Bochnerräume, Übungsblatt 2 — SS 2023

Dr. A. Kaltenbach, M. Sc. S. Hermann — **Abgabetermin:** 03. Mai 2023

Aufgabe 1 (Elementare Eigenschaften) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass das Bochner-Integral unabhängig von der Darstellung der Treppenfunktion ist, d.h. falls

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i} = \sum_{j=1}^{n} y_j \chi_{C_j},$$

dann gilt

$$\int_I s(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda(B_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda(C_j).$$

Seien X, Y Banachräume und sei $u \in L^1(I, X)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(ii) $|| \int_I u(t)\ dt||_X \leq \int_I ||u(t)||_X\ dt$

(iii) Sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann ist $Tu \in L^1(I, Y)$ und es gilt

$$T\left(\int_I u(t)\ dt\right) = \int_I Tu(t)\ dt.$$

(iiii) Sei $F \in X^*$, dann ist $\langle F, u(\cdot)\rangle_X \in L^1(I)$ und es gilt

$$\left\langle F, \int_I u(t)\ dt\right\rangle_X = \int_I \langle F, u(t)\rangle_X\ dt.$$

Aufgabe 2 ($L^p(I \times \Omega) \cong L^p(I, L^p(\Omega))$) (6 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass dann in natürlicher Weise gilt

$$L^p(I \times \Omega) \cong L^p(I, L^p(\Omega)).$$

Hierbei bezeichnet $L^p(I \times \Omega)$ den Raum der Lesbesgue-messbaren, p-integrierbaren Funktionen $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, ausgestattet mit der kanonischen L^p-Norm. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Benutzen Sie die Sätze von Fubini und Pettis, um zu zeigen:

$$L^p(I \times \Omega) \subset L^p(I, L^p(\Omega))$$

(ii) Benutzen Sie den Satz von Fubini und die Definition der Bochner- Messbarkeit, um zu zeigen:

$$L^p(I \times \Omega) \supset L^p(I, L^p(\Omega))$$

Aufgabe 3 (Nichtlineare Diffusion) (6 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Außerdem sei $u : \bar{I} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine hinreichend glatte Lösung der nichtlinearen Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f && \text{in } I \times \Omega\,,\\ u &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega\,,\\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned}$$

zu gegebenen Daten $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass unter geeigneten Voraussetzungen an f, u_0 und p eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass u eine Energieungleichung der Form

$$||u||_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} + ||u||_{L^p(I,W_0^{1,2}(\Omega))} \leq c(||u_0||_X + ||f||_Y)$$

erfüllt. Geben Sie dazu geeignete Räume X und Y an und erklären Sie, an welcher Stelle Ihrer Rechnung die Regularitätsforderung an den Rand von Ω eingeht.