

**Aufgabe 1** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

(6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Für  $u \in C^1(I, X)$  und  $t_1, t_2 \in I$  mit  $t_1 < t_2$  gilt

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u_t(s) \, ds.$$

**Aufgabe 2** (Schwache Zeitableitung)

(6 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(ii) Klassisch stetig-differenzierbare Funktionen besitzen eine schwache Zeitableitung und diese stimmt mit der klassischen Ableitung überein.

(iii) Besitzt  $u \in L^1_{loc}(I, X)$  eine schwache Zeitableitung  $\frac{d_j u}{dt} \in L^1_{loc}(I, Y)$ , so gilt für alle  $\eta \in C^\infty(I)$  die Produktregel

$$\frac{d_j(u\eta)}{dt} = \frac{d_j u}{dt} \eta + \eta' j u.$$

**Aufgabe 3** (Schwache Zeitableitung der Einbettung)

(4 Punkte)

Sei  $j : X \rightarrow Y$  eine Einbettung zwischen Banachräumen. Besitzt  $u \in L^1(I, X)$  eine schwache Zeitableitung  $\frac{du}{dt} \in L^1(I, X)$ , so besitzt  $ju$  eine  $Y$ -wertige schwache Zeitableitung  $\frac{d_j u}{dt} = j \frac{du}{dt} \in L^1(I, Y)$ .