Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Sommersemester 2018
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Lineare Algebra II
Blatt 2
Abgabe: 2. Mai 2018

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$, seien A und B äquivalente $n \times n$-Matrizen: das heißt, es existieren invertierbare Matrizen S und T derart, dass $B = T^{-1} \cdot A \cdot S$.

(1) Zeige, dass der obige Begriff der Äquivalenz eine Äquivalenzrelation zwischen $n \times n$-Matrizen definiert.
(2) Zeige, dass A genau dann regulär ist, wenn B regulär ist.
(3) Wenn A regulär und äquivalent zu B ist, zeige, dass A^{-1} und B^{-1} auch äquivalent sind.
(4) Zwei äquivalente Matrizen A und B sind ähnlich, wenn $S = T$ in der obigen Definition. Sind folgende Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ähnlich?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Gegeben seien zwei lineare Abbildungen $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeige, dass es einen nicht-trivialen Vektor v in $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass $F(v) = G(v) = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für eine gegebene reelle Zahl $\alpha \in [0, 2\pi)$, betrachte die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(1) Berechne die Determinante $\det(A_\alpha)$.
(2) Berechne die Inverse A_α^{-1}.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Gegeben seien ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V und ein Endomorphismus $F : V \to V$. Seien v ein Vektor aus V und n eine natürliche Zahl derart, dass $F^n(v) = \underbrace{F \circ F \ldots \circ F}_{n}(v) = 0$ aber $F^{n-1}(v) \neq 0$.

(1) Zeige, dass der Unterraum $U = \operatorname{Span}\{v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)\}$ genau Dimension n hat.
(2) Zeige, dass $F(U) \subset U$ (d.h. U ist F-*invariant*). Was ist die Dimension von $F(U)$?

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.