Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 2 – 31.10.2022

Abgabe: per E-Mail bis Freitag, den 11.11.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num`

Projekt 1 (6 Punkte)**.** Schreiben Sie Programme `solve_upper` und `solve_lower` zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit regulärer oberer beziehungsweise unterer Dreiecksmatrix. Die Lösungen $Ux = b$ und $Lx = b$ sind dabei mit rückwärts beziehungsweise vorwärts laufenden Schleifen gegeben durch

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} x_k \right) / u_{jj}, \quad x_j = \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} x_k \right) / l_{jj},$$

wobei die leere Summe den Wert Null habe. Testen Sie die Routinen für die Gleichugssysteme $A_l x = b_l, l = 1, 2$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 6 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Projekt 2 (6 Punkte)**.** Die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ einer symmetrisch und positiv definiten (spd) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lässt sich wie folgt rekursiv berechnen. Der Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{21} \\ a_{21}^\top & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ l_{21}^\top & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^\top & l_{21} \\ & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} L_{11}^\top & L_{11} l_{21} \\ l_{21}^\top L_{11}^\top & l_{21}^\top l_{21} + l_{22}^2 \end{pmatrix}$$

für $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, a_{21} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $a_{22} \in \mathbb{R}$ liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} L_{11} l_{21} &= a_{21} \\ \text{und} \quad l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^\top l_{21}}, \end{aligned} \tag{1}$$

um aus der Cholesky-Zerlegung $A_{11} = L_{11} L_{11}^\top$ von A_{11} die Cholesky-Zerlegung von A zu berechnen. In jedem Rekursionsschritt sind die Größen L_{11}, a_{21}, a_{22} gegeben und die Größen l_{21} und l_{22} gesucht.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `cholesky(A)` die zu einer gegebenen Matrix A den Cholesky-Faktor L rekursiv berechnet und diesen zurückgibt. (Sie dürfen davon ausgehen, dass die Eingabe `A` tatsächlich spd ist.)
Verwenden Sie `solve_triangular()` aus `scipy.linalg` (Python) bzw. `linsolve(_)` mit `opts.LT = true` (Matlab) zur Vorwärtselimination von (1).

(b) Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ den Cholesky-Faktor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

berechnen und damit die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für den Vektor $b = -(1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ bestimmen.
Hinweis: Gibt es eine Funktion mit der Sie direkt die Matrix A erzeugen können?

(c) Plotten Sie die berechnete Lösung `x` für $n = 100$. Verwenden Sie dafür die Funktion `plot(x)` (in Python aus dem Paket `matplotlib.pyplot`).
Hinweis: Das Resultat sollte eine Parabel sein.