



Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 3 – 14.11.2022

Abgabe: per E-Mail bis Freitag, den 25.11.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agsa/lehre/ws22/num>

Projekt 1 (6 Punkte).

- Schreiben Sie ein Programm, das für eine LU -zerlegbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination löst und dabei die LU -Zerlegung von A bestimmt.
- Erweitern Sie Ihr Programm aus (a) um eine Spalten-Pivotsuche. Führen Sie dazu einen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ ein, der die Zeilenvertauschungen berücksichtigt. Implementieren Sie zudem ein Abbruchkriterium, das das Verfahren beendet, sofern für das Pivotelement $|a_{\pi(k),k}^{(k)}| \leq 10^{-10}$ gilt. Beim Lösen des resultierenden Gleichungssystems sind in der Rückwärtssubstitution die Zeilenvertauschungen zu beachten.

Projekt 2 (6 Punkte).

- Verwenden Sie Ihr Programm aus Projekt 1 um eine Funktion zu implementieren, die für eine beliebige reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ihre Inverse Matrix A^{-1} bestimmt. Testen Sie Ihre Funktion um das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

- Stören Sie die rechte Seite des nachfolgenden Gleichungssystems mit dem Vektor $d \in \mathbb{R}^n$, $d_i = 10^{-5} \cos(i\pi/n)$ für $i = 1, \dots, n$ und $n = 10$:

$$a_{ij} = (i + j - 1)^{-1}, b_i = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} / (i + k - 1), x_i = (-1)^{i-1}, i, j = 1, \dots, n.$$

Berechnen Sie die Lösung x_d des gestörten Gleichungssystems mithilfe Ihres Programms aus Projekt 1. Betrachten Sie den relativen Fehler $\|x - x_d\|_2 / \|x\|_2$ und vergleichen Sie diesen mit der Konditionszahl der Matrix, die Sie mit dem Matlab-Befehl `cond(A, 2)` bzw. der NumPy-Funktion `numpy.linalg.cond(A, 2)` bestimmen können. Kommentieren Sie kurz die Ergebnisse.