

Aufgabe 1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

(6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Für $u \in C^1(I, X)$ und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ gilt

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u_t(s) \, ds.$$

Aufgabe 2 (Schwache Zeitableitung)

(6 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(ii) Klassisch stetig-differenzierbare Funktionen besitzen eine schwache Zeitableitung und diese stimmt mit der klassischen Ableitung überein.

(iii) Besitzt $u \in L^1_{loc}(I, X)$ eine schwache Zeitableitung $\frac{d_j u}{dt} \in L^1_{loc}(I, Y)$, so gilt für alle $\eta \in C^\infty(I)$ die Produktregel

$$\frac{d_j(u\eta)}{dt} = \frac{d_j u}{dt} \eta + \eta' j u.$$

Aufgabe 3 (Schwache Zeitableitung der Einbettung)

(4 Punkte)

Sei $j : X \rightarrow Y$ eine Einbettung zwischen Banachräumen. Besitzt $u \in L^1(I, X)$ eine schwache Zeitableitung $\frac{du}{dt} \in L^1(I, X)$, so besitzt ju eine Y -wertige schwache Zeitableitung $\frac{d_j u}{dt} = j \frac{du}{dt} \in L^1(I, Y)$.