Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Sommersemester 2018
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Lineare Algebra II
Blatt 4
Abgabe: 16. Mai 2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $F : V \to V$ ein Endomorphismus des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und U ein Unterraum von V. Für ein beliebiges λ aus $\mathbb{K}$ zeige, dass U genau dann F-invariant ist, wenn U invariant bezüglich dem Endormorphismus $F - \lambda \cdot \mathrm{Id_V}$ ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Gegeben seien eine natürliche Zahl n und ein beliebiger Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0. Betrachte die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme die Dimension r von $\mathrm{Ker}(A)$ und gib eine Basis $\{v_1, \ldots, v_r\}$ vom Kern an.
(2) Zeige, dass es einen Vektor w aus $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gibt derart, dass $A \cdot w = w$.
(3) Sind $w, v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig?
(4) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Für gegebene Polynome

$$P(T) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i \text{ und } Q(T) = \sum_{j=0}^{r} b_j T^j,$$

über $\mathbb{K}$ zeige, dass $P(F) \circ Q(F)$ mit dem Endomorphismus $R(F)$ übereinstimmt, wobei

$$R(T) = P(T) \cdot Q(T) = \sum_{k=0}^{m+r} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) T^k.$$

Schließe daraus, dass $P(F) \circ Q(F) = Q(F) \circ P(F)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V über einem Körper K.

(1) Falls $\mathrm{Ker}(F^m) = \mathrm{Ker}(F^{m+1})$ für eine natürliche Zahl m, zeige mit Induktion, dass $\mathrm{Ker}(F^m) = \mathrm{Ker}(F^{m+l})$ für jedes l aus $\mathbb{N}$.
(2) Zeige, dass es eine kleinste natürliche Zahl m gibt, sodass $\mathrm{Ker}(F^m) = \mathrm{Ker}(F^{m+1})$. Insbesondere gilt $m \leq \dim(V)$ und

$$V = \mathrm{Ker}(F^m) \oplus F^m(V).$$

HINWEIS: Zeige, dass $\mathrm{Ker}(F^m) \cap F^m(V) = \{0\}$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.