Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 5
Abgabe: 30. Mai 2018

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ mit charakteristichem Polynom $\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$.

Falls $\sum_{i=0}^{n-1} b_i = 0$, zeige, dass $E_n - A$ invertierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem Körper K. Falls A diagonalisierbar ist, zeige, dass A und ihre transponierte Matrix A^t ähnlich sind.

HINWEIS: $(B \cdot C)^t = C^t \cdot B^t$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{C}$ derart, dass $A^k = A$ für eine natürliche Zahl $k > 1$. Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

HINWEIS: Das Minimalpolynom von A ist ein Polynom über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Sei A die folgende (3×3)-Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ und seine Nullstellen.
(2) Bestimme die Eigenräume und die Haupträume von A.
(3) Ist A diagonalisierbar?
(4) Bestimme das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem Körper K der Charakteristik ungleich 2 derart, dass $(A - E_n)(A + E_n)(A^2 + A + E_n)(A^3 + A^2 + A + E_n) = E_n$.
Zeige, dass A invertierbar ist.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.