Aufgabe 1 ($L^p(I,X) \cap L^q(I,X) \hookrightarrow L^r(I,X)$ stetig) (4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht notwendigerweise beschränktes Intervall, seien X, Y, Z Banachräume und $p, q, r \in [1, \infty]$.
Ziel ist es für $p \leq q$ und $r \in [p, q]$ die Stetigkeit der Einbettung

$$L^p(I,X) \cap L^q(I,X) \hookrightarrow L^r(I,X)$$

zu zeigen. Der Raum $L^p(I,X) \cap L^q(I,X)$ ist dabei mit der Norm

$$||\cdot||_{L^p(I,X)\cap L^q(I,X)} = ||\cdot||_{L^p(I,X)} + ||\cdot||_{L^q(I,X)}$$

ausgestattet. Zeigen Sie dazu für alle $u \in L^p(I,X) \cap L^q(I,X)$, dass $u \in L^r(I,X)$ und $||u||_{L^r(I,X)} \leq ||u||_{L^p(I,X)\cap L^q(I,X)}$ gilt.
Sei $B : X \times Y \to Z$ eine stetige, bilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass B durch

$$\tilde{B}(u,v)(t) = B(u(t), v(t))$$

eine stetige, bilineare Abbildung $\tilde{B} : L^p(I,X) \times L^q(I,Y) \to L^r(I,Z)$ induziert, falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gilt.

Aufgabe 2 (Separabilität) (4 Punkte)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, X ein Banachraum und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass $L^p(I,X)$ genau dann separabel ist, wenn X separabel ist.

Aufgabe 3 (Dichtheit) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $p \in [1, \infty)$ die Räume $C^\infty(I)$ und $C_0^\infty(I)$ dicht in $L^p(I)$ liegen. Was gilt für $p = \infty$?

Aufgabe 4 (Faltung) (4 Punkte)

Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty]$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Faltung $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(x-y)\, dy.$$

Zeigen Sie, dass $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$||f * g||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq ||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)} ||g||_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$