Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

**Lineare Algebra II**

**Klausur**

**02. 08. 2018**

**Dauer:** 3 Stunden

**Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben (insgesamt 84 Punkte).**

**Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab.**

**Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.**

**Viel Erfolg!**

**Name**: ........................

**Vorname**: ........................

**Matrikelnummer**: ........................

**Unterschrift**: ........................

**Note**

| **Aufgabe** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Max. Punkte** | 12 | 20 | 20 | 12 | 20 | 84 |
| **Punkte erreicht** | | | | | | |

# Begründe alle Antworten!

**Aufgabe 1** (20 Punkte)**.**
Sei $A$ folgende reelle $(3 \times 3)$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von $A$.
(b) Bestimme die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes von $A$.
(c) Ist $A$ diagonalisierbar?
(d) Bestimme die Haupträume von $A$ und gib eine Jordansche Normalform für $A$ an.
(e) Bestimme das Minimalpolynom von $A$ mit Hilfe von (d).

**Aufgabe 2** (12 Punkte)**.**

(a) Sei $F$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Raumes $V$. Definiere den adjungierten Endomorphismus $F^t$ und zeige, dass $F^t$ eindeutig bestimmt ist.
(b) Wann ist $F$ normal? Zeige, dass in diesem Fall $F$ und $F^t$ dieselben Eigenvektoren besitzen.
(c) Falls $F$ normal ist, zeige, dass das orthogonale Komplement vom $F$-Eigenvektor $v$ unter die Abbildung $F$ invariant ist.

**Aufgabe 3** (20 Punkte)**.**
Betrachte folgende Abbildung auf dem Raum $V$ der Polynome $P(T)$ über $\mathbb{R}$ des Grades höchstens 2:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (P(T), Q(T)) & \mapsto & P(-1) \cdot Q(-1) \end{array}.$$

(a) Zeige, dass $\varphi$ eine symmetrische Bilinearform ist.
(b) Finde die Darstellungsmatrix von $\varphi$ bezüglich der Basis $\{1, T, T^2\}$
(c) Berechne die zu $\varphi$ gehörige quadratische Form $q$.
(d) Zitiere den Satz von Sylvester. Ist $\varphi$ positiv definit?

**Aufgabe 4** (12 Punkte)**.**

(a) Definiere den dualen Raum eines Vektorraumes $V$ über dem Körper $K$.
(b) Sei $U$ ein Untervektorraum von $V$ und betrachte Elemente $f_1, \dots, f_n$ im Dualraum $V^*$. Falls die Einschränkungen $f_1 \restriction U, \dots, f_n \restriction U$ linear unabhängig sind, zeige, dass $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig sein müssen. Gilt die Rückrichtung?
(c) Sei nun $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis Basis $B$ und

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

Sei $U^0$ die Menge der Elemente aus $V^*$, deren Einschränkung auf $U$ Null ist. Beschreibe die Koordinaten eines beliebigen Elementes aus $U^0$ bezüglich der dualen Basis von $B$.
(d) Gib eine Basis von $U^0$ an. Was ist seine Dimension?

**Aufgabe 5** (20 Punkte)**.**
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung des euklidischen Raumes mit Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis.

(a) Zeige, dass $F$ eine orthogonale Abbildung ist.
(b) Ohne die Determinante zu berechnen, ist $A$ regulär?
(c) Bestimme eine Orthonormalbasis vom orthogonalen Komplement des Eigenraumes zum Eigenwert 1.
(d) Berechne die Determinante von $A$.
(e) Beschreibe vollständig die geometrische Interpretation der Transformation $F$.