Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 9
Abgabe: 27. Juni 2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und definiere:

$$||\bar{x}||_{\infty_1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ und } ||\bar{x}||_{\infty_2} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

(1) Zeige, dass $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\infty_1})$ und $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\infty_2})$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume sind.
(2) Zeige, dass es eine Konstante $K > 0$ aus $\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$K^{-1}||\bar{x}||_{\infty_2} \leq ||\bar{x}||_{\infty_1} \leq K||\bar{x}||_{\infty_2},$$

für jedes $\bar{x}$ aus $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Ein Unterraum U eines normierten $\mathbb{R}$-Vektorraumes $(V, ||\cdot||)$ ist *abgeschlossen*, falls gilt:

$$v \in V \text{ und } \lim_{n\to\infty} ||v - u_n|| = 0 \text{ für eine Folge } U^{\mathbb{N}} \ni (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \Rightarrow \quad v \in U.$$

Sei nun U ein abgeschlossener Unterraum von V und definiere auf dem Quotientenraum V/U folgende Abbildung

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot||_U : & V/U & \to & \mathbb{R} \\ & v+U & \mapsto & \inf_{u\in U} ||v-u|| \end{array}.$$

(1) Zeige, dass $||\cdot||_U$ wohldefiniert ist.
(2) Zeige, dass $||\cdot||_U$ eine Norm auf V/U definiert.

HINWEIS: $\inf_{u\in U} ||v-u|| = C \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, u_n \in U$, so dass $||v - u_n|| < C + \frac{1}{n}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.** Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2 mit Basis $\{v_1, v_2\}$ und Elemente a, b und c aus $\mathbb{R}$ derart, dass $a > 0 > b^2 - ac$. Betrachte die folgende quadratische Form:

$$\begin{array}{rccc} q : & V & \to & \mathbb{R} \\ & \lambda v_1 + \mu v_2 & \mapsto & a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2. \end{array}$$

(1) Bestimme die Matrix A der zugehörigen Bilinearform φ.
(2) Zeige, dass $\det(A) > 0$.
(3) Bestimme mit elementaren Methoden die Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?
(4) Zeige, dass (V, φ) ein euklidischer Raum ist.
HINWEIS zu (4): Die positive Definitheit von φ hängt nicht von der Basis ab.
(5) Konstruiere aus der Basis $\{v_1, v_2\}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich φ.
(6) Bestimme das orthogonale Komplement vom Unterraum $U = \mathrm{Span}(v_1 + v_2)$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Ernst-Zermelo-Straße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.