Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 10
Abgabe: 4. Juli 2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien u und v zwei Vektoren aus dem euklidischen Raum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ derart, dass

$$||v-u|| = ||v+u||.$$

Zeige, dass u und v orthogonal sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei U ein Unterraum des endlichdimensionalen euklidischen Raumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Falls v aus V sich als $v = u + v'$ schreiben lässt, wobei u aus U und v' aus dem orthogonalen Komplement $U^\perp$ kommen, zeige, dass gilt

$$||v-u_1|| > ||v-u||$$

für alle $u_1 \neq u$ aus U.
HINWEIS: Der Vektor $u - u_1$ liegt in U, aber $v - u = v'$ liegt in $U^\perp$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Auf $\mathbb{R}^4$, definiere eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis.

(1) Zeige, dass $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum ist.
(2) Sei U der von den Vektoren $(1,1,1,1)^t$ und $(3,3,-1,-1)^t$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Beschreibe durch lineare Gleichungen das orthogonale Komplement $U^\perp$ in $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
(3) Bestimme eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ in $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
(4) Ergänze die Basis aus (3) zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeige folgende Aussagen:

(1) Die Summe zwei symmetrischer $(n \times n)$-Matrizen ist wiederum symmetrisch.
(2) Die Summe zwei positiv definiter $(n \times n)$-Matrizen ist wiederum positiv definit.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Ernst-Zermelo-Straße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.