Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II

Blatt 1

Abgabe: 25. April 2018

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** In $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ gilt $4 = 16$. Zeige, dass das Polynom $T^2 - 4$ mindestens vier Nullstellen in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ besitzt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Ein Polynom über einen Körper $\mathbb{K}$ heißt *additiv*, falls

$$P(T_1 + T_2) = P(T_1) + P(T_2),$$

als Polynom in den Variablen T_1 und T_2.

(1) Zeige, dass das Polynom $T^p - T$ additiv ist, wenn $\mathbb{K}$ Charakteristik $p > 0$ hat.

Nimm nun an, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und betrachte ein additives Polynom $P(T) = \sum_{n=0}^{D} a_n \cdot T^n$.

(2) Zeige, dass $P(0) = a_0 = 0$.
(3) Zeige, dass die differenzierbare Funktion $x \mapsto P(x) - a_1 \cdot x$ konstant ist.
(4) Schließe daraus, dass $P(T) = a_1 \cdot T$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei R ein Integritätsbereich.

(1) Zeige, dass für jedes $a \neq 0$ in R die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R \\ x & \mapsto & a \cdot x \end{array}$$

injektiv ist.
(2) Schließe daraus, dass R ein Körper ist, wenn R endlich ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Gegeben seien ein Körper $\mathbb{K}$ und ein Teilkörper $L \subset \mathbb{K}$. Es sei ein Element a in $\mathbb{K}$ derart, dass es ein nicht-triviales Polynom $P(T)$ aus $L[T]$ gibt, sodass $P(a) = 0$.

(1) Zeige, dass es ein normiertes Polynom $m_a(T)$ aus $L[T]$ kleinsten Grades gibt, sodass $m_a(a) = 0$.
(2) Zeige mit Hilfe des Divisionsalgorithmus, dass a genau dann Nullstelle eines Polynoms $Q(T)$ aus $L[T]$, wenn $m_a(T)$ das Polynom Q teilt.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.