Numerik 3x9

- Approximative Lösung von kontinuierlichen math. Problemen:

z.B.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$ (keine Stammf-n), implizit definiert

$$f(x) = 0$$ (Nullstelle finden).

$$Ax = \lambda x$$ (Eigenwertprobleme)

$$Ax = b$$ (Lineare Gleichungssysteme, LGS)

$$\min_{x\in[0,1]} F(x)$$

I.d. Regel, kann man nicht explizit lösen.

Hauptziel: Konstruktion und Analyse von Algorithmen.

Unterschiedliche Fehlertypen (von Praxis, modellierung).

1) Modellfehler: Modell ist vereinfachte Darstellung.

$$x_t = F(x_{t-1}, x_{t-2}) = a x_{t-1} + b x_{t-2} + c$$

2) Datenfehler: Messfehler bei durchführung Experimenten

3) Rundungsfehler: Computer kann mit endlich villen Zahlen rechnen.

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Normalerweise, kann man nicht vermeiden => Darum es ist auch ausreichend mit approximatives Lösung zu arbeiten.

$$x - 3 = 5 \quad , \quad x = 8 \quad , \quad x = 8.000001$$

4) Verfahrensfehler: Diskretisierungsfehler, aufgrund Ersatzen des Modells durch numerische Approximation.

Typische Fragestellungen in Numerik:

1) Berechenbarkeit (Algorithmik) → realisierbar.

2) Störungseinfluss (Konditionierung und Stabilität)
3) Fehler zwischen berechneter Lösung und exakter Lösung (Konvergenz)
4) Aufwand (Komplexität)

Typische Problemstellungen: LGS, Eigenwertprobleme, Interpolation, Quadratur (numerische Integration), Nullstellen, Anfangswertprobleme (Differentialgleichungen)

Beispiel: $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(\varepsilon \neq 0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + (1+\varepsilon)x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = 2 \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 2 \\ \tilde{x}_1 + (1+\varepsilon)\tilde{x}_2 = 2+\varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \tilde{x}_2 = \varepsilon \Rightarrow \underline{\tilde{x}_2 = 1} \qquad \Rightarrow \underline{\tilde{x}_1 = 1}.$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obwohl die Störung beliebig klein ist, unterscheiden sich x und $\tilde{x}$ sehr stark
$\to$ schlechte kondionierte Aufgabe.

Def. Mathematische Aufgabe ist Auswertung einer Fn $\Phi : X \to Y$
- Φ - Lösungsoperator eines Problems.

2.6. $Ax = b$ $\qquad x = \Phi(A, b) = A^{-1}b$, x hängt von A und b ab.

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = y \quad , \quad y = \Phi(a, b)$$

Def. Aufgabe Φ ist schlecht konditioniert (an der Stelle x), wenn ein klein Störung gibt $\tilde{x} \approx x$ mit der Eigenschaft

$$\frac{|\phi(\tilde{x}) - \phi(x)|}{|\phi(x)|} \gg \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

deutlich grösser

$a \gg b$, $a \geq 100 b$, problemabhängig.

Satz. Multiplikation $\phi(x,y) = x \cdot y$ $(\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ ist gut konditioniert

Beweis:
$$\varepsilon_\phi = \frac{|\tilde{x}\tilde{y} - xy|}{|xy|} = \frac{|\tilde{x}\tilde{y} - x\tilde{y} + x\tilde{y} - xy|}{|xy|} = \frac{|\tilde{y}(\tilde{x} - x) + x(\tilde{y} - y)|}{|xy|}$$

$$\leq \frac{|\tilde{y}(\tilde{x} - x)|}{|xy|} + \underbrace{\frac{|x(\tilde{y} - y)|}{|xy|}}_{\varepsilon_y} = \frac{|\tilde{y}|}{|y|}\varepsilon_x + \varepsilon_y \leq \underline{(\varepsilon_y + 1)\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_y}$$

$$\frac{|\tilde{y}|}{|y|} = \frac{|\tilde{y} - y + y|}{|y|} \leq \frac{|\tilde{y} - y| + |y|}{|y|} = \varepsilon_y + 1$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ klein $\Rightarrow$ ε_ϕ ist auch klein. $\blacksquare$

Gut konditioniert: - Addition zweier Positiven oder zweier negativer Zahlen
Inversion von Null verschiedenen Zahlen

Bsp. $\phi(x,y) = x - y$, $x = 0.677354$, $y = 0.677335$ (x und y sehr ähnlich sind)

$$x - y = 0.19 \cdot 10^{-4}$$

$$\tilde{x} = (1+10^{-4})x, \quad \tilde{y} = y$$

Relative Fehler:

$$\frac{|\phi(\tilde{x},y) - \phi(x,y)|}{|\phi(x,y)|} = \frac{|\tilde{x} - \cancel{y} - x + \cancel{y}|}{|x-y|} = \frac{x \cdot \cancel{10^{-4}}}{0.19 \cdot \cancel{10^{-4}}} \approx 3.56 \quad > 350\%$$

in Daten 0.01% — schlecht konditioniert. ■

Def Verfahren / Algorithmus ist eine Approximation $\tilde{\phi} \approx \phi$ gegeben durch endlich Hintereinanderausführung elementare Operationen

$$\tilde{\phi} = f_y \circ f_{y-1} \circ \dots \circ f_1.$$

$\tilde{\phi}$ heißt instabil, wenn

$$|\tilde{\phi}(\tilde{x}) - \phi(x)| \gg |\phi(\tilde{x}) - \phi(x)|$$

(wenn Verfahrensfehler Störungsfehler dominiert)

$\tilde{\phi}$ heißt stabil, wenn $\tilde{\phi}$ nicht instabil ist.

Def Aufwand der Verfahren $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Anzahl benötigten Elementaroperationen.

Typiserweise die Abhängigkeit von der Problemgröße n untersucht.

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; b \in \mathbb{R}^k$$

$$O(n^p), \; O(n^2)$$

Def. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist von der Ordnung der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $\exists c > 0, N \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n| \leq c \cdot |b_n| \; \forall n \geq N$ gilt.

$a_n = O(b_n)$.

z.B. $\quad a_n = 2n^2 - 1, \quad b_n = n^2 + 1 \implies a_n = O(b_n)$.

$a_n = O(n^2)$, $b_n = O(n^2)$

Bsp. Matrix-Vektor-Multiplikation: Ab , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (c_1 + c_2 + \dots c_n)$$

$$n \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{mult.}}}{n} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{add.}}}{n - 1}) = n \cdot (2n-1) = 2n^2 - n = O(n^2) \text{ – Aufwand}$$

II) Berechnung von $\det(A)$ nach Laplace hat Aufwand $O(n!)$ → sehr schnell wächst.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^p} = \infty \quad \text{für beliebig große } p.$$

$\boxtimes$

Kapitel 2.

Abstand in Vektorraemen:

Def: Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ([0,\infty))$ ist Norm, falls

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreicksungleichung) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (Homogenität)

ℓ^p-Normen:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{j=1,\dots,n} |x_j| & p = \infty \end{cases}$$

Speziel Fall: Euklidische Norm / Länge, $p = 2$

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$= \sqrt{\overset{x\cdot x}{\langle x, x \rangle}} = \sqrt{x^T x}$ (Matrix-Vector Multiplikation)

- ℓ^p-Normen sind äquivalent: $\forall\, 1 \le p,q \le \infty \quad \exists\, C_{p,q} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$C_{p,q}^{-1} \|x\|_p \le \|x\|_q \le C_{p,q} \|x\|_p .$$

$C_{p,q}$ abhängig von p,q, und n.

- Niveaumengen $\to$ nächste Vorlesung.