Bochnerräume, Übungsblatt 1 — SS 2023

Dr. A. Kaltenbach, M. Sc. S. Hermann — **Abgabetermin:** 24. April 2023

Aufgabe 1 (Young-Ungleichung) (4 Punkte)

Seien $p, q \in (1, \infty)$, $a, b \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ und gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen

(i) $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

(ii) $ab \leq \varepsilon a^p + \frac{(\varepsilon p)^{1-q}}{q}b^q$.

Aufgabe 2 ($W^{1,p}(\Omega)$ als Banachraum) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein Gebiet und $1 \leq p \leq \infty$.

(i) Geben Sie die Definition der schwachen Ableitung an.

(ii) Definieren Sie den Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$ sowie die dazugehörige Norm $||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\Omega)$, mit der Norm $||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (Stetige Banachraum-wertige Funktionen) (4 Punkte)

Für ein Zeitintervall $I = (0, T)$ und einen Banachraum $(X, ||\cdot||_X)$ sei

$$C^0(\bar{I}, X) = \{u : \bar{I} \to X \mid u \text{ stetig}\}$$

der Raum der stetigen, X-wertigen Funktionen auf $\bar{I}$ und

$$||u||_{C^0(\bar{I},X)} := \max_{t \in \bar{I}} ||u(t)||_X.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $||\cdot||_{C^0(\bar{I},X)})$ ist wohldefiniert und eine Norm auf $C^0(\bar{I}, X)$.

(ii) $C^0(\bar{I}, X)$ ist bezüglich $||\cdot||_{C^0(\bar{I},X)}$ ein Banachraum.

Aufgabe 4 (Messbarkeit und schwache Konvergenz) (4 Punkte)

Sei X ein separabler Banachraum und sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ eine Folge Bochner-messbarer Funktionen. Es gelte $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ für fast alle $t \in I$ für eine Funktion $u : I \to X$. Zeigen Sie, dass u Bochner-messbar ist.