Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Dr. Keith Anguige Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 12 Lösungen

Aufgabe 1. A symmetrisch $\Rightarrow\ \exists\, Q \in \mathbb{R}^{n\times n} : QQ^\top = I$ und eine Diagonalmatrix D, sodass $A = Q^\top DQ$.

Es gilt

$$0 = A^2 = Q^\top DQQ^\top DQ = Q^\top D^2 Q \quad \overset{(Q \text{ regulär})}{\Longrightarrow} \quad D^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

Aufgabe 2. Das Kriterium von Sylvester ergibt, dass A positiv definit ist. Also es gibt eine Zerlegung $A = Q^\top DQ$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i > 0\ \forall i$.

Sei nun $B := Q^\top \sqrt{D}Q$, mit $\sqrt{D} := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_\mathrm{n}})$. Also B ist reell und es gilt $B^2 = Q^\top \sqrt{D}QQ^\top \sqrt{D}Q = Q^\top DQ = A$.

Aufgabe 3. (1) $A_{ij} = a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i = A_{ji} \Rightarrow A = A^\top \Rightarrow A$ diagonalisierbar.

(2) $u \neq 0 \Rightarrow\ \dim \operatorname{Sp}(u) = 1$. Ausserdem ist $\mathbb{R}^n = \operatorname{Sp}(u) \oplus \operatorname{Sp}(u)^\perp \Rightarrow \dim \operatorname{Sp}(u)^\perp = n - 1$.

(3) $\operatorname{Sp}(u)^\perp$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $u^\top x = 0$. Eine Basis davon ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

falls $a_1 \neq 0$; sonst permutiere.

Eine ONB finden wir mit Gram-Schmidt - nennen wir die obige Basis $\{v_i\}$, dann ist eine (noch zu normalisierende) Orthogonalbasis iterativ gegeben durch

$$u_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i.$$

Für allgemeine a_i und n ist es etwas umständlich mit dieser Methode eine ONB explizit hinzuschreiben.

Eine Alternative: finde eine Householder Matrix (siehe Wikipedia oder ein gutes Buch zum Thema Numerik (d.h. Bartels)) Q die z.B. e_1 auf $\hat{u} := u/\|u\|$ spiegelt. Dann sind die 2-bis-n-ten Spalten von Q eine ONB von $\operatorname{Sp}(u)^\perp$. Eine solche Matrix ist $Q = E_n - 2vv^\top$, $v = (e_1 - \hat{u})/\|e_1 - \hat{u}\|$ mit j-ter Spalte $e_j - 2v_j v$.

(3) $Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow u(u^\top v) = \lambda v, v \neq 0$. Also entweder $\lambda = 0$ und $u^\top v = 0$ oder $0 \neq v \propto u$ und $\lambda = u^\top u \neq 0$. Die Hauptachsen sind somit u zusammen mit einer ONB von $\operatorname{Sp}(u)^\perp$.

(4) A hat die Eigenwerte $\lambda = 0$ und $u^\top u$, wobei $\lambda = 0$ einen $(n-1)$-dimensionalen Eigenraum hat. Also $\lambda = 0$ hat algebraische Vielfachheit $\geq n-1$ - diese Vielfachheit muss eigentlich genau $(n-1)$ sein, da $\lambda = u^\top u$ Vielfachheit ≥ 1 hat. Somit ist $\mathcal{X}_A(T) = (T - u^\top u)T^{n-1}$. Ausserdem

ist A diagonalisierbar und daher (Satz aus der Vorlesung) zerfällt das Minimalpolynom in verschiedene Linearfaktoren. Das Minimalpolynom und $\mathcal{X}_A$ haben die gleichen Nullstellen und somit ist $m_A = (T - u^\top u)T$.

Aufgabe 4. (1) Man berechne leicht, dass die Spalten der Matrix orthonormal sind. Ausserdem ist die Determinante gleich 1. Also, die Transformation ist eine Drehung.

(2) Mit Gauß (wem sonst?) finden wir den Eigenraum $\mathrm{Sp}(1,1,0)^\top$ zum Eigenwert 1.

(3) Zwei orthonormale Vektoren im orthog. Komp. von $\mathrm{Sp}(1,1,0)^\top$ sind z.B. $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top$ und $(0,0,1)^\top$. Also eine ONB von $\mathbb{R}^3$ mit einem Bein entlang des Eigenvektors ist $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top, (0,0,1)^\top$.

Sei $v_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top$ und $v_2 = (0,0,1)^\top$. Dann berechnen wir leicht $Av_1 = -v_2, Av_2 = v_1$, also bzgl. der ONB v_1, v_2 von $(\mathrm{Sp}(1,1,0)^\top)^\perp$ hat die Drehung die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und somit muss der Drehwinkel um $(1,1,0)^\top$ gleich $\frac{\pi}{2}$ sein [ok... $\frac{3\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn mit v_1, v_2 orientiert wie e_1, e_2 - Herrn Pizarro's Konvention].