{aligned} |\lambda_1 - (RQ)_{11}| &= 0 \\ |\lambda_2 - (RQ)_{22}| &\approx 0{,}0913 \\ |\lambda_3 - (RQ)_{33}| &\approx 0{,}0913 \end{aligned}\right\}$$

vgl. Satz 8.6 (Diagonaleinträge von A_k appr. EW)