Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2018

Lineare Algebra II
Blatt 1 Lösungen

Aufgabe 1. $(\pm 2)^2 - 4 = 0$ und $(\pm 4)^2 - 4 = 12 \cong 0$.

Aufgabe 2. (1)[4 Punkte]

$$(T_1 + T_2)^p - (T_1 + T_2) := \underbrace{(T_1 + T_2)\dots(T_1 + T_2)}_{p-\text{mal}} - (T_1 + T_2).$$

Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist muss p eine Primzahl sein (Fischer, Lemma 1.3.4).
Beh. Für eine Primzahl p sind die binomischen Koeffizienten von $(T_1 + T_2)^p$ (abgesehen vom ersten und vom letzten) teilbar durch p .
Bew. Sei $0 < k < p$.

$$\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{p \cdot (p-1) \dots (p-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 1}$$

ist eine natürliche Zahl, wobei p den Zähler aber nicht den Nenner teilt (Lemma von Euklid).
Also (nochmal Euklid) p teilt $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.
Da $p = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p-\text{mal}} = 0$ gilt also

$$P(T_1+T_2) = (T_1+T_2)^p - (T_1+T_2) = T_1^p + T_2^p - (T_1+T_2) = (T_1^p - T_1) + (T_2^p - T_2) = P(T_1) + P(T_2).$$

(2)[1 Punkt]

$$P(0) = P(0+0) = P(0) + P(0) \Rightarrow P(0) = a_0 = 0.$$

(3)[2 Punkte]

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{(P(x+h) - a_1(x+h)) - (P(x) - a_1 x)}{h} &= \\ \lim_{h\to 0} \frac{P(h) - a_1 h}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_D h^D - a_1 h}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also $P(x) - a_1 x$ ist konstant.
(4)[1 Punkt] Nach (2) ist die Konstante in (3) gleich 0, und daher $P(T) = a_1 T$.

Aufgabe 3. (1)[2 Punkte] Sei $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow a \cdot (x - y) = 0 \Rightarrow x = y$, da R nullteilerfrei und $a \neq 0$.

(2)[2 Punkte] 'Injektiv' und 'Surjektiv' sind äquivalente Begriffe für eine Abbildung auf einer endlichen Menge (LA1, Satz 1.8). Also für $0 \neq a \in R$ beliebig hat die Gleichung $a \cdot x = 1$ eine Lösung, und somit existiert ein multiplikatives Inverses a^{-1}. Daher ist R ein Körper.

Aufgabe 4. (1)[2 Punkte] Sei

$$M = \{\mathbb{N} \ni n \leq \deg(P) : \ \exists\, Q(T) \in L[T], \text{ normiert mit } \deg(Q) = n, \text{ s.d. } Q(a) = 0\}.$$

Nach Annahme ist M nichtleer und endlich - hat also ein kleinstes Element, n_0. Folglich existiert $Q(T) \in L[T]$ mit $\deg(Q) = n_0 \geq 1$ und $Q(a) = 0$.

(2)[4 Punkte] ($\Rightarrow$) Sei $Q(T) = m_a(T)G(T)$ für ein $G(T) \in L[T]$. Dann gilt

$$Q(a) = m_a(a)G(a) = 0 \cdot G(a) = 0.$$

($\Leftarrow$) Sei $Q(T) \in L[T], Q(a) = 0$. Nach dem Divisionsalgorithmus existieren $q(T), r(T) \in L[T]$ mit $\deg(r) < \deg(m_a)$, sodass

$$Q(T) = q(T)m_a(T) + r(T).$$

Nach Einsetzen von a folgt sofort $r(a) = 0$, und daher auch $r = 0$ in $L[T]$ – sonst könnten wir r normalisieren und der Definition von m_a widersprechen. Also m_a teilt Q.