Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 11
Abgabe: 11. Juli 2018

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** (1) Seien U und W Unterräume eines endlichdimensionalen euklidischen Raumes V derart, dass $P \circ Q = 0$ ist, wobei P die orthogonale Projektion auf U und Q die orthogonale Projektion auf W sind. Was kann man über U und W sagen?

(2) Betrachte nun die folgende reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von elementaren Methoden, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen, bestimme die Eigenwerte von A und finde eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt.

(3) Zeige mit der obigen Notation, dass der von A definierte Endomorphismus $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sich als $F_A = \lambda P + \mu Q$ schreiben lässt, für geeignete Skalaren λ und μ, und orthogonale Projektionen P und Q mit

$$P \circ Q = 0 \text{ und } P + Q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine beliebige Basis eines endlichdimensionalen unitären Raumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Definiere folgenden Endomorphismus F von V als

$$F(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i.$$

(1) Zeige, dass $\langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle$ für alle v und w aus V.
(2) Zeige, dass $\langle v, F(v) \rangle$ eine nicht-negative reelle Zahl ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ euklidische Räume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung derart, dass eine lineare Abbildung $G : W \to V$ existiert mit

$$\langle w, F(v) \rangle_W = \langle G(w), v \rangle_V \text{ für alle } v \in V\,,\ w \in W.$$

(1) Zeige, dass G mit der obigen Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.
(2) Zeige, dass das orthogonale Komplement $F(U)^\perp$ von $F(U)$ in W gleich der Menge $G^{-1}(U^\perp)$ ist, für jeden Unterraum U von V.
(3) Schließe daraus, dass $U^\perp$ F^t-invariant ist, falls U F-invariant ist, für jeden Endomorphismus $F : V \to V$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $F : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Raumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, das heißt,

$$\langle u, F(w) \rangle = \langle F(u), w \rangle \text{ für alle } v, w \text{ aus } V.$$

Bestimme $\mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Im}(F)$. Schließe daraus, dass $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Ernst-Zermelo-Straße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.