Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 8
Abgabe: 20. Juni 2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Betrachte Elemente $f_1, \ldots, f_n$ im Dualraum V^* und deren Einschränkungen $f_1 \restriction U, \ldots, f_n \restriction U$ als Elemente von U^*. Zeige folgende Aussagen:

(1) Falls $f_1 \restriction U, \ldots, f_n \restriction U$ linear unabhängig sind, so sind auch $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig.
(2) Falls $f_1, \ldots, f_n$ ein Erzeugendensystem von V^* bilden, dann erzeugen $f_1 \restriction U, \ldots, f_n \restriction U$ den Raum U^*.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome über K vom Grad höchstens 2. Definiere folgenderweise die Elemente F, G und H im Dualraum V^*:

$$F : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ p(T) & \mapsto & p(0) \end{array} \quad G : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ p(T) & \mapsto & p(1) \end{array} \quad H : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ p(T) & \mapsto & \frac{\partial p}{\partial T}(0) \end{array} .$$

(1) Sind F, G und H linear unabhängig?
(2) Sei
$$\varphi : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ p(T) & \mapsto & p(-1) \end{array} .$$
Sind F, G, H und φ linear unabhängig? Wenn nicht, stelle φ als Linearkombination von F, G und H dar.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \times W \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung mit Darstellungsmatrix $A = (a_{ij})$ bezüglich der Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V und $\{c_1, \ldots, c_m\}$ von W, das heißt, $a_{ij} = \varphi(b_i, c_j)$.

(1) Zeige, dass die Abbildung
$$\varphi' : \begin{array}{ccc} W \times V & \to & \mathbb{K} \\ (w, v) & \mapsto & \varphi(v, w) \end{array}$$
eine bilineare Abbildung ist.
(2) Bestimme die Darstellungsmatrix von φ' bezüglich der Basen $\{c_1, \ldots, c_m\}$ und $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Was ist der Rang dieser Matrix bezüglich $\mathrm{Rg}(A)$?

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \times W \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung.

(1) Für einen Unterraum U von V, zeige, dass $W_1 = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0 \ \forall u \in U\}$ ein Unterraum von W ist.
(2) Zeige, dass die Abbildung $\tilde{\varphi} : \begin{array}{ccc} V/U \times W_1 & \to & \mathbb{K} \\ (\bar{v}, w) & \mapsto & \varphi(v, w) \end{array}$ wohldefiniert und bilinear ist.
(3) Angenommen, dass φ nicht-ausgeartet ist, zeige, dass $\tilde{\varphi}$ auch nicht-ausgeartet ist.
HINWEIS zu (3): (V, W, φ) ist ein duales Paar.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Ernst-Zermelo-Straße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.