Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 7
Abgabe: 13. Juni 2018

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller (2×2)-Matrizen mit koordinatenweiser Addition.

(1) Zeige, dass folgende Matrizen

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

(2) Zeige, dass die Spur

$$\mathrm{Tr}: V \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$$

eine lineare Abbildung ist.

(3) Bestimme die Koordinaten von Tr bezüglich der dualen Basis zu $\{u_1, \ldots, u_4\}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Für einen Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$, definiere folgende Abbildung

$$\varphi : V \times V^* \to \mathbb{K}, \quad (v, F) \mapsto F(v).$$

(1) Zeige, dass $\varphi(\lambda \cdot v + \mu \cdot w, F) = \lambda \cdot \varphi(v, F) + \mu \cdot \varphi(w, F)$.
(2) Zeige, dass $\varphi(v, \lambda \cdot F + \mu \cdot G) = \lambda \cdot \varphi(v, F) + \mu \cdot \varphi(v, G)$.
(3) Angenommen, dass $\varphi(v, F) = 0$ für jedes v aus V. Was kann man über F sagen?
(4) Falls V endlichdimensional ist und $v \neq 0$, zeige, dass es ein F in V^* derart gibt, dass $\varphi(v, F) \neq 0$.
HINWEIS zu (4): Betrachte eine Basis von V.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiere $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$.

(1) Für einen Unterraum U von $\mathbb{R}^n$, zeige, dass die Menge

$$W = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, y \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Unterraum ist.

(2) Sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U, wobei $u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in})$ für $1 \leq i \leq k$. Zeige, dass $(y_1, \ldots, y_n)$ genau dann in W liegt, wenn

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{k1} & \cdots & u_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{0}.$$

Was ist die Dimension von W?

(3) Zeige, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.
HINWEIS: Beschreibe $U \cap W$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.