Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II

Blatt 12

Dieses Blatt wird nicht korrigiert!!

Aufgabe 1. Sei A eine relle $(n \times n)$-Matrix derart, dass $A^t = A$ ist und $A^2 = 0$. Zeige, dass $A = 0$.

Aufgabe 2. Sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische reelle $(n \times n)$-Matrix derart, dass jeder Hauptminor positiv ist:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0.$$

Zeige, dass es eine reelle Matrix B gibt, mit $B^2 = A$.

Aufgabe 3. Seien $a_1, \dots a_n$ Elemente aus $\mathbb{R}$, nicht alle Null und betrachte die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_i \cdot a_j)$.

(1) Ist A diagonalisierbar?
(2) Für den Vektor $u = (a_1, \dots, a_n)^t$ aus dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt, bestimme die Dimension von $\operatorname{Span}(u)^\perp$ und gib eine Orthonormalbasis an.
(3) Finde die Hauptachsen von A.
HINWEIS zu (3): Schreibe $A = w \cdot w^t$, für ein geeignetes w aus $\mathbb{R}^n$.
(4) Bestimme das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 4. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Transformation des euklidischen Raumes mit Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis.

(1) Zeige, dass A eine Drehung ist.
(2) Bestimme den Eigenraum zum Eigenwert 1.
(3) Mit Hilfe einer geeigneten Orthonormalbasis bestimme den Drehwinkel.
