

Lineare Algebra II

Blatt 6 Lösungen

Aufgabe 1. [4 Punkte] \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen, also es ist entweder

$$(1) \mathcal{X}_A(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2), \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{oder} \quad (2) \mathcal{X}_A(T) = (T - \lambda_1)^2.$$

Im Falle (1) hat λ_1 einen Eigenvektor v_1 und λ_2 einen Eigenvektor v_2 , wobei v_1 und v_2 lin. unabhängig sind, da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer lin. unabhängig sind. Bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$ ist $A \sim \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Im Falle (2) ist $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 \cdot \text{Id}) = 1$ oder 2. Falls $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 \cdot \text{Id}) = 2$ existiert eine Basis $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren zu λ_1 , sodass $A \sim \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1)$ bzgl. dieser. Zu guter Letzt, sei $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 \cdot \text{Id}) = 1$, wähle einen Vektor ($0 \neq$) $v \notin \text{Eig}(A; \lambda_1)$ und setze $w = (A - \lambda_1)v \neq 0$. Es gilt

$$(A - \lambda_1)w := (A - \lambda_1)^2v = 0 \quad (\text{Cayley - Hamilton, z.B.})$$

Also $Aw = \lambda_1 w$ und $Av = w + \lambda_1 v$. Bzgl. der Basis (w, v) (v, w lin. unabhängig, sonst wäre v ein Eigenvektor) ist

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Man kommt auch gut ohne Cayley-Hamilton aus:

Sei v ein Eigenvektor: $Av = \lambda_1 v$. Ergänze mit w zu einer Basis von \mathbb{C}^2 (w kein Eigenvektor, sonst wäre $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 \cdot \text{Id}) = 2$). Dann gilt $Aw = \alpha v + \beta w$, $\alpha \neq 0$. Setze $\hat{w} = \frac{1}{\alpha}w \Rightarrow A\hat{w} = v + \beta\hat{w}$. Bezüglich der Basis (v, \hat{w}) ist

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Also β ist Eigenwert von $A \Rightarrow \beta = \lambda_1$.

Aufgabe 2. (1) [2 Punkte] Der Gaußalgorithmus ergibt $\mathcal{X}_A(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 1)$. Die Eigenwerte sind 0 und 1.

(2) [2 Punkte] $1 \leq \dim \text{Eig}(A; 1) \leq 1 = \text{ord}_{\lambda=1}(A) \Rightarrow \dim \text{Eig}(A; 1) = 1$.

Es gilt offensichtlich $\text{rank}(A) = 3 \Rightarrow \dim \text{Ker}(A) = \dim \text{Eig}(A; 0) = 2$.

(3) [2 Punkte] $\text{Hau}(A; 1) = \ker(A - E_5) \stackrel{(\text{Gauß})}{=} \mathbb{R}(1, 1, 1, 1, -1)^\top$.

$\text{Hau}(A; 0) = \ker(A^4) \stackrel{(\text{Gauß})}{=}$

$$\text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) [2 Punkte] Um die Anzahl der verschiedenen Jordanschen Blöcke zu bestimmen, braucht man im Allgemeinen $\dim \text{Ker}(A - \lambda \cdot E)^i$ für $i = 1, \dots, \text{ord}_\lambda$ und jeden Eigenwert λ . Man berechne $\dim \text{Ker}(A) = 2$, $\dim \text{Ker}(A^2) = 3$, $\dim \text{Ker}(A^3) = \dim \text{Ker}(A^4) = 4$.

(Regel: stoppe sobald $\dim \text{Ker}(A - \lambda)^i = \dim \text{Ker}(A - \lambda)^{\text{ord}_\lambda} := \dim \text{Hau}(A; \lambda)$, dann

gibt es keine Blöcke grösser als i).

Da die Anzahl der Jordanschen Ketten für einen Eigenwert genau die geometrische Vielfachheit ist, gibt es auf den ersten Blick zwei Möglichkeiten den (4-dimensionalen) Hauptraum von $\lambda = 0$ mit Jordanschen Ketten aufzuspannen: die Jordansche Normalform J hat entweder 2 (2×2)-Blöcke oder ein (1×1)-Block und ein (3×3)-Block zu $\lambda = 0$. Aber für die erste Möglichkeit gälte $\dim \text{Ker}(A^2) = 4$ (da $\dim \text{Ker}(J) = \dim \text{Ker}(A)$), sodass nur die zweite Option übrig bleibt.

Trivialerweise gehört dem einfachen Eigenwert $\lambda = 1$ nur ein (1×1)-Block. Zusammenfassend gilt (bis auf eine Umordnung der Blöcke) $J = \text{blockdiag}(J_1, J_2, J_3)$ mit

$$J_1 = 1, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bem. Es gibt eine Formel für die Anzahl der Blöcke (zu λ) mit Grösse n :

$$S_n = -\dim \text{Ker}(B_\lambda^{n+1}) + 2\dim \text{Ker}(B_\lambda^n) - \dim \text{Ker}(B_\lambda^{n-1}),$$

wobei $B_\lambda := A - \lambda E$, $B_\lambda^0 := 0$ und die Formel sich aus der Normalform J ablesen lässt, da $\dim \text{Ker}(B_\lambda^n) = \dim \text{Ker}((J - \lambda \cdot E)^n)$ und $\#(\text{Blöcke mit Grösse} \geq n) = \dim \text{Ker}(B_\lambda^n) - \dim \text{Ker}(B_\lambda^{n-1})$.

Nur für Erwachsene

Wenn man Zeit und Lust hat, lässt sich auch die Basiswechsellmatrix bestimmen:

Für den (3×3)-Block (zu $\lambda = 0$) brauchen wir eine Kette von Länge 3 (für jeden Eigenwert finden wir i.A. zuerst alle Ketten die zu den größten Blöcken gehören)- siehe Abb 1. Das erste Glied ist Element aus $\text{Ker}(A^3) \setminus \text{Ker}(A^2)$, wobei

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(A^3) = \text{Sp}\{e_2, e_3, e_4, e_5\}.$$

Also wir dürfen z.B. $v_1 := e_2$ als Element aus $\text{Ker}(A^3) \setminus \text{Ker}(A^2)$ nehmen. Dann ist $v_2 := Av_1 = (0, -1, -1, 0, 1)^\top$ das zweite Glied und $v_3 := Av_2 = (0, 0, 0, -1, 0)^\top$ das dritte (muss ein Eigenvektor sein, und ist auch einer). Für den (1×1)-Block zu $\lambda = 0$ ergänze v_3 zu einer Basis von $\text{Ker}(A)$ mit z.B. $v_4 := e_3$ (einmal ablesen; i.A. geht's mit Gauß). Ausserdem brauchen wir einen Eigenvektor zu $\lambda = 1$, z.B. $v_5 = (1, 1, 1, 1, -1)^\top$. Mit $V := (v_5|v_4|v_3|v_2|v_1)$ gilt dann $AV = VJ$, $J = \text{blockdiag}(J_1, J_2, J_3)$.

Bem. In V muss jede Kette umgekehrt aufgelistet werden: daher $v_3|v_2|v_1$ statt $v_1|v_2|v_3$.

Aufgabe 3. (1) [2 Punkte] $\mathcal{X}_A = (\lambda - 1)^6$. $\lambda = 1$ ist der einzige Eigenwert.

(2) [2 Punkte] Man berechne mit Gauß: $\text{rank}(A - I) = 3 \Rightarrow \dim \text{Ker}(A - I) = 3$.

(3) [1 Punkte] Man berechne $(A - I)^6 = 0 \Rightarrow \text{Hau}(A; 1) = \mathbb{R}^6$. Sieht man auch sofort mit Cayley-Hamilton oder der Hauptraumzerlegung, da es nur einen Eigenwert gibt.

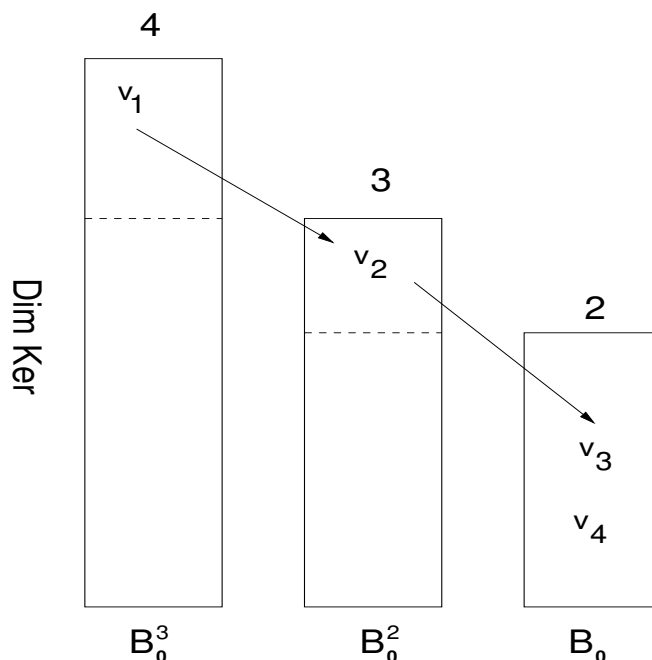


ABBILDUNG 1. Aufgabe 2, die Ketten

(4) [3 Punkte] Es gilt $\dim \text{Ker}(A - I) = 3$ und daher hat J drei Blöcke zu $\lambda = 1$. Möglichkeiten für die Blockgrößen: $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$. Aber (Gauß) $\dim \text{Ker}((A - I)^2) = 5$, also $\dim \text{Ker}$ hat sich um 2 erhöht im Vergleich zu $\dim \text{Ker}(A - I)$ - es muss also genau 2 $(n \times n)$ -Blöcke mit $n \geq 2$ geben $\Rightarrow (1, 2, 3)$ die einzige Möglichkeit. Also $J = \text{blockdiag}(J_1, J_2, J_3)$ mit

$$J_1 = 1, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Basiswechselmatrix (siehe Abb. 2):

Für die 3-er Kette finde ein $v_1 \in \text{Ker}(B_1^3) \setminus \text{Ker}(B_1^2) = \mathbb{R}^6 \setminus \text{Ker}(B_1^2)$. $v_1 = e_6$ passt. Setze $v_2 = B_1 v_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)^\top$, $v_3 = B_1 v_2 = (0, -1, -1, 0, 1, 0)^\top$.

Für die 2-er Kette ergänze v_2 mit einem $v_4 \in \text{Ker}(B_1^2) \setminus \text{Ker}(B_1) = \text{Sp}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \setminus \text{Eig}(A; 1)$. $v_4 = e_1$ passt. Setze $v_5 = B_1 v_4 = -e_3$.

Für den (1×1) -Block ergänze v_3, v_5 mit einem v_6 zu einer Basis von $\text{Eig}(A; 1)$. Nimm z.B. $v_6 = e_1 + e_4$.

Im Allgemeinen berechne die $\text{Ker}(B_\lambda^k)$ mit Gauß und setze systematisch einen Parameter gleich 1 und die anderen gleich Null, um unabhängige ergänzende Vektoren (Startglieder) zu finden.

Mit $V := (v_6 | v_5 | v_4 | v_3 | v_2 | v_1)$ ist $AV = VJ$.

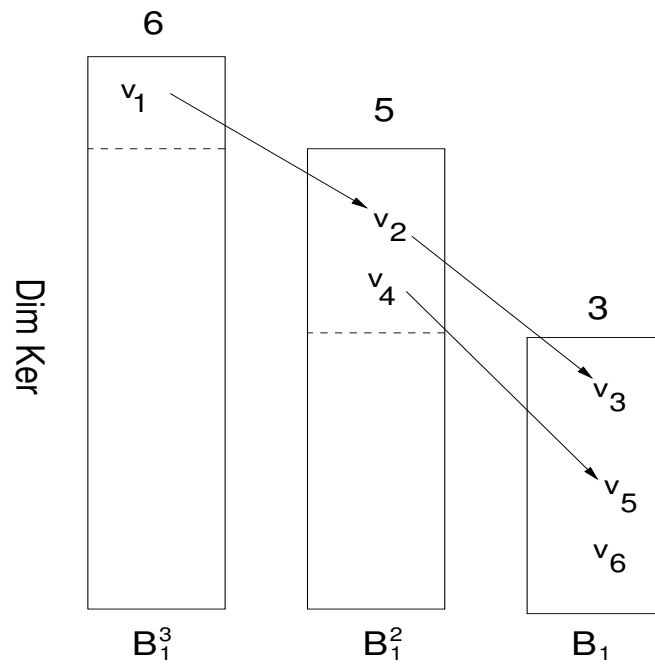


ABBILDUNG 2. Aufgabe 3, die Ketten