



ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

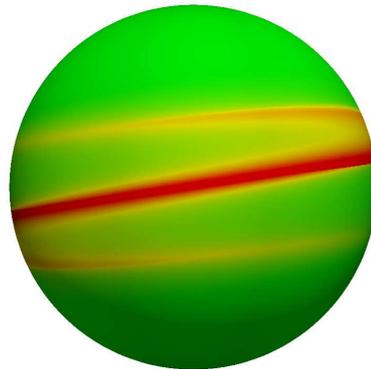
Abteilung für
Angewandte Mathematik



Diplomarbeit

ERHALTUNGSGLEICHUNGEN AUF MANNIGFALTIGKEITEN

Wohlgestelltheit, Totalvariationsabschätzungen und Numerik



THOMAS MÜLLER

Freiburg, Dezember 2009

BETREUER: PROF. DR. D. KRÖNER

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Die Stellen meiner Arbeit, die dem Wortlaut oder Sinn nach anderen Arbeiten entnommen sind, habe ich durch Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Thomas Müller

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	5
Tabellenverzeichnis	7
1 Einleitung	9
1.1 Einschränkung auf skalare Gleichungen	9
1.2 Aufbau der Arbeit	10
2 Hilfsmittel der Riemannschen Geometrie	13
2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten	13
2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	14
2.3 Differenzierbarkeit	16
2.4 Tangentialvektoren	17
2.5 Vektorfelder	22
2.6 Kurven	24
2.7 Immersionen, Einbettungen, Untermannigfaltigkeiten	26
2.8 Kovektoren	29
2.8.1 Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten	30
2.8.2 Kovektorfelder auf Mannigfaltigkeiten	30
2.8.3 Das Differential einer Funktion	31
2.9 Kovariante Tensoren	32
2.9.1 Kovariante Tensoren auf Mannigfaltigkeiten	33
2.9.2 Kovariante Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten	33
2.10 Riemannsche Mannigfaltigkeiten	35
2.10.1 Die Riemannsche Metrik	35
2.10.2 Der Gradient	38
2.10.3 Kürzeste Verbindungen	39
2.11 Mannigfaltigkeiten mit Rand	41
2.12 Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	45
2.13 Sobolev-Räume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	49
2.14 Kettenregeln für Ableitungen von Flussfunktionen	49

3	Problemformulierung	51
3.1	Das Anfangswertproblem in der starken Formulierung	51
3.2	Schwache Lösungen	51
3.3	Entropiepaar	52
3.4	Entropielösung	53
4	Abschätzung der Totalvariation und Existenz einer Lösung	57
4.1	Regularisierte Erhaltungsgleichung	58
4.2	Abschätzung der Totalvariation	59
4.3	Konvergenz der Viskositätslösungen	69
5	Die TV_X-Abschätzung	77
5.1	Motivation	77
5.2	Die Totalvariation entlang von Vektorfeldern	78
5.3	Differentialgleichung für $\mathbf{X}(u)$	79
5.4	Die Abschätzung	81
6	Erhaltungsgleichungen auf der Sphäre \mathbb{S}^2	85
6.1	Sphärische Koordinaten	86
6.1.1	Tangentialvektoren in sphärischen Koordinaten	86
6.1.2	Die Riemannsche Metrik in sphärischen Koordinaten	87
6.1.3	Die Erhaltungsgleichung in sphärischen Koordinaten	87
6.2	Eingebettete Darstellung	88
6.2.1	Orthonormalbasis des Tangentialraums	88
6.2.2	Die Erhaltungsgleichung in der Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$	88
6.2.3	Das dreidimensionale Vektorfeld Φ	89
6.3	Konstruktion divergenzfreier Flüsse	91
6.3.1	Homogene Flüsse	91
6.3.2	Gradientenflüsse	92
6.4	Entkoppelndes Beispielproblem	93
6.4.1	Entkopplung der Erhaltungsgleichung	93
6.4.2	Beispielproblem	94
7	Die TV_X-Abschätzung auf der Sphäre \mathbb{S}^2	95
7.1	Darstellung der Größen auf \mathbb{S}^2	95
7.2	Die Gradientenbedingung	96
7.3	Darstellung der Vektorfelder mittels Φ und Ψ	96
7.4	Die Bedingung $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f} = 0$ ausgedrückt durch Φ und Ψ	98
7.5	Die äquivalente Bedingung für $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f} = 0$	99

8	Das Finite Volumen Verfahren	105
8.1	Definition des Verfahrens	105
8.1.1	Triangulierung und numerischer Fluss	105
8.1.2	Motivation und Definition des Verfahrens	110
8.2	Eigenschaften der diskreten Lösung	111
8.3	Konvergenz des Verfahrens	125
8.3.1	Maßwertige Lösungen von Erhaltungsgleichungen	126
8.3.2	Grenzwertberechnungen	127
9	Numerische Experimente	137
9.1	Implementierung	137
9.1.1	Das Gitter	137
9.1.2	Details zur Berechnung der Näherungslösungen	140
9.2	Daten für die Testprobleme	144
9.3	Ergebnisse der numerischen Experimente	147
9.3.1	Numerische Konvergenz	148
9.3.2	Berechnung der Totalvariation	160
10	Zusammenfassung und Ausblick	171
A	Hilfssätze	175
B	Diskretisierungsfehler	179
C	Der Datenträger	183
C.1	Inhalt des Datenträgers	183
C.1.1	Versionsnummern und Quellen	183
C.2	Installation der Software	184
C.2.1	Installation von ParMetis und psg	184
C.2.2	Installation der DUNE-Module	185
C.3	Lösen der Testprobleme mit der Software	185
	Literaturverzeichnis	187

Abbildungsverzeichnis

2.1	Karte.	14
2.2	Koordinatenwechsel.	15
2.3	Sphärische Koordinaten.	16
2.4	Differenzierbare Abbildung.	17
2.5	Tangententialraum $T_a\mathbb{R}^2$ an $a \in \mathbb{R}^2$	19
2.6	Pushforward.	20
2.7	Koordinatenbasis.	21
2.8	Vektorfeld auf der 2-Sphäre.	23
2.9	Tangententialvektor an einer Kurve.	25
2.10	Integralkurve eines Vektorfeldes.	26
2.11	Untermannigfaltigkeit.	27
2.12	Tangententialraum an der 2-Sphäre.	28
2.13	Mannigfaltigkeit mit Rand.	42
2.14	Differenzierbarkeit auf dem Halbraum \mathbb{H}^n	43
4.1	Wachsende Totalvariation.	76
4.2	Zeitliche Entwicklung von u	76
6.1	Das orthonormale Basisfeld $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$	89
8.1	Triangulierung.	107
9.1	Vorder- und Rückansicht der Gitter $sphere(0)$ und $sphere(6)$	139
9.2	Aufteilung des Gitters $sphere(6)$ auf 16 Prozessoren.	140
9.3	Vorderansicht von u_0^I	145
9.4	Vorderansicht von u_0^{II}	145
9.5	Vorderansicht von u_0^{III}	146
9.6	Vorderansicht von u_0^{IV}	146
9.7	Fehler für Testproblem 1 auf $sphere(6)$	150
9.8	Fehler für Testproblem 2 auf $sphere(6)$	151
9.9	Numerische Lösung für Testproblem 3 auf $sphere(6)$	153
9.10	Fehler für Testproblem 3 auf $sphere(6)$	154

9.11 Fehler für Testproblem 4 auf <i>sphere(6)</i>	155
9.12 Numerische Lösung für Testproblem 4 auf <i>sphere(6)</i>	156
9.13 Zeitliche Entwicklung von \tilde{u}	158
9.14 Numerische Lösung für Testproblem 5 auf <i>sphere(6)</i>	159
9.15 Fehler für Testproblem 5 auf <i>sphere(6)</i>	160
9.16 Graph von u und Triangulierung von Ω	164
9.17 Totalvariation von u^h für Testproblem 4	166
9.18 Totalvariation von u^h für Testproblem 1	167
9.19 Totalvariation von u^h für Testproblem 2	168
9.20 Totalvariation von u^h für Testproblem 3	168
9.21 Totalvariation von u^h für Testproblem 5	169
9.22 Totalvariation von u^h für Testproblem 6	169
9.23 Totalvariation von u^h entlang des Vektorfeldes für Testproblem 6	170

Tabellenverzeichnis

9.1	Kenngrößen der verwendeten Gitter	138
9.2	EOCs für Testproblem 1	150
9.3	EOCs für Testproblem 2	151
9.4	EOCs für Testproblem 3	154
9.5	EOCs für Testproblem 4	155
9.6	EOCs für Testproblem 5	158

Kapitel 1

Einleitung

Hyperbolische partielle Differentialgleichungen auf gekrümmten Oberflächen sind in zahlreichen Anwendungen zu finden. So sind zum Beispiel die Flachwassergleichungen¹ (Shallow Water Equations) auf der zweidimensionalen Sphäre ein mathematisches Modell zur Beschreibung von globalen Luft- und Wasserströmungen, wie zum Beispiel der Ozeanströmungen. Aber auch die Ausbreitung von Schallwellen auf gekrümmten Oberflächen (z. B. [TNCY00]) sowie die Ausbreitung von magnetohydrodynamischen Wellen in der Tachocline-Region der Sonne (z. B. [Gil00, SBG01]) sind eine Anwendung dieses Typs von Gleichungen.

Weitere Beispiele findet man bei der Untersuchung relativistischer Strömungen in der Nähe von kompakten Objekten, wie Neutronensternen und schwarzen Löchern. Dort müssen die relativistischen Gleichungen der Hydrodynamik ([Fon03, Fon08, MM03, PFI⁺98]) oder auch der Magnetohydrodynamik ([Fon08, SS05, DLSS05]) auf einer Raumzeit gelöst werden, die durch die Gravitation des Objekts gekrümmt ist.

1.1 Einschränkung auf skalare Gleichungen

Mathematisch betrachtet sind all diese Phänomene durch ein hyperbolisches System von Erhaltungsgleichungen auf einer gekrümmten Oberfläche zu beschreiben. Aus den entsprechenden Gleichungen im Euklidischen ist bekannt, dass sich deren allgemeine theoretische Behandlung als äußerst schwierig erweist (siehe z. B. [Krö97]). Beschränkt man sich jedoch, anstatt Systeme zu betrachten, auf skalare Erhaltungsgleichungen, dann sind Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für den euklidischen

¹Einen Überblick über Flachwassergleichungen im euklidischen Raum gibt zum Beispiel [Vre94]. Arbeiten zu Flachwassergleichungen auf einer schweren, rotierenden Sphäre und deren numerische Behandlung sind zum Beispiel [WDH⁺92, Gir01, CP96, CHL08, RBL04, Gir00].

Fall vorhanden ([Kru70]). Sogar physikalische Phänomene wie zum Beispiel Schocks und Verdünnungswellen treten schon im Falle von skalaren Gleichungen auf.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf skalare Erhaltungsgleichungen auf gekrümmten Oberflächen, oder allgemeiner, auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, als Modellproblem für entsprechende Systeme von Erhaltungsgleichungen. Die zentrale Gleichung dieser Arbeit ist (3.1.1).

In den vergangenen fünf Jahren sind einige Arbeiten entstanden, die sich mit dieser Gleichung oder deren Verallgemeinerung auf Raumzeiten beschäftigen ([BAL07, ABAL05, BAFL09, Gie09, LNO09, ALO08, LO08, BLSS04]). Die erste Arbeit zu diesem Thema scheint jedoch die von Panov [Pan97] aus dem Jahre 1997 zu sein.

Inhalt und Aufbau der hier vorliegenden Diplomarbeit werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

1.2 Aufbau der Arbeit

Im **zweiten Kapitel** wollen wir die Grundlagen aus der Differentialgeometrie und insbesondere der Riemannschen Geometrie bereitstellen, insofern sie in den restlichen Kapiteln verwendet und vorausgesetzt werden.

Mit den differentialgeometrischen Begrifflichkeiten sind wir in der Lage, in **Kapitel 3** einen geeigneten Lösungsbegriff für unsere Gleichung zu entwickeln, der analog zum Begriff der Entropielösung im Euklidischen sein wird.

Zentral in dieser Diplomarbeit ist das Hauptresultat aus **Kapitel 4**, eine Abschätzung der Totalvariation der Entropielösung für den Fall von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Dabei konstruieren wir Viskositätslösungen und schätzen deren Totalvariation gleichmäßig ab. Mit einem Kompaktheitssatz folgt dann die Konvergenz der Viskositätslösungen gegen eine Entropielösung und die schon erwähnte Totalvariationsabschätzung. Ein Beispiel illustriert, dass bessere Abschätzungen nicht zu erwarten sind.

Da die Totalvariation von Entropielösungen im zeitlichen Verlauf ansteigen kann, führen wir in **Kapitel 5** einen modifizierten Begriff der Totalvariation, die sogenannte Totalvariation entlang von Vektorfeldern, ein und zeigen, unter welchen Bedingungen sie durch die Anfangsdaten beschränkt bleibt.

In **Kapitel 6** wenden wir uns dem wichtigen Spezialfall der zweidimensionalen Sphäre zu. Wir führen einerseits sphärische Koordinaten ein, betrachten die Sphäre aber auch aus der Perspektive einer in den \mathbb{R}^3 eingebetteten Mannigfaltigkeit und untersuchen, welche Form die Erhaltungsgleichung (3.1.1) in der jeweiligen Betrachtungsweise annimmt. Weiter überlegen wir, wie man divergenzfreie Vektorfelder auf der Sphäre konstruieren kann, denn Divergenzfreiheit des Flusses ist in der Existenztheorie und in der Totalvariationsabschätzung eine Voraussetzung. Schließ-

lich entwickeln wir ein Beispielproblem, das äquivalent zu einem eindimensionalen Problem mit periodischen Randbedingungen ist und zu numerischen Testzwecken dienen wird.

Auf die Arbeit der beiden vorangegangenen Kapitel bauen wir in **Kapitel 7** auf, indem wir die Bedingungen, unter denen die Totalvariation entlang von Vektorfeldern im zeitlichen Verlauf nicht anwächst, für die zweidimensionale Sphäre genauer untersuchen und handlichere, dazu äquivalente Bedingungen herleiten.

Kapitel 8 widmet sich schließlich einem Finite Volumen Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen. Es werden sowohl das Verfahren mit der zugehörigen Triangulierung einer Mannigfaltigkeit definiert als auch die Konvergenz dieses Verfahrens bewiesen. Grundlage des Verfahrens bilden numerische Flussfunktionen, die konsistent, erhaltend und monoton sind.

Auf die Arbeit des vorangegangenen Kapitels aufbauend, beschäftigt sich **Kapitel 9** mit der Implementierung des Finite Volumen Verfahrens aus Kapitel 8, die im Rahmen dieser Diplomarbeit stattfand. Es werden Testprobleme formuliert, anhand derer numerische Experimente gemacht wurden. Dabei untersuchen wir experimentell die Konvergenz des Verfahrens und die zeitliche Entwicklung der Totalvariation. In **Kapitel 10** fassen wir die Ergebnisse der Diplomarbeit zusammen und ordnen sie in die bestehende Literatur ein. Im Anschluss wird ein kurzer Ausblick auf mögliche Erweiterungen gegeben.

Kapitel 2

Hilfsmittel der Riemannschen Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen der Differentialgeometrie und insbesondere die der Riemannschen Geometrie präsentieren, soweit diese für das Verständnis der weiteren Kapitel benötigt werden. Grundbegriffe der Topologie, wie sie im Anhang von [Lee03] zu finden sind, werden an dieser Stelle vorausgesetzt. Wir orientieren uns bei dieser Einleitung an [Lee03].

2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei der \mathbb{R}^n versehen mit der Standardtopologie. Mannigfaltigkeiten sind Mengen, die mit einer Topologie ausgestattet und lokal mit dem \mathbb{R}^n identifizierbar sind. Das bedeutet, dass jeder Punkt der Mannigfaltigkeit eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge vom \mathbb{R}^n ist. Diese Eigenschaft und einige weitere Forderungen finden sich in folgenden Definitionen wieder.

Definition 2.1.1 (Karte, Atlas, Mannigfaltigkeit). *Sei M ein topologischer Hausdorffraum mit abzählbarer topologischer Basis.*

1. *Eine n -dimensionale Karte von M ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ zwischen offenen Mengen $U \subseteq M$ und $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ (siehe Abbildung 2.1). Wir nennen U das Kartengebiet und \hat{U} das Parametergebiet von φ . Die Elemente von \hat{U} heißen lokale Koordinaten und $\varphi^{-1} : \hat{U} \rightarrow U$ heißt lokale Parametrisierung von M .*
2. *Ein n -dimensionaler (C^0 -)Atlas von M ist eine Familie \mathcal{A} von n -dimensionalen Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \hat{U}_i, i \in I$, mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Hierbei ist I eine beliebige Indexmenge.*

3. M heißt n -dimensionale (C^0 -)Mannigfaltigkeit, falls M einen (C^0 -)Atlas besitzt.

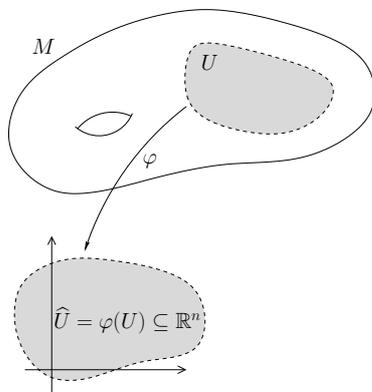


Abbildung 2.1: Karte.

Bemerkung 2.1.2. Eine gebräuchliche Kurzschreibweise für “Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit” ist “Sei M^n eine Mannigfaltigkeit”. Hier dient das hochgestellte n zur Angabe der Dimension der Mannigfaltigkeit M .

Beispiel 2.1.3 (Offene Untermannigfaltigkeit). Sei M^n eine Mannigfaltigkeit mit Atlas \mathcal{A} und sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge von M . Dann ist durch

$$\mathcal{A}_U := \{(V, \varphi) \mid V = W \cap U \text{ und } \varphi = \psi|_V \text{ für eine Karte } (W, \psi) \in \mathcal{A}\}$$

ein Atlas auf U definiert. Somit ist jede offene Teilmenge von M selbst eine Mannigfaltigkeit. Wir nennen U eine offene Untermannigfaltigkeit von M .

2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 2.2.1 (Koordinatenwechsel, C^k -verträglich). Zwei Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \hat{U}_i, i \in \{1, 2\}$ einer Mannigfaltigkeit M^n heißen C^k -verträglich, wenn der sogenannte Koordinatenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ein C^k -Diffeomorphismus ist (siehe Abbildung 2.2).

Definition 2.2.2 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit). Ein C^0 -Atlas \mathcal{A} einer Mannigfaltigkeit M^n heißt C^k -Atlas, wenn alle Karten aus \mathcal{A} untereinander C^k -verträglich sind. Ein C^k -Atlas \mathcal{A} ist maximal, wenn jede Karte von M , die C^k -verträglich mit allen Karten aus \mathcal{A} ist, schon in \mathcal{A} enthalten ist. Hat M einen maximalen C^k -Atlas, dann nennt man M eine C^k -Mannigfaltigkeit. Für den Fall $k = \infty$ heißt M auch glatte Mannigfaltigkeit oder differenzierbare Mannigfaltigkeit.

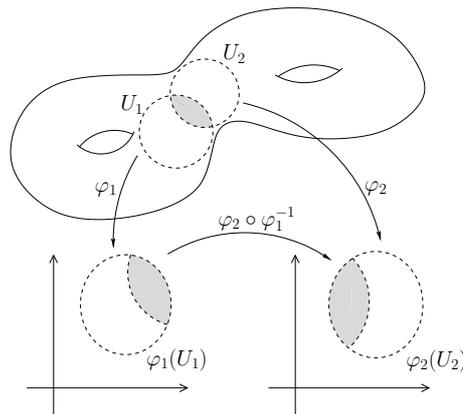


Abbildung 2.2: Koordinatenwechsel.

Klassische Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten sind der euklidische Raum \mathbb{R}^n , die Sphäre \mathbb{S}^n , der Torus T^n und der reelle projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Da die Sphäre in dieser Arbeit der wichtigste Spezialfall sein wird, möchten wir die stereografische Projektion als Beispiel für einen differenzierbaren Atlas der Sphäre und die sphärischen Koordinaten als Beispiel für eine gebräuchliche Parametrisierung der Sphäre vorstellen.

Beispiel 2.2.3 (Sphäre \mathbb{S}^n). Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit kann durch die Einheitssphäre $\mathbb{S}^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x^2 + t^2 = 1\}$ gegeben sein.

a) **Stereografische Projektion** Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{x \in \mathbb{S}^n \mid x \neq (0, \dots, 0, 1) =: N\}, & \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \varphi_1(x, t) &:= \frac{x}{1-t}, \\ U_2 &:= \{x \in \mathbb{S}^n \mid x \neq (0, \dots, 0, -1) =: S\}, & \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \varphi_2(x, t) &:= \frac{x}{1+t} \end{aligned}$$

ist $\mathcal{A} := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein C^∞ -Atlas.

b) **Sphärische Koordinaten** Im Fall $n = 2$ kann jeder Punkt $x \in \mathbb{S}^2$ durch die Angabe seines Breitengrades $\varphi \in [0, 2\pi]$ und Längengrades $\theta \in [0, \pi]$ dargestellt werden. Wir schreiben dann $x = x(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ (siehe Abbildung 2.3).

Bemerkung 2.2.4. Die Abbildung $x(\cdot, \cdot)$ aus Beispiel 2.2.3 b) ist zwar surjektiv, jedoch ist sie weder injektiv, noch hat sie einen offenen Definitionsbereich. Darum ist sie keine lokale Parametrisierung im Sinne von Definition 2.1.1. Trotzdem sind

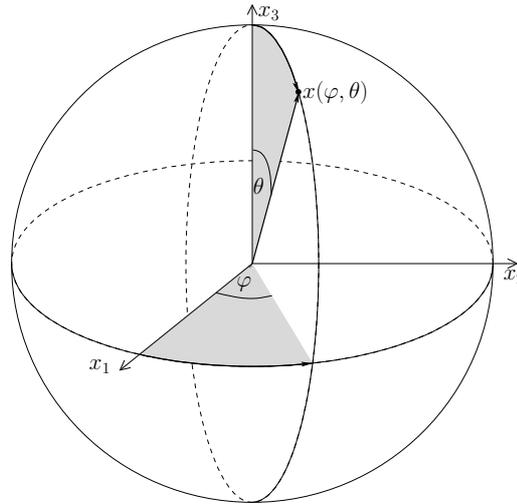


Abbildung 2.3: Sphärische Koordinaten.

die sphärischen Koordinaten eine sehr wichtige Parametrisierung der Sphäre. Man beachte, dass die Einschränkung von $x(\cdot, \cdot)$ auf die Menge $\Omega := (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ injektiv und ein Homöomorphismus auf ihr Bild $x(\Omega) \subset \mathbb{S}^2$ ist. Die Umkehrabbildung $x|_{\Omega}^{-1}$ ist somit eine Karte des \mathbb{S}^2 .

2.3 Differenzierbarkeit

Die Definition von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten versetzt uns in die Lage, differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten einführen zu können.

Definition 2.3.1 (Differenzierbarkeit). Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N heißt k -mal stetig differenzierbar oder von der Klasse C^k , falls für alle $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ von M mit $p \in U$ und eine Karte $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ von N existiert, so dass $F(U) \subseteq V$ und $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U), \psi(F(U)))$. Eine solche Abbildung heißt Diffeomorphismus, falls sie bijektiv und in beide Richtungen von der Klasse C^∞ ist. Siehe dazu Abbildung 2.4.

Bemerkung 2.3.2. Da nach Definition 2.2.2 die Kartenwechsel bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Diffeomorphismen sind, ist der Begriff der Differenzierbarkeit (siehe Definition 2.3.1) koordinatenunabhängig, das heißt unabhängig von der Wahl einer Karte.

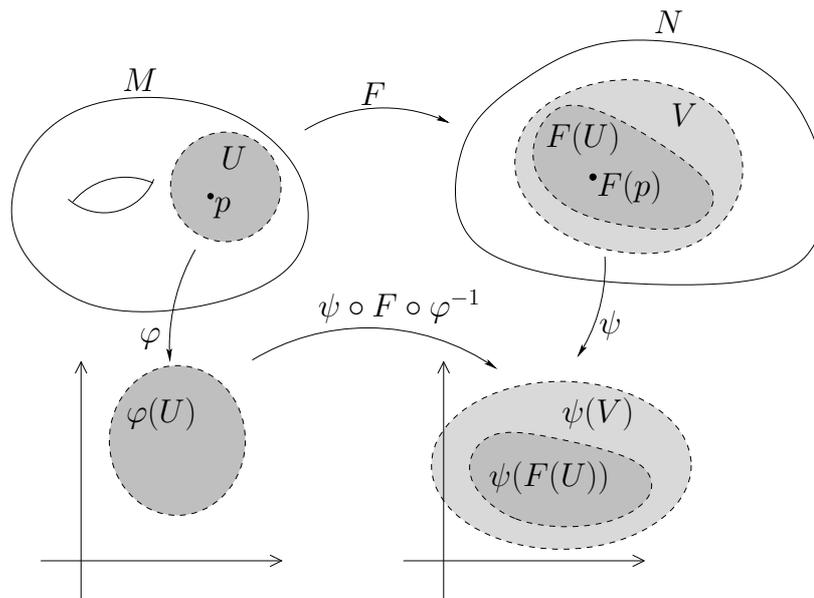


Abbildung 2.4: Differenzierbare Abbildung.

Bemerkung 2.3.3 ($C^\infty(M)$). Für eine C^∞ -Mannigfaltigkeit M^n macht aufgrund der Definition 2.3.1 die Bezeichnung $C^\infty(M)$ nun Sinn, da der reelle Raum \mathbb{R} , mit der Identität $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Karte, eine C^∞ -Mannigfaltigkeit ist. Es ist

$$C^\infty(M) := \{g : M \rightarrow \mathbb{R} \mid g \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}) \text{ für jede Karte } \varphi : U \rightarrow \varphi(U)\}$$

2.4 Tangentialvektoren

Um Erhaltungsgleichungen auf Mannigfaltigkeiten formulieren zu können, müssen wir uns überlegen, wie der Fluss der gesuchten Größe zu modellieren ist. Eine solche Modellierung des Flusses muss eine Richtung und einen Betrag angeben, so dass die gesuchte Größe ein infinitesimal kleines Stück in diese Richtung “fließen” kann, ohne die Mannigfaltigkeit zu verlassen. Zu diesem Zweck führen wir Tangentialvektoren ein.

In der Literatur sind verschiedene gängige Definitionen von Tangentialvektoren zu finden, zum Beispiel eine geometrische, eine algebraische und eine theoretisch-physikalische. Dabei erweist sich der anschauliche geometrische Zugang (siehe Abschnitt 2.6) in der Anwendung meist als der mühsamste und unhandlichste, der algebraische dagegen als der für die Berechnungen zugänglichste. Daher werden wir uns in dieser Arbeit auf die algebraische Definition, mithilfe von Derivationen, konzentrieren.

Definition 2.4.1 (Derivationen, Tangentialraum). Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine Derivation an p ist eine lineare Abbildung $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Leibnizregel¹ erfüllt, das heißt

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$. Diese Derivationen bilden auf natürliche Weise einen reellen Vektorraum; dies ist der Tangentialraum T_pM . Ein Element aus T_pM heißt Tangentialvektor in p .

Diese Definition von Tangentialräumen scheint zunächst sehr abstrakt. In einer konkreteren Sichtweise lassen sich Tangentialvektoren als Richtungsableitungen auffassen. Im Fall $M = \mathbb{R}^n$ (mit der Identität als Karte) definiert man für einen Vektor $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in Richtung v an einem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ durch

$$D_v f(a) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a). \quad (2.4.1)$$

Die Abbildung $f \mapsto D_v f(a)$ ist offenbar eine Derivation an a . Tatsächlich ist sogar jede Derivation von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ von der Form der rechten Seite von Gleichung (2.4.1) ([Lee03, Proposition 3.2]), was zu folgendem Korollar ([Lee03, Corollary 3.3]) führt. Siehe dazu auch Abbildung 2.5.

Korollar 2.4.2. Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$ bilden die n Derivationen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_a, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_a,$$

definiert durch

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

eine Basis von $T_a\mathbb{R}^n$.

Da wir Tangentialvektoren an einer allgemeinen Mannigfaltigkeit als Derivationen definiert haben, ist es nur natürlich, sie auch als Richtungsableitungen zu betrachten. Konkret kann man für einen Tangentialvektor X (als Derivation gesehen) von M an einem Punkt p die Richtungsableitung von einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ in Richtung X wie folgt definieren:

$$D_X(f) := X(f).$$

¹Die Leibnizregel ist eine gewisse Produktregel.

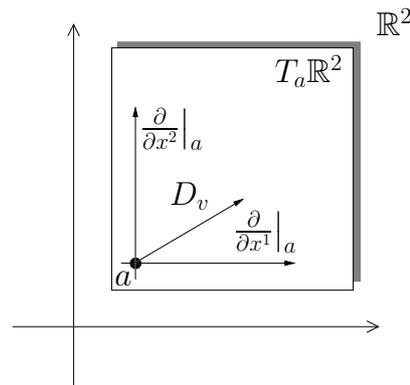


Abbildung 2.5: Tangentialraum $T_a\mathbb{R}^2$ an $a \in \mathbb{R}^2$.

Noch konkreter werden Tangentialvektoren, wenn man sie lokal mithilfe von Karten beschreibt. Dazu müssen wir das Verhalten von Tangentialvektoren unter glatten Abbildungen (wie z. B. Karten) studieren und führen zu diesem Zwecke den sogenannten Pushforward ein. Siehe dazu auch Abbildung 2.6.

Definition 2.4.3 (Pushforward). Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ von der Klasse C^∞ . Für $p \in M$ definieren wir den Pushforward als Abbildung $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ durch

$$(F_* X)(h) = X(h \circ F),$$

für $X \in T_p M$ und $h \in C^\infty(N)$

Der Pushforward hat folgende Eigenschaften ([Lee03, Lemma 3.5]).

Lemma 2.4.4 (Eigenschaften des Pushforward). Seien $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ differenzierbare Abbildungen zwischen C^∞ -Mannigfaltigkeiten und sei $p \in M$. Dann gilt

1. $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ist eine lineare Abbildung.
2. $(G \circ F)_* = (G_* \circ F_*) : T_p M \rightarrow T_{G(F(p))} P$.
3. Falls F ein Diffeomorphismus ist, dann ist $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ein Vektorraumisomorphismus.

Der Tangentialraum ist bisweilen durch seine Wirkung auf glatte Funktionen, die auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert sind, bestimmt. Dahingegen sind Karten im Allgemeinen nur auf offenen Teilmengen definiert. Die folgende Proposition ([Lee03, Proposition 3.6]) garantiert uns, dass der Tangentialraum wirklich eine rein lokale Konstruktion ist.

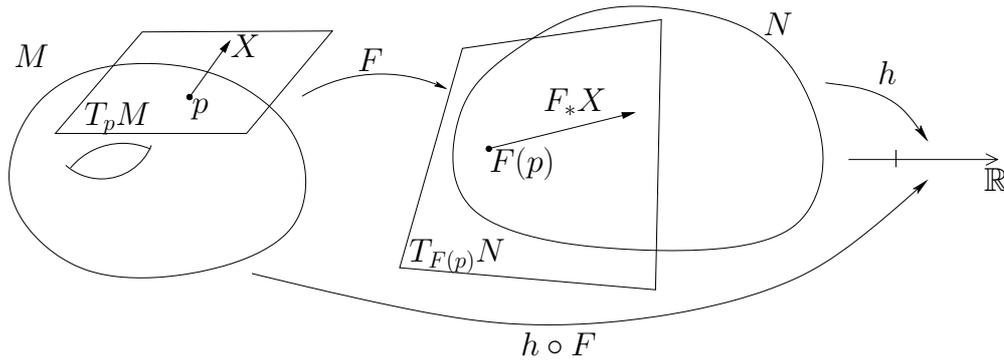


Abbildung 2.6: Pushforward: $(F_* X)(h) = X(h \circ F)$.

Proposition 2.4.5. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, $p \in M$, und $X \in T_p M$. Falls zwei glatte Funktionen f und g auf einer offenen Umgebung von p übereinstimmen, dann gilt $X(f) = X(g)$.

Somit können wir den Tangentialraum einer offenen Teilmenge kanonisch mit dem Tangentialraum der ganzen Mannigfaltigkeit identifizieren ([Lee03, Proposition 3.6]).

Proposition 2.4.6. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Untermannigfaltigkeit und bezeichne $\iota : U \hookrightarrow M$ die Inklusion. Dann ist für alle $p \in U$ der Pushforward $\iota_* : T_p U \rightarrow T_p M$ ein Vektorraumisomorphismus.

Im Folgenden werden wir daher nicht mehr zwischen $T_p U$ und $T_p M$ unterscheiden. Insbesondere heißt das, dass wir einen Vektor $X \in T_p M$ auf eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die nur in einer offenen Umgebung U von p definiert ist, anwenden können, da $X(f)$ nur von den Werten von f in einer kleinen Umgebung von p abhängt.

Lokale Darstellung von Tangentialvektoren

Sei nun (U, φ) eine Karte einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M . Da $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist, ist nach Lemma 2.4.4 $\varphi_* : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ ein Vektorraumisomorphismus. Gemäß Korollar 2.4.2 bilden die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \dots, n$, eine Basis des $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Und deshalb bilden die Pushforwards dieser Vektoren unter $(\varphi^{-1})_*$ eine Basis des $T_p M$ (siehe Abbildung 2.7). Wir schreiben für diese Vektoren

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}.$$

Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ heißen die von φ erzeugten Koordinatenvektoren. Sie bilden eine Basis des $T_p M$, die wir die Koordinatenbasis nennen. Unter Ausnutzung der obigen

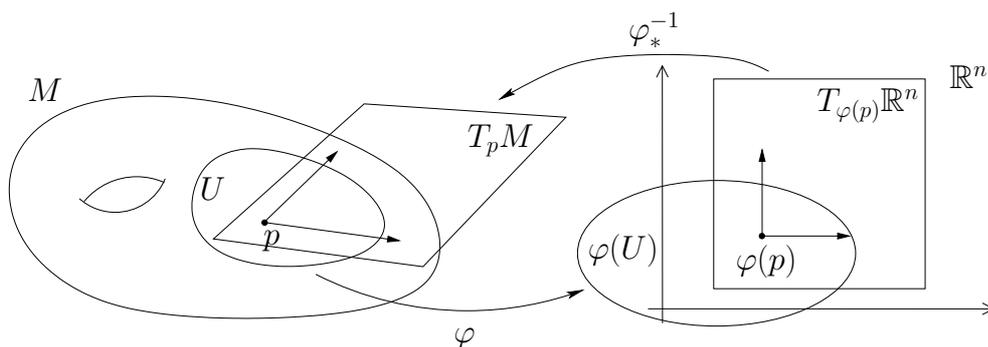


Abbildung 2.7: Koordinatenbasis.

Definitionen sehen wir, dass ein Koordinatenvektor $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ auf eine glatte Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt wirkt.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (g) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (g \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \widehat{g}}{\partial x^i} (\widehat{p}),$$

wobei $\widehat{g} := g \circ \varphi^{-1}$ die lokale Repräsentation von g ist und $\widehat{p} = (p_1, \dots, p_n) = \varphi(p)$ die lokale Repräsentation von p .

Wir können somit nach Wahl einer Karte (U, φ) jeden Tangentialvektor $X \in T_p M$ eindeutig als Linearkombination der Koordinatenvektoren schreiben, das heißt

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad (2.4.2)$$

mit $(X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$.

Wir lassen im Folgenden oft die Vor- oder Hinterschaltung der Karte weg, wenn es zu keinen Missverständnissen kommt, welche Karte dabei gemeint ist. Wir schreiben also

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} (p) = \frac{\partial \widehat{g}}{\partial x^i} (\widehat{p}).$$

Einsteinsche Summenkonvention

Eine gängige Notation ist, bei einem Term wie zum Beispiel $\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ in Gleichung (2.4.2) das Summationszeichen wegzulassen. Ab sofort ist in dieser Arbeit bei Termen, in denen derselbe Index einmal oben und einmal unten auftaucht, die

Summe über diesen Index von 1 bis zur Dimension der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit gemeint. Es ist also

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Bemerkung 2.4.7 (Lokale Darstellung des Pushforward). *Wir wollen untersuchen, wie der Pushforward auf einen Tangentialvektor in lokaler Darstellung wirkt. Sei dazu $F : M^m \rightarrow N^n$ eine glatte Abbildung zwischen C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Für Karten (U, φ) von M in der Umgebung von $p \in M$ und (V, ψ) von N in der Umgebung von $F(p)$ haben wir für F die lokale Repräsentation*

$$\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cup F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V).$$

Mit der Bezeichnung der Koordinaten des Definitionsbereichs von \widehat{F} mit (x^1, \dots, x^m) und denen des Zielbereichs mit (y^1, \dots, y^n) finden wir für einen Vektor $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$ unter dem Pushforward F_* , dass für alle Funktion $h \in C^\infty(N)$ gilt

$$\begin{aligned} F_* \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (h) &= X^i F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (h) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (h \circ F) \\ &= X^i \frac{\partial (h \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\varphi(p)) = X^i \frac{\partial (h \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\varphi(p)) \\ &= X^i \frac{\partial (h \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} (\psi(F(p))) \frac{\partial (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i} (\varphi(p)) = X^i \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} (h). \end{aligned}$$

Wir sehen hier, dass die lokale Darstellung des Pushforward von F der Jakobimatrix der lokalen Repräsentation von F entspricht. Der Pushforward ist somit eine koordinatenunabhängige Konstruktion, die im Euklidischen der Jakobimatrix entspricht. Deshalb wird der Pushforward oft Differential, totales Differential oder Ableitung genannt. Eigenschaft (2) aus Lemma 2.4.4 entspricht damit im Euklidischen der Kettenregel.

2.5 Vektorfelder

Der Fluss von Erhaltungsgleichungen auf Mannigfaltigkeiten wird durch Vektorfelder modelliert. Wir sind nun in der Lage, Vektorfelder einzuführen und definieren dafür zunächst das Tangentialbündel TM als die Zusammenfassung aller Tangentialvektorräume einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M durch die disjunkte Vereinigung $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$. Man kann zeigen ([Lee03, Lemma 4.1]), dass TM auf natürliche Weise eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Vektorfelder sind wie folgt definiert. (Siehe Abbildung 2.8.)

Definition 2.5.1 (Vektorfeld). Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld auf M ist eine Abbildung $X : M \rightarrow TM$, so dass $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$.

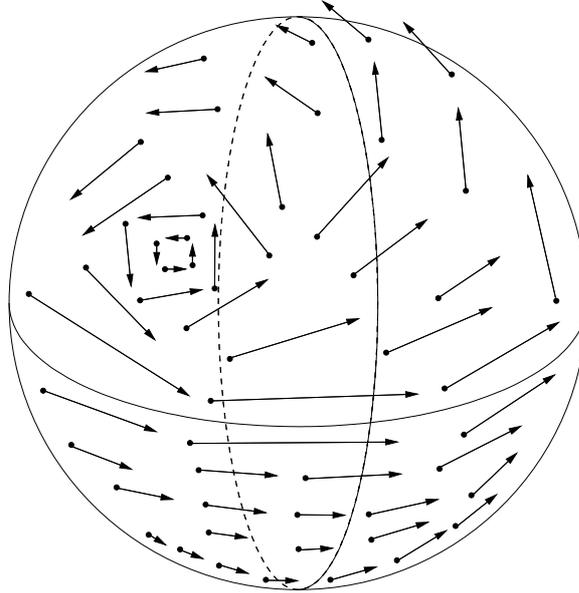


Abbildung 2.8: Vektorfeld auf der 2-Sphäre.

Lokale Darstellung von Vektorfeldern

Ein Vektorfeld X einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M kann lokal, für eine Karte (U, φ) , in jedem Punkt $p \in U$ in der Koordinatenbasis $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ geschrieben werden als

$$X(p) = X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Für eine Karte (U, φ) werden dadurch n Funktionen $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, definiert, welche Komponentenfunktionen von X genannt werden.

Definition 2.5.2 (Differenzierbares Vektorfeld). Ein Vektorfeld X auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M heißt differenzierbar (oder von der Klasse C^k), wenn für alle Karten von M die zugehörigen Komponentenfunktionen X^i differenzierbar (oder von der Klasse C^k) sind. $\mathcal{T}(M)$ bezeichnet die Menge aller differenzierbaren Vektorfelder auf M .

Bemerkung 2.5.3. Eine zu Definition 2.5.2 äquivalente Definition der Differenzierbarkeit von Vektorfeldern ist es, zu fordern, dass das Vektorfeld $X : M \rightarrow TM$ als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten differenzierbar (oder von der Klasse C^k) ist ([Lee03, Lemma 4.2]).

Satz 2.5.4 (Satz vom gekämmten Igel). *Auf einer Sphäre \mathbb{S}^n gibt es genau dann ein stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Siehe zum Beispiel [Lee03, Seite 386] oder [AMR88, Seite 547 (Hairy Ball Theorem)].

Man kann ein differenzierbares Vektorfeld X auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M auch als Operator auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen auffassen, das heißt $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$. Wir schreiben für ein $h \in C^\infty(M)$ und $p \in M$

$$X(h)(p) = X(p)(h).$$

Somit ist $X(h) \in C^\infty(M)$ und für ein weiteres Vektorfeld $Y \in \mathcal{T}(M)$ ist nun auch $Y(X(h)) \in C^\infty(M)$ wohldefiniert. Die Abbildung $Y \circ X$ mit $(Y \circ X)(p)(h) := Y(X(h))(p)$ ist jedoch kein Vektorfeld, da es die Leibnizregel nicht erfüllt. Die folgende Definition gibt an, wie man zwei Vektorfelder verknüpfen kann, um ein neues Vektorfeld, die sogenannte Lie-Klammer, zu erhalten.

Definition 2.5.5 (Lie-Klammer). *Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. Die Lie-Klammer von X und Y ist ein Operator $[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, definiert durch*

$$[X, Y](h) := X(Y(h)) - Y(X(h)) \text{ für alle } h \in C^\infty(M).$$

Eine andere Schreibweise für die Lie-Klammer ist $\mathcal{L}_X Y := [X, Y]$.

Lemma 2.5.6 ([Lee03], Lemma 4.12). *Mit den Notationen aus Definition 2.5.5 definiert die Lie-Klammer durch $[X, Y](p)(h) := [X, Y](h)(p)$ für $p \in M$ ein differenzierbares Vektorfeld $[X, Y] : M \rightarrow TM$.*

2.6 Kurven

Kurven sind ein zentraler Begriff in der Differentialgeometrie. So bedient sich zum Beispiel die geometrische Definition von Tangentialvektoren der Kurven. Auch in dieser Arbeit werden wir die Definition von Kurven benötigen.

Definition 2.6.1 (Kurve). *Eine Kurve in einer Mannigfaltigkeit ist eine stetige Abbildung $\gamma : J \rightarrow M$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.*

Bemerkung 2.6.2. *Für ein offenes Intervall J und eine C^k -Mannigfaltigkeit M ist es sinnvoll, von C^k -Kurven $\gamma : J \rightarrow M$ zu sprechen, da die Kurve γ dann eine Abbildung zwischen C^k -Mannigfaltigkeiten ist.*

Lemma 2.6.3 ([Lee03], Lemma 6.17). Falls M eine zusammenhängende C^∞ -Mannigfaltigkeit ist, dann können zwei beliebige Punkte aus M durch eine stückweise C^∞ -Kurve miteinander verbunden werden.

Unsere Definition von Tangentialvektoren als Derivationen erlaubt es uns, von Tangentialvektoren an glatten Kurven zu sprechen (siehe Abbildung 2.9).

Definition 2.6.4 (Tangentialvektor an einer Kurve). Sei $\gamma : J \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve in einer C^1 -Mannigfaltigkeit M . Ein Tangentialvektor an der Kurve γ an der Stelle $t_0 \in J$ ist

$$\gamma'(t_0) = \gamma_* \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}M,$$

wobei $\frac{d}{dt} \Big|_{t_0}$ den Standardkoordinatenvektor² für $T_{t_0}J$ bezeichnet. (Im eindimensionalen Fall schreibt man $\frac{d}{dt}$ anstelle von $\frac{\partial}{\partial t}$.)

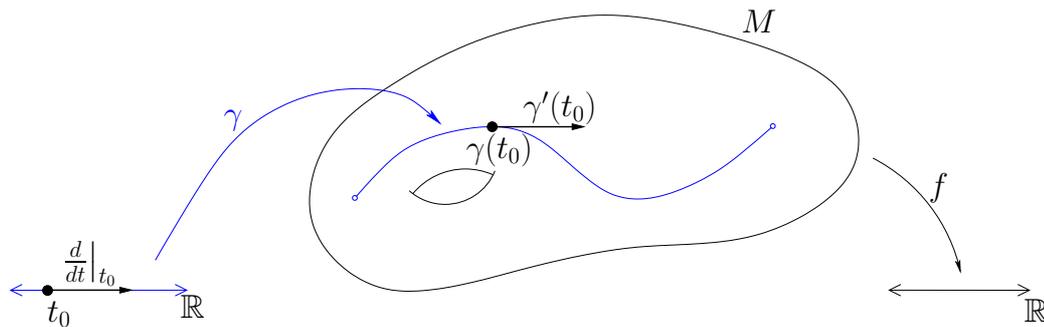


Abbildung 2.9: Tangentialvektor an einer Kurve.

Mit den Notationen aus Definition 2.6.4 wirkt der Tangentialvektor $\gamma'(t_0)$ durch

$$\gamma'(t_0)(h) = \gamma_* \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (h) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (h \circ \gamma) = \frac{d(h \circ \gamma)}{dt}(t_0)$$

auf Funktionen $h \in C^\infty(M)$.

Lokale Darstellung von Kurven

Sei (U, φ) eine Karte einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M und $\gamma : J \rightarrow M$ eine Kurve in M . Für $t_0 \in J$ mit $\gamma(t_0) \in U$ ist die lokale Repräsentation von γ durch

²Der Standardkoordinatenvektor ist der von der Identität als Karte erzeugte Koordinatenvektor.

$(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) := (\varphi \circ \gamma)(t)$ gegeben, falls t nahe genug bei t_0 ist. Die lokale Darstellung des Pushforward (Bemerkung 2.4.7) sagt uns, dass wir $\gamma'(t_0)$ in der Koordinatenbasis von $T_{\gamma(t_0)}M$ bezüglich der Karte (U, φ) schreiben können als

$$\gamma'(t_0) = \gamma^{i'}(t_0) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t_0)}.$$

Ein Vektorfeld und eine Kurve können in Zusammenhang miteinander stehen, nämlich dann, wenn die Tangentialvektoren an der Kurve an jeder Stelle der Kurve den Werten des Vektorfeldes an dieser Stelle entsprechen (Abbildung 2.10). Dies wird in folgender Definition präzisiert.

Definition 2.6.5 (Integralkurve). Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $X \in \mathcal{T}(M)$ ein Vektorfeld auf M . Eine Kurve $\gamma : J \rightarrow M$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes X , falls $\gamma \in C^1(J, M)$ und $\gamma' = X \circ \gamma$ gelten, das heißt

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

für alle $t \in J$. Man nennt γ maximale Integralkurve, falls es von X keine Integralkurve $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow M$ mit $J \subsetneq \tilde{J}$ und $\tilde{\gamma}|_J = \gamma$ gibt. Eine Kurve $\gamma : J \rightarrow M$ heißt Lösung des Anfangswertproblems für X zum Anfangswert $p \in M$, falls

$$\gamma' = X \circ \gamma \text{ und } \gamma(0) = p.$$

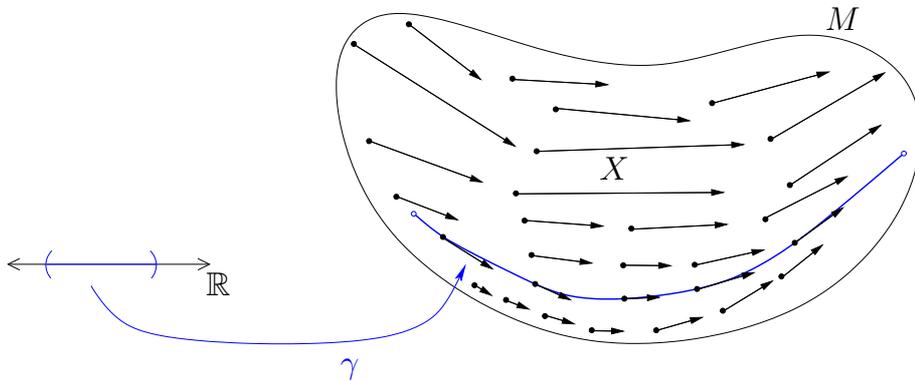


Abbildung 2.10: Integralkurve γ eines Vektorfeldes X .

2.7 Immersionen, Einbettungen, Untermannigfaltigkeiten

Definition 2.7.1. Sei $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Wenn für jedes $p \in M$ die Abbildung $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$

injektiv ist, dann heißt F Immersion. Ist F zusätzlich ein Homöomorphismus auf sein Bild $F(M) \subseteq N$, so heißt F differenzierbare Einbettung.

Die meisten vertrauten Beispiele für Mannigfaltigkeiten erscheinen als Teilmengen von anderen Mannigfaltigkeiten (z. B. vom \mathbb{R}^n). Um diese beiden Mannigfaltigkeiten miteinander in Beziehung zu bringen, dient folgende Definition. Siehe dazu Abbildung 2.11.

Definition 2.7.2 (Untermannigfaltigkeit). Sei M^m eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von M , falls es für alle $p \in S$ eine Karte (U, φ) von M mit $p \in U$ gibt, so dass $\varphi(S \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \subseteq \mathbb{R}^m$. S ist dann insbesondere eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit.

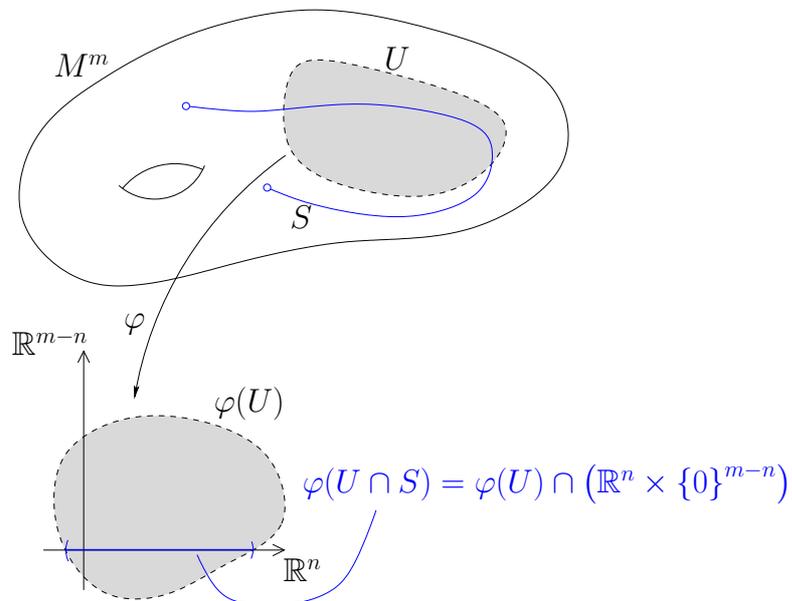


Abbildung 2.11: Untermannigfaltigkeit.

Der folgende Satz (vgl. [Lee03, Corollary 8.4]) charakterisiert Untermannigfaltigkeiten genau als die Bilder unter differenzierbaren Einbettungen.

Satz 2.7.3. Sei $S \subseteq M$ eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von M . Die Inklusion $\iota : S \hookrightarrow M$ ist eine differenzierbare Einbettung. Umgekehrt ist auch für eine differenzierbare Einbettung $F : M^m \rightarrow N^n$ das Bild $F(M)$ eine m -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von N .

Tangentialraum an einer Untermannigfaltigkeit

Falls S eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist, dann stellen wir uns den Tangentialraum $T_p S$ an einem Punkt $p \in S$ intuitiv als einen Unterraum des $T_p \mathbb{R}^n$ vor.

Ähnlich können wir bei abstrakten Mannigfaltigkeiten vorgehen. Für eine C^∞ -Mannigfaltigkeit M mit der C^∞ -Untermannigfaltigkeit $S \subseteq M$ ist die Inklusion $\iota : S \hookrightarrow M$ eine differenzierbare Einbettung und somit ist der Pushforward $\iota_* : T_p S \rightarrow T_p M$ für jeden Punkt $p \in S$ injektiv. Das Bild \tilde{X} eines Tangentialvektors $X \in T_p S$ unter ι_* wirkt auf eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ also wie folgt:

$$\tilde{X}(f) = (\iota_* X)(f) = X(f \circ \iota) = X(f|_S).$$

Demzufolge macht es Sinn, den Tangentialraum $T_p S$ mit seinem Bild unter ι_* zu identifizieren und somit als Teilraum des $T_p M$ aufzufassen.

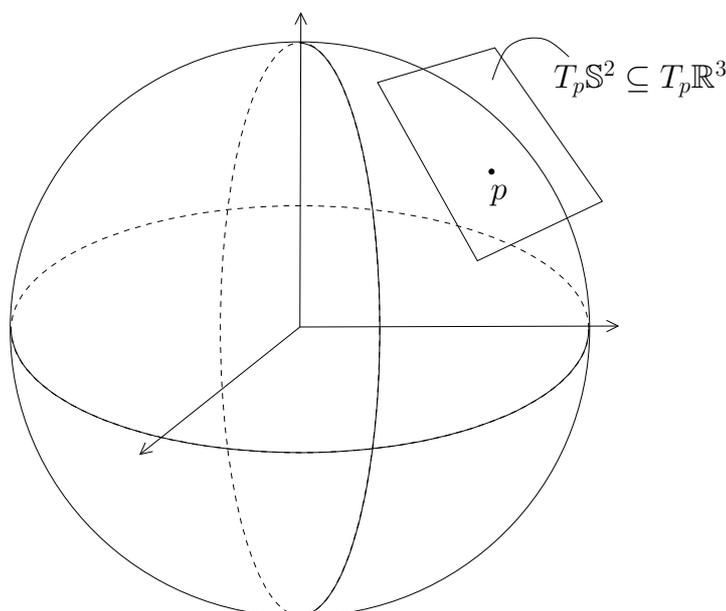


Abbildung 2.12: Tangentialraum an der 2-Sphäre.

Beispiel 2.7.4. Jede offene Teilmenge einer C^∞ -Mannigfaltigkeit ist eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit.

Beispiel 2.7.5 (Sphäre). Die Sphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} (vgl. [Lee03, Example 8.7]). Die zugehörige Inklusion $\iota : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine differenzierbare Einbettung. An jeder Stelle $p \in S^n$ können wir den Tangentialraum $T_p S^n$ also als n -dimensionalen Unterraum des $T_p \mathbb{R}^{n+1}$ auffassen (siehe Abbildung 2.12).

Die Beantwortung der Frage, ob jede glatte, abstrakte Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit eines euklidischen Raumes ist, ist zwar innerhalb dieser Arbeit nicht notwendig, die Frage ist jedoch so grundlegend, dass wir hier eine Antwort darauf wiedergeben möchten. Dabei zitieren wir an dieser Stelle nicht die Arbeit von Whitney [Whi36] aus dem Jahre 1936, sondern ein etwas jüngerer, verbessertes Resultat, welches von Whitney in [Whi44a] und [Whi44b] bewiesen wurde.

Satz 2.7.6 (Starker Einbettungssatz von Whitney). *Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es zu jeder n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Einbettung in den \mathbb{R}^{2n} .*

Beweis: Siehe zum Beispiel auch [Lee03, Theorem 10.15, Seite 251].

Korollar 2.7.7. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist jede n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer abgeschlossenen eingebetteten Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2n} .*

Beweis: Siehe zum Beispiel [Lee03, Corollary 10.12, Seite 251].

2.8 Kovektoren

Definition 2.8.1 (Dualraum, Kovektor). *Für einen Vektorraum V über \mathbb{R} bezeichnen wir den Dualraum von V mit*

$$V^* := \{l : V \rightarrow \mathbb{R} \mid l \text{ ist linear}\}.$$

Ein Element $l \in V^$ heißt Kovektor von V .*

Die Aussagen der folgenden Bemerkung kennen wir aus der linearen Algebra.

Bemerkung 2.8.2. *Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} mit Dualraum V^* . Dann gilt*

1. *Falls $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist, so bilden die Kovektoren $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$, definiert durch $\omega^i(a^j v_j) := a^i$, für $a^j \in \mathbb{R}$, eine Basis von V^* . Diese Basis heißt die zu $\{v_i\}$ duale Basis.*
2. *Für alle $v \in V$ gilt $v = \omega^i(v)v_i$ und für alle $\omega \in V^*$ gilt $\omega = \omega(v_i)\omega^i$.*

Wir schreiben Basiskovektoren immer mit oberen Indizes und die Komponenten eines Kovektors mit unteren Indizes, so dass der gleiche Index bei einer impliziten Summation grundsätzlich einmal unten und einmal oben auftaucht.

2.8.1 Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten

Den obigen allgemeinen Fall übertragen wir jetzt auf Mannigfaltigkeiten. Dabei wird der allgemeine Vektorraum V durch den Tangentialraum T_pM einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ ersetzt. Für dessen Dualraum $(T_pM)^*$ schreiben wir T_p^*M . Eine Karte (U, φ) von M liefert an jedem Punkt $p \in M$ die Koordinatenbasis $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ und somit auch eine zu $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ duale Basis des T_p^*M , die wir mit $\{dx^i|_p\}$ bezeichnen. Dafür gilt dann

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Jeder Kovektor $\omega \in T_p^*M$ kann also geschrieben werden als $\omega = \omega_i dx^i|_p$, wobei

$$\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right).$$

2.8.2 Kovektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Zunächst definieren wir das Bündel der Kovektoren T^*M einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M durch

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Definition 2.8.3 (Kovektorfeld). Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein Kovektorfeld auf M ist eine Abbildung $\omega : M \rightarrow T^*M$, so dass $\omega(p) \in T_p^*M$ für alle $p \in M$.

Lokale Darstellung von Kovektorfeldern

Analog zu einem Vektorfeld kann auch ein Kovektorfeld ω einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M lokal für eine Karte (U, φ) in jedem Punkt $p \in U$ in der zur Koordinatenbasis dualen Basis $\{dx^i|_p\}$ geschrieben werden:

$$\omega(p) = \omega_i(p) dx^i|_p.$$

Für eine Karte (U, φ) werden dadurch n Funktionen $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, definiert, welche Komponentenfunktionen von ω genannt werden. Für diese gilt weiterhin

$$\omega_i(p) = \omega(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right).$$

Definition 2.8.4 (Differenzierbares Kovektorfeld). Ein Vektorfeld ω auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M heißt differenzierbar (oder von der Klasse C^k), wenn für alle Karten von M die zugehörigen Komponentenfunktionen ω^i differenzierbar (oder von der Klasse C^k) sind.

2.8.3 Das Differential einer Funktion

Definition 2.8.5 (Differential einer Funktion). Für eine glatte reellwertige Funktion u auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M definieren wir das Differential $du : M \rightarrow T^*M$ von u durch

$$du(p)(X(p)) = X(p)(u) \text{ für } X(p) \in T_pM. \quad (2.8.1)$$

Damit ist du ein glattes Kovektorfeld auf M ([Lee03, Lemma 6.7]).

Lokale Darstellung von du

Um genauer zu sehen, wie das Differential einer Funktion aussieht, betrachten wir seine lokale Darstellung. Sei dazu (U, φ) eine Karte einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M . Die Komponenten A_i des Differentials du einer Funktion $u \in C^\infty(M)$ in der zur Koordinatenbasis dualen Basis $\{dx^i|_p\}$ lauten im Punkt $p \in U$ nach Definition des Differentials

$$A_i(p) = du(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (u) = \frac{\partial u}{\partial x^i}(p).$$

Dies führt zur folgenden Formel für die lokale Darstellung von $du(p)$:

$$du(p) = \frac{\partial u}{\partial x^i}(p) dx^i|_p.$$

Oder als Gleichung für Kovektorfelder:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i.$$

Bemerkung 2.8.6. Seien u und M wie in Definition 2.8.5. Nach der Identifikation $T_{u(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ist der Pushforward von u gemäß Definition 2.4.3 eine Abbildung $u_* : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u_* \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = X^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = du(X)$$

für $X \in T_pM$.

Die Definition des Differentials einer Funktion entspricht also der Definition des Pushforward und ist somit konsistent mit der Kettenregel (vgl. Lemma 2.4.4, (2)).

Beispiel 2.8.7 (Ableitung einer Funktion entlang einer Kurve). Seien u und M wie in Definition 2.8.5 und sei $\gamma : J \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve. Für die Ableitung der Abbildung $u \circ \gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $t \in J$ gilt aufgrund der Kettenregel (siehe Lemma 2.4.4, (2) und Bemerkung 2.8.6)

$$(u \circ \gamma)'(t) = du(\gamma(t))(\gamma'(t)). \quad (2.8.2)$$

2.9 Kovariante Tensoren

Definition 2.9.1 (r-fach kovarianter Tensor). Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} . Eine multilineare (das heißt in jedem Eintrag lineare) Abbildung

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt r -fach kovarianter Tensor, Tensor der Stufe $(r, 0)$ oder $(r, 0)$ -Tensor (jeweils über V). Die Menge der $(r, 0)$ -Tensoren über V , bezeichnet mit $T^r(V)$, bildet einen Vektorraum über \mathbb{R} .

Beispiel 2.9.2 (Kovektor).

1. Jeder Kovektor $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein 1-fach kovarianter Tensor über V und umgekehrt. Das heißt $T^1(V) = V^*$.
2. Ein 2-fach kovarianter Tensor über V heißt auch Bilinearform. Ein Beispiel dafür ist das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n .

Um systematisch eine Basis des $T^r(V)$ zu entwickeln, führen wir das Tensorprodukt ein.

Definition 2.9.3. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} , $S \in T^{r_1}(V)$ und $T \in T^{r_2}(V)$. Die Abbildung

$$S \otimes T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r_1+r_2\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R},$$

definiert durch

$$S \otimes T(X_1, \dots, X_{r_1+r_2}) := S(X_1, \dots, X_{r_1})T(X_{r_1+1}, \dots, X_{r_1+r_2})$$

für $X_i \in V$, $i = 1, \dots, r_1 + r_2$, heißt Tensorprodukt von S und T . $S \otimes T$ ist linear in jedem Eintrag und somit ein $(r_1 + r_2)$ -fach kovarianter Tensor über V .

Proposition 2.9.4 ([Lee03], Proposition 11.2). *Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und dazu dualer Basis $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$. Die Menge der r -fach kovarianten Tensoren der Form $\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r}$ für $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ bilden eine Basis des $T^r(V)$. Somit ist $\dim(T^r(V)) = n^r$.*

Beispiel 2.9.5 (Bilinearform). *Mit den Notationen aus Proposition 2.9.4 können wir für den Fall “ $r = 2$ ” jede Bilinearform T eindeutig schreiben als $T = T_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$, wobei $(T_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine reelle $n \times n$ -Matrix ist.*

2.9.1 Kovariante Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

Analog wie für Kovektoren übertragen wir das Konzept der kovarianten Tensoren auf Mannigfaltigkeiten. Dabei wird der allgemeine Vektorraum V wieder durch den Tangentialraum $T_p M$ einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ ersetzt. Eine Karte (U, φ) von M liefert an jedem Punkt $p \in M$ die Koordinatenbasis $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ mit dualer Basis $\{dx^i|_p\}$. Somit bildet die Menge

$$\{dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_r}|_p \mid 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n\}$$

eine Basis des $T^r(T_p M)$.

2.9.2 Kovariante Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Für eine C^∞ -Mannigfaltigkeit M definieren wir zunächst das Tensorbündel vom Typ $(r, 0)$ durch

$$T^r M := \bigcup_{p \in M} T^r(T_p M).$$

Definition 2.9.6 (Kovariantes Tensorfeld). *Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein r -fach kovariantes Tensorfeld (oder $(r, 0)$ -Tensorfeld) auf M ist eine Abbildung $T : M \rightarrow T^r M$, so dass $T(p) \in T^r(T_p M)$ für alle $p \in M$.*

Lokale Darstellung von kovarianten Tensorfeldern

Wie schon bei Vektor- und Kovektorfeldern kann auch ein r -fach kovariantes Tensorfeld T einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M lokal für eine Karte (U, φ) in jedem Punkt $p \in U$ geschrieben werden:

$$T(p) = T_{i_1, \dots, i_r}(p) dx^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_r}|_p.$$

Dadurch werden für eine gegebene Karte (U, φ) n^r Funktionen $T_{i_1, \dots, i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ definiert. Als Gleichung für Tensorfelder kann T lokal als

$$T = T_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r}$$

geschrieben werden. Die Komponentenfunktionen $T_{k_1, \dots, k_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich nun wie folgt berechnen:

$$T(p) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^{k_r}} \right|_p \right) = T_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \right|_p \right) \dots dx^{i_r} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^{k_r}} \right|_p \right) = T_{k_1, \dots, k_r}$$

für $1 \leq k_1, \dots, k_r \leq n$.

Definition 2.9.7 (Differenzierbares r -fach kovariantes Tensorfeld). *Ein Tensorfeld T auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M heißt differenzierbar (oder von der Klasse C^k), wenn für alle Karten von M die zugehörigen Komponentenfunktionen T_{i_1, \dots, i_r} differenzierbar (oder von der Klasse C^k) sind. $\mathcal{T}^r(M)$ bezeichnet die Menge aller differenzierbaren Vektorfelder auf M .*

Definition 2.9.8 (Pullback). *Sei $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Für jedes $p \in M$ erhalten wir eine Abbildung $F^* : T^r(T_{F(p)}N) \rightarrow T^r(T_pM)$, die wir Pullback nennen, durch*

$$(F^*S)(X_1, \dots, X_r) := S(F_*X_1, \dots, F_*X_r)$$

für $S \in T^r(T_{F(p)}N)$ und $X_i \in T_pM$, $i = 1, \dots, r$. Hierbei bezeichnet F_* den Pushforward aus Definition 2.4.3. Den Pullback eines r -fach kovarianten Tensorfelds $T \in \mathcal{T}^r(N)$ definieren wir durch

$$(F^*T)(p) := F^*(T(F(p))).$$

Die Lie-Ableitung, die in Definition 2.5.5 eingeführt wurde, kann man als Ableitung eines Vektorfeldes bezüglich eines anderen Vektorfeldes auffassen. Es ist auch möglich, kovariante Tensorfelder bezüglich eines Vektorfeldes abzuleiten.

Definition 2.9.9 (Lie Ableitung von kovarianten Tensorfeldern). *Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und T ein differenzierbares r -fach kovariantes Tensorfeld auf M . Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{T}(M)$ definieren wir die Lie-Ableitung von T in Richtung von X durch*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)(Y_1, \dots, Y_r) := & X(T(Y_1, \dots, Y_r)) \\ & - T(\mathcal{L}_X Y_1, Y_2, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{k-1}, \mathcal{L}_X Y_r) \end{aligned}$$

für alle Vektorfelder $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{T}(M)$.

2.10 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

2.10.1 Die Riemannsche Metrik

Definition 2.10.1 (Riemannsche Metrik). Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik auf M ist ein differenzierbares $(2, 0)$ -Tensorfeld g auf M , so dass für jedes $p \in M$

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt auf $T_p M$ ist. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, g) , wobei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik ist. Man schreibt oft auch $\langle X, Y \rangle_g$ oder $g(X, Y)$ anstelle von $g(p)(X, Y)$ für $X, Y \in T_p M$ und $p \in M$.

Mithilfe der Riemannschen Metrik sind wir in der Lage, die Längen von Vektoren und die Winkel zwischen ihnen zu messen.

Definition 2.10.2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

1. Die Norm bzw. die Länge eines Tangentialvektors $X \in T_p M$ ist definiert durch

$$|X|_g := \sqrt{\langle X, X \rangle_g} = g(p)(X, X)^{1/2}.$$

2. Der Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren $X, Y \in T_p M \setminus \{0\}$ ist das eindeutige $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\theta) = \frac{\langle X, Y \rangle_g}{|X|_g |Y|_g}.$$

3. Zwei Tangentialvektoren $X, Y \in T_p M$ heißen orthogonal, falls $\langle X, Y \rangle_g = 0$.
4. Falls $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise C^1 -Kurve ist, dann ist die Länge von γ definiert durch

$$L_g(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|_g dt.$$

Hier ist γ' wie in Definition 2.6.4 zu verstehen. Das obige Integral ist wohldefiniert, da $|\gamma'|_g$ an allen bis auf endlich vielen Stellen definiert und stetig ist. Es ist wichtig zu bemerken, dass $L_g(\gamma)$ invariant unter Umparametrisierung der Kurve γ ist (vgl. [Lee03, Proposition 11.15]).

5. Die L^∞ -Norm eines Vektorfelds $X \in \mathcal{T}(M)$ ist definiert durch

$$\|X\|_{L^\infty(M)} := \sup_{p \in M} |X(p)|_g.$$

Mithilfe von Kurven ist es möglich, den Abstand von zwei Punkten $p, q \in M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) zu definieren.

Definition 2.10.3 (Abstandsfunktion). Sei (M, g) eine zusammenhängende³ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Dann ist der Abstand von p und q definiert durch

$$d_g(p, q) := \inf \{L_g(\gamma) \mid \gamma \text{ ist stückweise } C^1\text{-Kurve von } p \text{ nach } q\}.$$

Da zwei Punkte einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit immer durch stückweise C^1 -Kurven verbunden werden können (Lemma 2.6.3), ist die Abstandsfunktion $d_g(\cdot, \cdot)$ wohldefiniert.

Riemannsche Untermannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit. Mithilfe des Pullbacks können wir nun ein differenzierbares $(2, 0)$ -Tensorfeld $g|_S$ auf S definieren. Dazu definieren wir $g|_S := \iota^*g$, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusion bezeichnet. Nach Definition gilt für zwei Tangentialvektoren $X, Y \in T_pS$ mit $p \in S$

$$(g|_S)(X, Y) = (\iota^*g)(X, Y) = g(\iota_*X, \iota_*Y) = g(X, Y),$$

wobei wir T_pS als Unterraum des T_pM auffassen (vgl. Abschnitt 2.7). Somit ist $g|_S$ tatsächlich die Einschränkung von g auf die zu S tangentialen Vektoren. Da die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Unterraum wieder ein Skalarprodukt ist, ist $g|_S$ eine Riemannsche Metrik auf S und wird auch induzierte Metrik genannt. S heißt, mit dieser Metrik versehen, Riemannsche Untermannigfaltigkeit von M .

Definition 2.10.4 (Orthogonalvektor). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $S \subseteq M$ als C^∞ -Untermannigfaltigkeit. Ein Vektor $X \in T_pM$ mit $p \in S$ heißt orthogonal zu S , falls er bezüglich g orthogonal zu allen Vektoren aus T_pS ist.

Beispiel 2.10.5 (Sphäre). Die Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} (vgl. Beispiel 2.7.5). Das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^{n+1} , $\widehat{g} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, induziert durch die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine Riemannsche Metrik $g = \widehat{g}|_{\mathbb{S}^n} := \iota^*\widehat{g}$ auf \mathbb{S}^n .

³Das heißt, dass M zusammenhängend ist.

Lokale Darstellung der Riemannschen Metrik

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine Karte (U, φ) hat g gemäß Unterabschnitt 2.9.2 lokal die Gestalt

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

wobei $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix mit differenzierbaren Funktionen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ als Einträgen ist. Diese lassen sich berechnen zu

$$g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right); \text{ das heißt } g_{ij}(p) = g(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \text{ für } p \in U. \quad (2.10.1)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ kann demnach lokal als

$$g(X, Y) = g \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i Y^j g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i Y^j g_{ij}.$$

geschrieben werden.

Beispiel 2.10.6 (2-Sphäre, die induzierte Metrik in lokalen Koordinaten).

Wir betrachten Beispiel 2.10.5 für den Spezialfall $n = 2$ und wollen die lokale Darstellung der induzierten Metrik g ausrechnen. Sei dazu (U, φ) eine Karte der 2-Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (z. B. die sphärischen Koordinaten aus Beispiel 2.2.3). Die zu (U, φ) gehörigen lokalen Koordinaten bezeichnen wir mit $(x^i)_{i=1,2}$ und die Standardkoordinaten von \mathbb{R}^3 mit $(\hat{x}^\alpha)_{\alpha=1,2,3}$. Die Standard-Riemannsche Metrik \hat{g} des \mathbb{R}^3 hat damit die Komponenten $\hat{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, wobei $\delta_{\alpha\beta}$ das Kronecker-Delta bezeichnet.

Sei $\xi \in T_p \mathbb{S}^2$ für $p \in U$. Dessen Pushforward $\iota_* \xi$ unter der Inklusion $\iota : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ist ein Element des $T_p \mathbb{R}^3$. Falls $(\xi^i)_{i=1,2}$ die Komponenten von ξ in der Koordinatenbasis $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ des $T_p \mathbb{S}^2$ bezeichnen, dann ergibt sich gemäß Bemerkung 2.4.7 für die Komponenten $(\iota_* \xi)^\alpha$ von $\iota_* \xi$ in der Koordinatenbasis $\{\partial/\partial \hat{x}^\alpha|_p\}$ des $T_p \mathbb{R}^3$ die folgende Gleichung:

$$(\iota_* \xi)^\alpha = \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^i}(p) \xi^i.$$

Nun können wir die lokale Darstellung der induzierten Metrik g bezüglich der lokalen Koordinaten $(x^i)_{i=1,2}$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= g \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = (\iota^* \hat{g}) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \hat{g} \left(\iota_* \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \iota_* \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \\ &= \hat{g}_{\alpha\beta}(p) \left(\iota_* \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)^\alpha \left(\iota_* \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right)^\beta = \hat{g}_{\alpha\beta}(p) \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^i}(p) \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^j}(p). \end{aligned}$$

Da \widehat{g} das Standardskalarprodukt ist, gilt $(g_{ij}) = J^t J$, wobei

$$J = \left(\frac{\partial \widehat{x}^\alpha}{\partial x^i} \right)_{\substack{\alpha \in \{1,2,3\} \\ i \in \{1,2\}}}$$

die lokale Repräsentation der Jakobimatrix der Einbettung ι ist.

Wir bemerken abschließend, dass sich mithilfe der Zerlegung der Eins (Lemma 2.12.1) zu jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik konstruieren lässt (vgl. [Lee03, Proposition 11.26]).

2.10.2 Der Gradient

Im euklidischen Fall ($M = \mathbb{R}^n$) ist das Skalarprodukt zwischen dem Gradienten $\nabla_g f$ einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und einem Einheitsvektor $X \in T_p \mathbb{R}^n$ gleich der Richtungsableitung von f in Richtung von X an der Stelle p , das heißt gleich $X(f)$. Wir definieren den Gradienten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten anhand dieser Eigenschaft.

Definition 2.10.7 (Gradient). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. Der Gradient von f ist das eindeutige Vektorfeld $\nabla_g f \in \mathcal{T}(M)$, das

$$\langle \nabla_g f(p), X \rangle_g = X(f)$$

für jeden Tangentialvektor $X \in T_p M$ und $p \in M$ erfüllt.

Bemerkung 2.10.8. Der Gradient ist wohldefiniert: Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) erhält man an jedem Punkt $p \in M$ eine Abbildung $\widetilde{g} : T_p M \rightarrow T_p^* M$, die für $X \in T_p M$ durch

$$\widetilde{g}(X)(Y) := g(p)(X, Y) = \langle X, Y \rangle_g \text{ für alle } Y \in T_p M$$

definiert ist. Dieses \widetilde{g} ist ein Isomorphismus:

Man sieht sofort, dass \widetilde{g} linear ist. Ist $\widetilde{g}(X) = 0$ für ein $X \in T_p M$, dann folgt daraus, dass auch $0 = \widetilde{g}(X)(X) = \langle X, X \rangle_g$ ist, weshalb schon $X = 0$ sein musste. Aus Dimensionsgründen ist \widetilde{g} somit bijektiv und ein Isomorphismus. Der Gradient ist nun nichts anderes als $\widetilde{g}^{-1}(df(p))$, denn

$$\langle \widetilde{g}^{-1}(df(p)), X \rangle_g = \widetilde{g}(\widetilde{g}^{-1}(df(p)))(X) = df(p)(X) = X(f)$$

für alle $X \in T_p M$.

Beispiel 2.10.9 (Ableitung einer Funktion entlang einer Kurve). Seien u , M und $\gamma : J \rightarrow M$ wie in Beispiel 2.8.7. Nach (2.8.1), (2.8.2) und der Definition des Gradienten (Definition 2.10.7) gilt für die Ableitung der Abbildung $u \circ \gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $t \in J$

$$(u \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla_g u(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle_g. \quad (2.10.2)$$

Lokale Darstellung des Gradienten

Wir wollen die Komponenten des Gradienten in der Koordinatenbasis für eine Karte (U, φ) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) berechnen. Sei dazu $f \in C^\infty(M)$ und $p \in U$. Es gilt

$$\left\langle \nabla_g f(p), \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\rangle_g = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \quad (2.10.3)$$

Wenn wir die Komponenten des Gradienten in der Koordinatenbasis mit $(\nabla_g f)^l$ für $l = 1, \dots, n$ bezeichnen, dann ist Gleichung (2.10.3) äquivalent zu

$$g_{li}(p) (\nabla_g f)^l(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \quad (2.10.4)$$

Wir bezeichnen die Inverse der Matrix $(g_{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq n}$ mit $(g^{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq n}$. Multiplizieren wir nun Gleichung (2.10.4) mit $g^{ij}(p)$ und summieren (implizit) über i , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} g^{ij}(p) g_{li}(p) (\nabla_g f)^l(p) &= g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ \Leftrightarrow \delta_l^j (\nabla_g f)^l(p) &= g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ \Leftrightarrow (\nabla_g f)^j(p) &= g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \end{aligned}$$

wobei δ_l^j das Kronecker-Delta bezeichnet. Somit lässt sich der Gradient lokal schreiben als

$$\nabla_g f(p) = g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p,$$

bzw. als Gleichung für Vektorfelder

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Bemerkung 2.10.10. Die obige Berechnung der lokalen Komponenten des Gradienten $\nabla_g f$ zeigt uns, dass der Gradient von der Klasse C^{k-1} ist, falls wir für die Funktion f die Klasse C^k voraussetzen.

2.10.3 Kürzeste Verbindungen

Der Abstand zweier Punkte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wurde durch das Infimum über die Längen der Kurven, welche die beiden Punkte verbinden,

definiert (vgl. Definition 2.10.3). Wir präsentieren in diesem Unterabschnitt, wie solche Kurven, welche die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellen, aussehen, und unter welchen Voraussetzungen es solche Kurven gibt.

Definition 2.10.11. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ heißt Geodäte, falls sie lokal die folgenden Differentialgleichungen erfüllt.*

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.10.5)$$

wobei $\gamma^k(t) = (\varphi \circ \gamma)^k(t)$ für eine Karte φ ist und mit

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} \right), \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (2.10.6)$$

die Christoffelsymbole bezeichnet werden.

Wir haben folgende Aussage über die Existenz von Geodäten als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Satz 2.10.12. *Sei (M, g) eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $p, q \in M$ gibt es eine Geodäte $\gamma : [0, b] \rightarrow M$, die p mit q verbindet, das heißt $\gamma(0) = p$ und $\gamma(b) = q$, so dass $L(\gamma) = d_g(p, q)$.*

Beweis: Siehe [dC92, Theorem 2.8 und Corollary 2.9].

Definition 2.10.13. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls*

$$|\gamma'|_g \equiv 1.$$

Bemerkung 2.10.14. *Man kann zeigen, dass Geodäten proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Eine Umparametrisierung nach Bogenlänge ist also leicht möglich.*

In der Konvergenzanalyse des Finite Volumen Verfahrens (siehe Kapitel 8) werden wir das folgende Lemma benötigen.

Lemma 2.10.15. *Sei (M, g) eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist $\phi \in C^1(M)$, dann gilt für alle p, q in M , dass*

$$|\phi(p) - \phi(q)| \leq \sup_{t \in [0, b]} |\nabla_g \phi(\gamma_{pq}(t))|_g d_g(p, q),$$

wobei γ_{pq} die minimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte aus Satz 2.10.12 ist, die p mit q verbindet, und $b := d_g(p, q)$.

Beweis: Mit $\tilde{\phi} := \phi \circ \gamma_{pq} : [0, d_g(p, q)] \rightarrow M$ gilt $\phi(p) = \tilde{\phi}(0)$ und $\phi(q) = \tilde{\phi}(d_g(p, q))$. Aufgrund von (2.10.2) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}'(t) &= (\phi \circ \gamma_{pq})'(t) = \langle \nabla_g \phi(\gamma_{pq}(t)), \gamma'_{pq}(t) \rangle_g \\ &\leq |\nabla_g \phi(\gamma_{pq}(t))|_g |\gamma'_{pq}(t)|_g \leq \sup_{t \in [0, b]} |\nabla_g \phi(\gamma_{pq}(t))|_g. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\phi(q) - \phi(p) = \tilde{\phi}(d_g(p, q)) - \tilde{\phi}(0) = \int_0^{d_g(p, q)} \tilde{\phi}'(t) dt \leq \sup_{t \in [0, b]} |\nabla_g \phi(\gamma_{pq}(t))|_g d_g(p, q).$$

Durch Vertauschen von p und q erhalten wir das analoge Resultat für $\phi(p) - \phi(q)$ und aus beiden zusammen folgt dann die Behauptung. \square

2.11 Mannigfaltigkeiten mit Rand

In der Definition von Mannigfaltigkeiten, Definition 2.1.1, ist der Begriff eines Randes einer Mannigfaltigkeit bisher nicht eingeführt worden. Man beachte, dass es nach dieser Definition auch gar keinen Sinn macht, von einem Rand ∂M einer Mannigfaltigkeit M zu sprechen, da Mannigfaltigkeiten auf der Grundlage eines eigenständigen, ihnen zugrunde liegenden topologischen Raumes definiert wurden und nicht durch eine Einbettung in den euklidischen Raum \mathbb{R}^n , wie es in Analysis-Vorlesungen oft üblich ist.

Wichtige Anwendungen von Mannigfaltigkeiten werden jedoch, vor allem bei der Integration (z. B. Satz von Gauß), Mannigfaltigkeiten miteinbeziehen, die eine gewisse Art Rand besitzen. Deshalb verallgemeinern wir an dieser Stelle unsere Definition von Mannigfaltigkeiten.

Das Standardmodell für Mannigfaltigkeiten mit Rand ist der abgeschlossene Halbraum.

Definition 2.11.1 (abgeschlossener Halbraum).

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^n &:= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\} \\ \partial \mathbb{H}^n &:= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\} \\ \text{Int } \mathbb{H}^n &:= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\} \end{aligned}$$

Hierbei sei \mathbb{H}^n mit der vom \mathbb{R}^n induzierten Topologie versehen. Dabei heißt $\partial \mathbb{H}^n$ Rand und $\text{Int } \mathbb{H}^n$ das Innere von \mathbb{H}^n .

Definition 2.11.2 (Mannigfaltigkeit mit Rand). Wir definieren eine n -dimensionale C^0 -Mannigfaltigkeit mit Rand als einen topologischen Hausdorffraum M mit abzählbarer topologischer Basis, wobei jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, die homöomorph zu einer offenen⁴ Teilmenge des \mathbb{H}^n ist (Abbildung 2.13). Ein Paar (U, φ) , bestehend aus einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ zusammen mit einem Homöomorphismus φ von U in eine offene Teilmenge $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$, heißt, wie im Falle von Mannigfaltigkeiten, Karte. Die Begriffe Kartengebiet, Parametergebiet, lokale Koordinaten, lokale Parametrisierung und C^0 -Atlas können entsprechend aus Definition 2.1.1 übertragen werden.

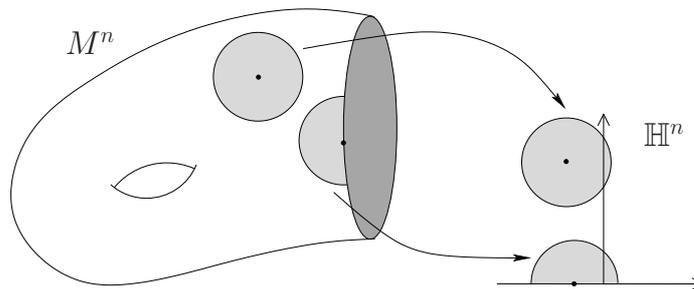


Abbildung 2.13: Mannigfaltigkeit mit Rand.

Damit alle Begriffe und Aussagen, die wir für C^∞ -Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) getroffen haben, auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand mit Sinn erfüllt sind und gelten, müssen wir den Begriff der Differenzierbarkeit für Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand entsprechend definieren. Wir beginnen bei dem Modellraum \mathbb{H}^n (Abbildung 2.14).

Definition 2.11.3 (Differenzierbarkeit auf dem Halbraum \mathbb{H}^n). Sei $V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen (das heißt $V = U \cap \mathbb{H}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$. Existiert für jedes $x \in V$ eine Umgebung $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, die offen in \mathbb{R}^n ist, und eine sogenannte Fortsetzung $\tilde{f} \in C^m(\tilde{V}, \mathbb{R}^k)$ von f (das heißt $f|_{V \cap \tilde{V}} = \tilde{f}|_{V \cap \tilde{V}}$), dann heißt f von der Klasse C^m beziehungsweise für den Fall $m = \infty$ differenzierbar.

Bemerkung 2.11.4. Definition 2.11.3 ist anzumerken, dass aufgrund der Stetigkeit die partiellen Ableitungen von f auf $V \cap \partial\mathbb{H}^n$ schon durch ihre Werte in $V \cap \text{Int } \mathbb{H}^n$ bestimmt sind und somit unabhängig von der Fortsetzung sind.

Definition 2.11.5 (Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten mit Rand). Sei M eine n -dimensionale C^0 -Mannigfaltigkeit mit Rand. Hat M einen C^0 -Atlas

⁴Offen ist hier bezüglich der induzierten Topologie zu verstehen.

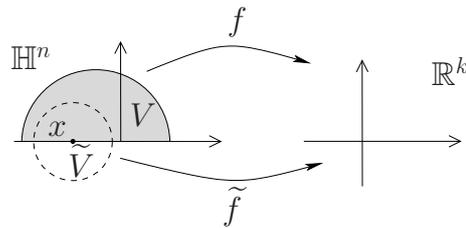


Abbildung 2.14: Differenzierbarkeit auf dem Halbraum \mathbb{H}^n .

\mathcal{A} , dessen Karten untereinander C^k -verträglich⁵ sind, dann nennen wir \mathcal{A} einen C^k -Atlas. Besitzt M einen maximalen C^∞ -Atlas, so heißt M differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Weiter definieren wir

1. $p \in M$ heißt Randpunkt von M , falls eine Karte (U, φ) , $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$, existiert mit $p \in U$ und $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$.
2. $p \in M$ heißt innerer Punkt von M , falls eine Karte (U, φ) , $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$, existiert mit $p \in U$ und $\varphi(p) \in \text{Int } \mathbb{H}^n$.
3. $\partial M := \{p \in M \mid p \text{ ist Randpunkt von } M\}$
4. $\text{Int } M := \{p \in M \mid p \text{ ist innerer Punkt von } M\}$

Bemerkung 2.11.6. Die Definition von Mannigfaltigkeiten mit Rand ist tatsächlich eine Verallgemeinerung von Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), denn mithilfe der Abbildung $(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, e^{x^n})$ können wir jede Karte einer Mannigfaltigkeit so modifizieren, dass sie nur Werte in $\text{Int } \mathbb{H}^n$ annimmt, ohne dabei den Differenzierbarkeitsbegriff zu beeinflussen.

Definition 2.11.7 (Differenzierbare Abbildung). Wir nennen eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten mit Rand differenzierbar oder von der Klasse C^k , falls ihre lokale Repräsentation differenzierbar oder von der Klasse C^k ist (im Sinne von Definition 2.11.3).

Bemerkung 2.11.8 (Tangentialvektor). Sei M^n eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein Tangentialvektor von M an einer Stelle $p \in \partial M$ wird wie auch bei Mannigfaltigkeiten als die Menge der Derivationen von $C^\infty(M)$ definiert und ist somit ein n -dimensionaler Vektorraum. Er hat für eine Karte auch eine Koordinatenbasis $\{\partial/\partial x^i|_p\}$.

Bemerkung 2.11.9 (Int M). Ist M^n eine C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist $\text{Int } M$ eine n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

⁵ C^k -verträglich ist dabei im Sinne der Differenzierbarkeit aus Definition 2.11.3 zu verstehen.

Bemerkung 2.11.10 (Die Untermannigfaltigkeit ∂M). Ist M^n eine C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist ∂M eine $(n - 1)$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Es gibt einen Atlas von ∂M , so dass die Inklusion $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ eine differenzierbare Einbettung ist. Somit ist ∂M eine C^k -Untermannigfaltigkeit von M . Dieser Atlas besteht im Wesentlichen aus den Karten von M , eingeschränkt auf ∂M .

Bemerkung 2.11.11 (Die induzierte Riemannsche Metrik auf ∂M). Falls (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ist, dann können wir entsprechend zu Unterabschnitt 2.10.1 eine Riemannsche Metrik $g|_{\partial M}$ auf ∂M definieren, da ∂M eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von M ist (vgl. Bemerkung 2.11.10).

Definition 2.11.12 (Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten). Ist M^n eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Rand und $S \subseteq M$ eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von M . Ein Vektorfeld entlang S von der Klasse C^k ist eine C^k -Abbildung $N : S \rightarrow TM$ mit $N(p) \in T_p M$ für jedes $p \in S$.

Definition 2.11.13 (Nach außen (innen) gerichtete Vektoren). Ist M^n eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in \partial M$. Ein Vektor $X \in T_p M$ heißt nach außen (innen) gerichtet, falls für eine Karte (U, φ) von M mit $p \in U$ die $\partial/\partial x^n$ -Komponente von X negativ (positiv) ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte.

Definition 2.11.14 (Äußeres Normalenfeld). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und N ein Vektorfeld entlang der Untermannigfaltigkeit ∂M (vgl. Bemerkung 2.11.10 und Definition 2.11.12). Falls N für jedes $p \in \partial M$

1. nach außen gerichtet ist,
2. orthogonal zu $T_p \partial M \subseteq T_p M$ ist, das heißt $\langle N(p), X \rangle_g = 0$ für alle $X \in T_p \partial M$,
3. genormt ist, das heißt $|N(p)|_g = 1$,

dann heißt N äußeres Normalenfeld entlang ∂M .

Die Existenz eines solchen äußeren Normalenfeldes zitieren wir aus [Lee03, Proposition 13.26].

Lemma 2.11.15 (Existenz eines äußeren Normalenfeldes). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, dann gibt es ein eindeutiges differenzierbares äußeres Normalenfeld N entlang ∂M .

2.12 Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Wie im euklidischen Fall üblich wollen wir auch Erhaltungsgleichungen auf Mannigfaltigkeiten schwach formulieren. Dazu führen wir die Integration von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten ein. Um ein Integral über einer ganzen Mannigfaltigkeit auf die einzelnen Kartengebiete aufteilen zu können, benötigen wir eine Zerlegung der Eins.

Ein Beweis des folgenden Existenzlemmas ist in [Lee03, Theorem 2.25] zu finden.

Lemma 2.12.1 (Zerlegung der Eins). *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine Zerlegung der Eins, die der Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ untergeordnet ist. Das bedeutet, dass es Funktionen $\{\psi_\lambda : M \rightarrow [0, 1]\}_{\lambda \in \Lambda}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

1. $\text{supp } \psi_\lambda$ ist kompakt für alle $\lambda \in \Lambda$.
2. $\text{supp } \psi_\lambda \subset U_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.
3. Zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung U , für die die Menge $\{\lambda \in \Lambda \mid \text{supp } \psi_\lambda \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist.
4. $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Wir sind jetzt in der Lage, das Integral zu definieren.

Definition 2.12.2 (Integral). *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ein Atlas von M . Sei $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Zerlegung der Eins, die der Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ untergeordnet ist. Für eine Funktion $f \in C^0(M)$ mit kompaktem Träger definieren wir*

$$\int_M f dv_g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} (\psi_\lambda \sqrt{|g|} f) \circ \varphi_\lambda^{-1} dx,$$

wobei $|g|$ die Determinante der Matrix $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ und dx das Lebesguesche Volumenelement im \mathbb{R}^n bezeichnen.

Man kann zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl des Atlas abhängt.

Bemerkung 2.12.3 (Radonmaß). *Die Abbildung $f \mapsto \int_M f dv_g$ definiert ein positives Radonmaß und die Theorie der Lebesgueintegrale kann somit angewandt werden. Vergleiche dazu [Aub82, Seite 30].*

Die Definition des Integrals liefert uns ein Volumenmaß auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Definition 2.12.4 (Volumenmaß). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $E \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann definieren wir das Volumen von E als

$$dvol_g(E) := \int_M \mathbb{1}_E dv_g,$$

falls es existiert. Dabei bezeichnet $\mathbb{1}_E$ die Indikatorfunktion.

Wir können nun Lebesgueräume definieren.

Definition 2.12.5 (L^p -Räume). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Für eine $dvol_g$ -messbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p(M)} := \left(\int_M |f|^p dv_g \right)^{1/p}$$

und

$$\|f\|_{L^\infty(M)} := \inf_{\substack{N \subseteq M \\ dvol_g(N)=0}} \sup_{p \in M \setminus N} |f(p)|,$$

falls sie existieren. Weiter definieren wir

$$L^p(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } dvol_g\text{-messbar und } \|f\|_{L^p(M)} < \infty\}.$$

Ein weiterer Begriff, der bei Erhaltungsgleichungen eine zentrale Rolle spielt, ist die Divergenz. Wir wollen sie so definieren, dass sie eine gewisse partielle Integration erfüllt.

Definition 2.12.6 (Divergenz). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $X \in \mathcal{T}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Die Divergenz von X wird definiert als die eindeutige Funktion $\operatorname{div}_g X$, die für alle Funktionen $u \in C_0^\infty(\operatorname{Int} M)$ die Gleichung

$$\int_M u \operatorname{div}_g X dv_g = - \int_M \langle \nabla_g u, X \rangle_g dv_g$$

erfüllt.

Bemerkung 2.12.7. Wir übernehmen die Notationen aus Definition 2.12.6 und merken an, dass (lokal) die folgende Identität gilt:

$$\langle X, \nabla_g u \rangle_g = g_{ij} X^i g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k} = X^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = X(u) = du(X).$$

Lokale Darstellung der Divergenz

Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, $X \in \mathcal{T}(M)$ ein glattes Vektorfeld und (U, φ) eine Karte von M . Wir definieren das Innere von U durch $\text{Int } U := U \cap \text{Int } M$. Mit $u \in C_0^\infty(\text{Int } U)$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \int_M u \operatorname{div}_g X \, dv_g &= - \int_M du(X) \, dv_g \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x^i} X^i \sqrt{|g|} \, dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{|g|}) \, dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{|g|}) \sqrt{|g|} \, dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_M \frac{u}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{|g|}) \, dv_g. \end{aligned}$$

Somit ist die lokale Darstellung von $\operatorname{div}_g X$ bzgl. der Karte φ gegeben durch

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{|g|}). \quad (2.12.1)$$

Bemerkung 2.12.8. *Man kann die Divergenz auch über die lokale Darstellung aus Gleichung (2.12.1) definieren und zeigen, dass diese Definition koordinatenunabhängig ist.*

Die Divergenz erfüllt die folgende Produktregel.

Lemma 2.12.9 (Produktregel). *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Seien weiterhin X ein Vektorfeld der Klasse C^1 und $\eta \in C^1(M)$, dann gilt*

$$\operatorname{div}_g (\eta X) = \langle \nabla_g \eta, X \rangle_g + \eta \operatorname{div}_g X.$$

Beweis: In lokalen Koordinaten können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g (\eta X) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\eta X^i \sqrt{|g|}) = \frac{\partial \eta}{\partial x^i} X^i + \eta \operatorname{div}_g X \\ &= X(\eta) + \eta \operatorname{div}_g X = \langle \nabla_g \eta, X \rangle_g + \eta \operatorname{div}_g X. \end{aligned}$$

□

An dieser Stelle haben wir die Grundlage geschaffen, um den Satz von Gauß formulieren zu können.

Satz 2.12.10 (Satz von Gauß). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathcal{T}(M)$ mit kompaktem Träger gilt

$$\int_M \operatorname{div}_g X dv_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle_g dv_{\tilde{g}},$$

wobei N das äußere Normalenfeld von M entlang ∂M ist (vgl. Lemma 2.11.15) und $\tilde{g} = g|_{\partial M}$ die von M auf ∂M induzierte Riemannsche Metrik (vgl. Bemerkung 2.11.11).

Beweis: Siehe [Lee03, Theorem 14.34]. □

Mithilfe der Produktregel (siehe Lemma 2.12.9) für die Divergenz lässt sich aus dem Satz von Gauß die partielle Integration folgern.

Korollar 2.12.11 (Partielle Integration). Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Seien weiterhin X ein Vektorfeld der Klasse C^1 und $\eta \in C^1(M)$ so, dass deren Produkt ηX kompakten Träger besitzt. Dann gilt

$$-\int_M \eta \operatorname{div}_g X dv_g = \int_M \langle \nabla_g \eta, X \rangle_g dv_g - \int_{\partial M} \eta \langle X, N \rangle_g dv_{\tilde{g}},$$

wobei N das äußere Normalenfeld von M entlang ∂M bezeichnet (vgl. Lemma 2.11.15) und $\tilde{g} = g|_{\partial M}$ die von M auf ∂M induzierte Riemannsche Metrik (vgl. Bemerkung 2.11.11).

Definition 2.12.12 (Laplace Operator). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $u \in C^\infty(M)$. Mit $\Delta_g u$ wird der Laplace Operator (auch Laplace-Beltrami Operator genannt) von u bezeichnet und ist definiert durch

$$\Delta_g u = \operatorname{div}_g (\nabla_g u).$$

Lokale Darstellung von $\Delta_g u$

Wir wollen die lokale Darstellung des Laplace Operators für eine Karte (U, φ) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) berechnen. Es gilt für $u \in C^\infty(M)$ auf U

$$\Delta_g u = \operatorname{div}_g (\nabla_g u) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \sqrt{|g|} \right).$$

Eine andere lokale Darstellung des Laplace Operators bedient sich der Christoffelsymbole, die durch (2.10.6) definiert sind. Wie man in [Tay96, Seite 140] nachlesen kann, gilt lokal auch

$$\Delta_g u = g^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k}. \quad (2.12.2)$$

2.13 Sobolev-Räume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Wir werden in diesem Abschnitt Sobolev-Räume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten definieren. Mehr über diese Räume findet man zum Beispiel in [Aub82] oder [Heb99].

Definition 2.13.1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $u \in C^k(M)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir für $x \in M$

$$|\nabla^k u(x)|^2 := \nabla^{i_1} \nabla^{i_2} \cdots \nabla^{i_k} u(x) \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_k} u(x),$$

wobei $\nabla_i u(x) := \partial_i u(x)$, $\nabla^i := g^{ij} \partial_j$ für $1 \leq i \leq n$ und (U, φ) eine beliebige Karte um x ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte. Insbesondere ist dann $|\nabla^0 u| = |u|$ und

$$|\nabla^1 u|^2 = g^{ij} \partial_i u \partial_j u = |\nabla_g u|_g^2.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $p > 1$ definieren wir

$$\mathcal{C}^{k,p}(M) := \{u \in C^\infty(M) \mid \forall j = 0, \dots, k, |\nabla^j u| \in L^p(M)\}$$

und wir definieren den Sobolev-Raum $H^{k,p}(M)$ als den Abschluss von $\mathcal{C}^{k,p}(M)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^{k,p}(M)} := \sum_{j=0}^k \| |\nabla^j u| \|_{L^p(M)} = \sum_{j=0}^k \left(\int_M |\nabla^j u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

So ist zum Beispiel

$$\|u\|_{H^{1,1}(M)} = \|u\|_{L^1(M)} + \| |\nabla_g u|_g \|_{L^1(M)} = \int_M |u| dv_g + \int_M |\nabla_g u|_g dv_g.$$

2.14 Kettenregeln für Ableitungen von Flussfunktionen

Vektorwertige Größen sind ab hier dadurch gekennzeichnet, dass sie fett abgedruckt sind. Wir werden in Kapitel 3 die Erhaltungsgleichung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit einführen. Dort wird eine Flussfunktion \mathbf{f} auftauchen, die eine durch $\bar{u} \in \mathbb{R}$ parametrisierte Familie von Vektorfeldern darstellt. In diesem Abschnitt werden wir einige Ableitungsregeln präsentieren, die in Kapitel 3 und 5 von Nutzen sein werden. Diese werden im folgenden Lemma, das [ABAL05] entnommen ist, bereitgestellt.

Lemma 2.14.1. *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, wobei $U \subseteq M$ offen sei. Für jeden Wert des Parameters $\bar{u} \in \mathbb{R}$ seien $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ und $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\bar{u}, \cdot)$ differenzierbare Vektorfelder auf M , die glatt vom Parameter \bar{u} abhängen. Dann gelten für alle $x \in U$, $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M)$ und $h \in C^\infty(M)$ die folgenden Identitäten:*

$$\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, x)) = du(\partial_u \mathbf{f}(u, x)) + (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x), \quad (2.14.1)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}(u, x)) = \mathbf{X}(u) \partial_u \mathbf{Y}(u, x) + (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})(u, x), \quad (2.14.2)$$

$$\mathbf{X}(h(u, x)) = \mathbf{X}(u) \partial_u h(u, x) + \mathbf{X}(h)(u, x). \quad (2.14.3)$$

Beweis: Wir betrachten an der Stelle $x \in U$ eine umgebende Karte und rechnen in lokalen Koordinaten. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, x)) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(f^i(u, x) \sqrt{|g|} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(f^i \sqrt{|g|} \right) (u, x) + \frac{\partial f^i}{\partial u}(u, x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x) + du(\partial_u \mathbf{f}(u, x)), \end{aligned}$$

wobei f^i die Komponenten von \mathbf{f} in der Koordinatenbasis bezeichnen. Damit ist Gleichung (2.14.1) gezeigt. Um Gleichung (2.14.2) zu zeigen, berechnen wir die i -te Komponente von $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}(u, x))$ in der Koordinatenbasis zu

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}(u, x)))^i &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}(u, x)]^i = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} (Y^i(u, x)) - Y^j(u, x) \frac{\partial}{\partial x^j} (X^i) \\ &= \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Y^i - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} X^i \right) (u, x) + X^j \partial_u Y^i(u, x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \\ &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i(u, x) + X^j \frac{\partial u}{\partial x^j} \partial_u Y^i(u, x). \end{aligned}$$

Gleichung (2.14.3) erhalten wir auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(h(u, x)) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (h(u, x)) = X^i \frac{\partial h}{\partial x^i}(u, x) + X^i \partial_u h(u, x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= \mathbf{X}(u) \partial_u h(u, x) + \mathbf{X}(h)(u, x). \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Problemformulierung

Wir haben jetzt die Voraussetzungen geschaffen, um die zentrale Differentialgleichung dieser Arbeit einführen zu können. In diesem Kapitel entwickeln wir, analog zum euklidischen Fall, einen angemessenen, physikalisch sinnvollen Lösungsbegriff, bevor wir im nächsten Kapitel auf Existenz, Eindeutigkeit und andere Eigenschaften der Lösung eingehen werden.

3.1 Das Anfangswertproblem in der starken Formulierung

Wir interessieren uns für das folgende Anfangswertproblem, bestehend aus einer nichtlinearen hyperbolischen partiellen Differentialgleichung auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit ohne Rand (M, g) und einer Anfangsbedingung, das heißt

$$\partial_t u + \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot)) = 0 \quad \text{auf } M \times \mathbb{R}^+, \quad (3.1.1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{auf } M, \quad (3.1.2)$$

wobei $u : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Unbekannte ist, $u_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Anfangsdaten beschreibt und $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ für jeden Wert des Parameters $\bar{u} \in \mathbb{R}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf M ist, das glatt vom Parameter \bar{u} abhängt. Die Abbildung \mathbf{f} heißt Fluss.

3.2 Schwache Lösungen

Wie im euklidischen Fall können wir auch auf Mannigfaltigkeiten die Existenz einer klassischen Lösung für lange Zeiten im Allgemeinen nicht erwarten, auch nicht bei glatten Daten (vgl. z. B. [Krö97, Seite 16: Example 2.1.1]). Deshalb führen wir auch hier den schwachen Lösungsbegriff ein.

Definition 3.2.1 (Schwache Lösung). Sei $u_0 \in L^\infty(M)$. Dann heißt u schwache Lösung von (3.1.1) und (3.1.2) oder Lösung im Distributionssinne, falls $u \in L^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$ und

$$\int_M \int_{\mathbb{R}^+} u \partial_t \varphi + \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \nabla_g \varphi \rangle_g dt dv_g + \int_M \varphi(\cdot, 0) u_0 dv_g = 0 \quad (3.2.1)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(M \times [0, \infty[)$.

3.3 Entropiepaar

Schwache Lösungen sind jedoch im Allgemeinen nicht mehr eindeutig. Siehe dazu für den euklidischen Fall zum Beispiel [Krö97, Example 2.1.5]. Im allgemeinen Fall von Mannigfaltigkeiten ist eine Eindeutigkeit von schwachen Lösungen somit auch keineswegs zu erwarten. Um die physikalisch sinnvolle Lösung von (3.1.1) und (3.1.2) eindeutig auszuzeichnen, führen wir, analog zum euklidischen Fall, Entropiepaare, Entropiebedingungen und Entropielösungen ein.

Definition 3.3.1 (Entropiepaar). Ein Paar (U, \mathbf{F}) heißt Entropiepaar, falls $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion und $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u, x)$ ein Vektorfeld ist, so dass für fast alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$ und alle $x \in M$,

$$\partial_u \mathbf{F}(\bar{u}, x) = U'(\bar{u}) \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, x).$$

Ist U zusätzlich konvex, dann heißt (U, \mathbf{F}) konvexes Entropiepaar.

Beispiel 3.3.2 (Kruzkov-Entropien). Das wichtigste Beispiel für konvexe Entropiepaare sind die Familie der Kruzkov Entropien, die für $u, c \in \mathbb{R}$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} (U(u, c), \mathbf{F}(u, x, c)) &:= (|u - c|, \operatorname{sgn}(u - c) (\mathbf{f}(u, x) - \mathbf{f}(c, x))) \\ &= (u \vee c - u \wedge c, \mathbf{f}(u \vee c, x) - \mathbf{f}(u \wedge c, x)), \end{aligned}$$

wobei $u \vee c = \max \{u, c\}$ und $u \wedge c = \min \{u, c\}$.

Um die adäquate Entropieungleichung zu finden, überlegen wir uns, welche zusätzlichen Bilanzgleichungen eine glatte Lösung von (3.1.1) erfüllt.

Lemma 3.3.3 (Bilanzgleichungen für die Entropien). Sei u eine glatte Lösung von (3.1.1) und (U, \mathbf{F}) ein konvexes Entropiepaar. Dann erfüllt u fast überall

$$\partial_t (U(u)) + \operatorname{div}_g (\mathbf{F}(u, \cdot)) = G(u, \cdot), \quad (3.3.1)$$

wobei $G(u, x) := (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) - U'(u) (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x)$ für $x \in M$.

Beweis: Wir multiplizieren (3.1.1) mit $U'(u)$ und erhalten

$$U'(u)\partial_t u + U'(u)\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot)) = 0. \quad (3.3.2)$$

Es ist $U'(u)\partial_t u = \partial_t(U(u))$ und mit (2.14.1) und Bemerkung 2.12.7 erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g(\mathbf{F}(u, x)) &= (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) + \langle \partial_u \mathbf{F}(u, x), \nabla_g u \rangle_g \\ &= (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) + U'(u) \langle \partial_u \mathbf{f}(u, x), \nabla_g u \rangle_g \\ &= U'(u) \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, x)) + \underbrace{(\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) - U'(u) (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x)}_{G(u, x)}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Deshalb wird (3.3.2) zu

$$\partial_t(U(u)) + \operatorname{div}_g(\mathbf{F}(u, x)) = (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) - U'(u) (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x).$$

□

Bemerkung 3.3.4. *Ist der Fluss \mathbf{f} divergenzfrei, das heißt*

$$\operatorname{div}_g \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0, \quad \text{für alle } \bar{u} \in \mathbb{R}, \quad (3.3.4)$$

dann ist auch \mathbf{F} divergenzfrei und somit ist $G(u, x) = 0$. Die Differentialgleichung für die Entropie (3.3.1) wird dann zu

$$\partial_t(U(u)) + \operatorname{div}_g(\mathbf{F}(u, x)) = 0.$$

3.4 Entropielösung

Wir wollen nun den Begriff der Entropielösung herleiten. Dazu nehmen wir an, u^ϵ sei eine Lösung der viskosen Approximation

$$\partial_t u^\epsilon + \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u^\epsilon, \cdot)) = \epsilon \Delta_g u^\epsilon \quad \text{auf } M \times \mathbb{R}^+ \quad (3.4.1)$$

für $\epsilon > 0$. Wir multiplizieren (3.4.1) mit $U'(u^\epsilon)$ und einer nichtnegativen Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(M \times [0, \infty))$, wobei (U, \mathbf{F}) ein konvexes Entropiepaar der Klasse C^2 ist, und integrieren über $M \times \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U'(u^\epsilon) \partial_t u^\epsilon \varphi dt dv_g + \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U'(u^\epsilon) \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u^\epsilon, \cdot)) \varphi dt dv_g \\ = \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U'(u^\epsilon) \epsilon \Delta_g u^\epsilon \varphi dt dv_g. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration und (3.3.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} - \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U(u^\epsilon) \partial_t \varphi dt dv_g - \int_M U(u^\epsilon(\cdot, 0)) \varphi(\cdot, 0) dv_g + \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \operatorname{div}_g(\mathbf{F}(u^\epsilon, \cdot)) \varphi dt dv_g \\ - \int_M \int_{\mathbb{R}^+} G(u^\epsilon, \cdot) \varphi dt dv_g = \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U'(u^\epsilon) \epsilon \Delta_g u^\epsilon \varphi dt dv_g. \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \Delta_g(U(u^\epsilon)) &= g^{ij} (\partial_i \partial_j (U(u^\epsilon)) - \Gamma_{ij}^k \partial_k (U(u^\epsilon))) \\ &= g^{ij} (U''(u^\epsilon) \partial_i u^\epsilon \partial_j u^\epsilon + U'(u^\epsilon) \partial_i \partial_j u^\epsilon - \Gamma_{ij}^k U'(u^\epsilon) \partial_k u^\epsilon) \\ &= U'(u^\epsilon) \Delta_g u^\epsilon + g^{ij} U''(u^\epsilon) \partial_i u^\epsilon \partial_j u^\epsilon \geq U'(u^\epsilon) \Delta_g u^\epsilon, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass g^{ij} positiv definit und U konvex ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} - \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U(u^\epsilon) \partial_t \varphi dt dv_g - \int_M U(u^\epsilon(\cdot, 0)) \varphi(\cdot, 0) dv_g - \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{F}(u^\epsilon, \cdot), \nabla_g \varphi \rangle_g dt dv_g \\ - \int_M \int_{\mathbb{R}^+} G(u^\epsilon, \cdot) \varphi dt dv_g \leq \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \epsilon \Delta_g (U(u^\epsilon)) \varphi dt dv_g. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U(u^\epsilon) \partial_t \varphi + \langle \mathbf{F}(u^\epsilon, \cdot), \nabla_g \varphi \rangle_g dt dv_g + \int_M \int_{\mathbb{R}^+} G(u^\epsilon, \cdot) \varphi dt dv_g \\ + \int_M U(u^\epsilon(\cdot, 0)) \varphi(\cdot, 0) dv_g \geq - \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \epsilon U(u^\epsilon) \Delta_g \varphi dt dv_g. \end{aligned}$$

Wenn wir an dieser Stelle annehmen, dass u^ϵ gegen u konvergiert für $\epsilon \rightarrow 0$ (siehe dazu Kapitel 4), dann motiviert dies, zumindest formal, die folgende Definition, welche die physikalisch sinnvolle Lösung auszeichnet.

Definition 3.4.1 (Entropielösung). Eine Funktion $u \in L^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$ heißt Entropielösung des Anfangswertproblems (3.1.1) und (3.1.2), falls für alle Entropiepaare (U, \mathbf{F}) und alle differenzierbaren Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(M \times [0, \infty))$ mit $\varphi = \varphi(x, t) \geq 0$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \int_M \int_{\mathbb{R}^+} U(u) \partial_t \varphi + \langle \mathbf{F}(u, \cdot), \nabla_g \varphi \rangle_g dt dv_g \\ + \int_M \int_{\mathbb{R}^+} G(u, \cdot) \varphi dt dv_g + \int_M U(u_0) \varphi(\cdot, 0) dv_g \geq 0, \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

wobei $G(u, x) = (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) - U'(u) (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x)$.

Beispiel 3.4.2 (Kruzkov-Entropiebedingung). Falls wir für (U, \mathbf{F}) die Kruzkov-Entropien verwenden, dann ist für $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G(u, c, x) &= \operatorname{sgn}(u - c) ((\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x) - (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(c, x)) - \operatorname{sgn}(u - c)(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x) \\ &= -\operatorname{sgn}(u - c)(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(c, x). \end{aligned}$$

und somit wird (3.4.2) zu

$$\begin{aligned} &\int_M \int_{\mathbb{R}^+} |u - c| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - c) \langle \mathbf{f}(u, \cdot) - \mathbf{f}(c, \cdot), \nabla_g \varphi \rangle_g dt dv_g \\ &- \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \operatorname{sgn}(u - c) (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(c, x) \varphi dt dv_g + \int_M |u_0 - c| \varphi(\cdot, 0) dv_g \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $c \in \mathbb{R}$, was im euklidischen Fall genau der Kruzkov-Entropiebedingung aus [Kru70] entspricht.

Bemerkung 3.4.3. Ist der Fluss \mathbf{f} divergenzfrei, dann wird (3.4.2) zu

$$\int_M \int_{\mathbb{R}^+} U(u) \partial_t \varphi + \langle \mathbf{F}(u, \cdot), \nabla_g \varphi \rangle_g dt dv_g + \int_M U(u_0) \varphi(\cdot, 0) dv_g \geq 0.$$

Kapitel 4

Abschätzung der Totalvariation und Existenz einer Lösung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Entropielösungen des Anfangswertproblems (3.1.1) und (3.1.2), das in Kapitel 3 eingeführt wurde, beschäftigen. Wir übernehmen deshalb für dieses Kapitel die Notationen aus Kapitel 3. Insbesondere bedeutet das, dass im ganzen Kapitel mit (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand bezeichnet wird und mit \mathbf{f} ein glatter Fluss. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf den Fall, dass der Fluss \mathbf{f} divergenzfrei ist, das heißt

$$\operatorname{div}_g \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0 \quad \text{für alle } \bar{u} \in \mathbb{R}, \quad (4.0.1)$$

was gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass konstante Anfangswerte (triviale) Lösungen der Erhaltungsgleichung (3.1.1) sind, und wodurch die Erhaltungsgleichung eine einfachere Struktur erhält.

Wir konstruieren Entropielösungen durch die Viskositätsmethode. Dazu regularisieren wir die Erhaltungsgleichung (3.1.1) durch die Addition eines kleinen Diffusionsterms. Wir zitieren einen Satz (Satz 4.1.1) aus [BAL07, Seite 10], der Existenz, Eindeutigkeit, L^p -Stabilität und L^1 -Kontraktion der glatten Lösungen dieser regularisierten Gleichungen, der sogenannten Viskositätslösungen, sicherstellt. Um die Konvergenz der Viskositätslösungen gegen eine Entropielösung zu erhalten, benutzen wir eine (in ϵ) gleichmäßige Abschätzung der Totalvariation der Viskositätslösungen (Lemma 4.2.1). Eine solche Abschätzung der Totalvariation ist zwar in [BAL07, Seite 11] zu finden, aber die Argumentation der Autoren dort war für uns nicht nachvollziehbar. Auch durch Gespräche mit den Autoren konnten die Zweifel an der angeführten Argumentation nicht beseitigt werden. Es ist uns jedoch gelungen, einen eigenen Beweis für den wichtigen Spezialfall der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu entwickeln.

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion von Entropielösungen zu (3.1.1) und (3.1.2) mittels der Viskositätsmethode, das heißt wir betrachten Lösungen eines regularisierten Problems und zeigen die Konvergenz dieser Lösungen gegen eine Entropielösung. Der Konvergenzbeweis beruht auf dem Kondrakov-Theorem für Riemannsche Mannigfaltigkeiten (siehe [Aub82, Seite 55]), das besagt, dass die Inklusion von den Funktionen beschränkter $H^{1,1}(M)$ -Norm nach $L^1(M)$ kompakt ist. Da die $H^{1,1}(M)$ -Halbnorm gleich der Totalvariation ist, führen wir die Totalvariation von Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein.

Definition 4.0.4 (Totalvariation). Sei (M^n, g) eine kompakte, differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $u \in L^1(M)$. Die Totalvariation von u ist definiert durch

$$\mathrm{TV}(u) := \sup_{\substack{\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M) \\ \sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1}} \int_M u \operatorname{div}_g(\mathbf{X}) dv_g.$$

Für glatte Funktionen $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\mathrm{TV}(u) = \int_M |\nabla_g u|_g dv_g.$$

Die Menge der Funktionen beschränkter Totalvariation definieren wir als

$$\mathrm{BV}(M) := \{u \in L^1(M) \mid \mathrm{TV}(u) < \infty\}.$$

4.1 Regularisierte Erhaltungsgleichung

Wir wollen nun Lösungen zur regularisierten Erhaltungsgleichung finden, das heißt zu gegebenen Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty(M) \cap \mathrm{BV}(M)$ suchen wir eine Lösung $u^\epsilon = u^\epsilon(x, t)$ mit $\epsilon > 0$ zum Anfangswertproblem

$$\partial_t u^\epsilon + \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u^\epsilon, \cdot)) = \epsilon \Delta_g u^\epsilon \quad \text{auf } M \times \mathbb{R}^+, \quad (4.1.1)$$

$$u^\epsilon(\cdot, 0) = u_0^\epsilon \quad \text{auf } M, \quad (4.1.2)$$

wobei $u_0^\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Familie von differenzierbaren Funktionen bezeichnet, die folgende Eigenschaften erfüllen sollen:

$$\begin{aligned} \|u_0^\epsilon\|_{L^p(M)} &\leq \|u_0\|_{L^p(M)} \quad \text{für } p \in [1, \infty], \\ \mathrm{TV}(u_0^\epsilon) &\leq \mathrm{TV}(u_0), \\ \epsilon \|u_0^\epsilon\|_{H^2(M)} &\leq C \mathrm{TV}(u_0), \quad \text{wobei } C > 0 \text{ nur von } M \text{ abhängt,} \\ u_0^\epsilon &\rightarrow u_0 \text{ fast überall auf } M \text{ für } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Uns steht der folgende Satz aus [BAL07] zur Verfügung. Wir schreiben $u(t)$ anstelle von $u(\cdot, t)$.

Satz 4.1.1 (Regularisierte Erhaltungsgleichung). *Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, x)$ ein divergenzfreier, glatter Fluss auf einer kompakten, differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ohne Rand und sei $u_0^\epsilon \in C^\infty(M)$ für $\epsilon > 0$ derart gegeben, dass (4.1.3) erfüllt ist. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u^\epsilon \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$ des Anfangswertproblems (4.1.1) und (4.1.2), die für $1 \leq p \leq \infty$*

$$\|u^\epsilon(t)\|_{L^p(M)} \leq \|u^\epsilon(t')\|_{L^p(M)} \text{ für } 0 \leq t' \leq t$$

erfüllt und für zwei Lösungen u^ϵ und v^ϵ von (4.1.1) gilt

$$\|v^\epsilon(t) - u^\epsilon(t)\|_{L^1(M)} \leq \|v^\epsilon(t') - u^\epsilon(t')\|_{L^1(M)} \text{ für } 0 \leq t' \leq t. \quad (4.1.4)$$

Zusätzlich erfüllt die Lösung u^ϵ für jedes konvexe Entropiepaar (U, \mathbf{F}) die Ungleichung

$$\partial_t (U(u^\epsilon)) + \operatorname{div}_g (\mathbf{F}(u^\epsilon, \cdot)) \leq \epsilon \Delta_g U(u^\epsilon) \quad (4.1.5)$$

im Distributionssinne.

Beweis: Siehe [BAL07].

4.2 Abschätzung der Totalvariation

Um das Kondrakov-Theorem für Riemannsche Mannigfaltigkeiten (Satz 4.3.1) anwenden zu können, benötigen wir (in ϵ) gleichmäßige Abschätzungen der Totalvariation von u^ϵ einerseits und der L^1 -Norm von $\partial_t u^\epsilon$ andererseits. Das folgende Lemma stellt diese Abschätzungen (für $n = 2$) bereit und entspricht in der Aussage Lemma 4.3 aus [BAL07] für $n = 2$. Da wir den Beweis dieses Lemmas aus [BAL07] jedoch nicht nachvollziehen konnten und in Gesprächen mit den Autoren auch keine Lösung gefunden wurde, präsentieren wir an dieser Stelle einen eigenen Beweis.

Lemma 4.2.1. *Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, x)$ ein divergenzfreier, glatter Fluss auf einer kompakten, differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ohne Rand. Für jedes $\epsilon \in (0, 1]$ sei $u^\epsilon : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\partial_t u^\epsilon(x, t) + \operatorname{div}_g (\mathbf{f}(u^\epsilon(x, t), x)) = \epsilon \Delta_g u^\epsilon(x, t) \quad x \in M, \quad t \geq 0, \quad (4.2.1)$$

$$u^\epsilon(0, x) = u_0^\epsilon(x) \quad x \in M, \quad (4.2.2)$$

wobei $u_0^\epsilon \in C^\infty(M)$ vorgegeben ist. Für $0 \leq t' \leq t$ gilt dann mit $u^\epsilon(t) := u^\epsilon(\cdot, t)$, dass

$$\|\partial_t u^\epsilon(t)\|_{L^1(M)} \leq \|\partial_t u^\epsilon(t')\|_{L^1(M)}, \quad (4.2.3)$$

und falls $n = 2$, dann ist

$$\mathrm{TV}(u^\epsilon(t)) \leq C_B(u_0^\epsilon) \exp(C_A t), \quad (4.2.4)$$

wobei $C_B(u_0^\epsilon) = C_{B.1} [\|\mathrm{div}_g(\mathbf{f}(u_0^\epsilon, \cdot))\|_{L^1(M)} + \epsilon \|\Delta u_0^\epsilon\|_{L^1(M)}] + C_{B.2} \mathrm{TV}(u_0^\epsilon)$ und die positiven Konstanten $C_A, C_{B.1}$ und $C_{B.2}$ nur von (M, g) , \mathbf{f} und $\|u_0^\epsilon\|_{L^\infty(M)}$ abhängen.

Beweis: Wir führen eine Regularisierung $s_\delta : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ der Signum-Funktion ein, die folgende Eigenschaften haben soll.

1. $s_\delta(x) = -s_\delta(-x)$,
2. $s_\delta' \geq 0$,
3. $s_\delta'(x) = 0$ für $|x| > \delta$,
4. $|s_\delta'(x)| \leq C\delta^{-1}$ für $|x| \leq \delta$ mit einer Konstanten $C > 0$.

Zuerst beweisen wir (4.2.3). Dazu leiten wir (4.2.1) nach t ab, und schreiben $z^\epsilon := \partial_t u^\epsilon$. Multiplizieren wir mit $s_\delta(z^\epsilon)$ und integrieren über M , dann erhalten wir

$$\int_M s_\delta(z^\epsilon) \partial_t z^\epsilon dv_g + \int_M \mathrm{div}_g(\mathbf{f}_u(u^\epsilon, \cdot) z^\epsilon) s_\delta(z^\epsilon) dv_g = \epsilon \int_M \Delta_g z^\epsilon s_\delta(z^\epsilon) dv_g,$$

wobei $\mathbf{f}_u = \partial_u \mathbf{f}$. Mit $r(y) := \int_0^y s_\delta(\xi) d\xi$ und partieller Integration erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_M r(z^\epsilon) dv_g - \int_M \langle \mathbf{f}_u(u^\epsilon, \cdot), \nabla_g z^\epsilon \rangle_g z^\epsilon s_\delta'(z^\epsilon) dv_g = -\epsilon \int_M \underbrace{\langle \nabla_g z^\epsilon, \nabla_g z^\epsilon \rangle_g s_\delta'(z^\epsilon)}_{\geq 0} dv_g. \quad (4.2.5)$$

Dabei sei beachtet, dass die Voraussetzungen für das Vertauschen von Zeitableitung und Integral im ersten Term erfüllt sind. Um das zweite Integral in (4.2.5) zu berechnen, nutzen wir aus, dass $\mathrm{spt} s_\delta'(z^\epsilon) \subseteq \{|z^\epsilon| \leq \delta\}$. Es reicht also, über $\{0 < |z^\epsilon| \leq \delta\}$ zu integrieren. Dort können wir $|z^\epsilon|$ durch δ abschätzen und da $|s_\delta'(x)| \leq C\delta^{-1}$ ist, gilt

$$\left| \int_M \langle \mathbf{f}_u(u^\epsilon, \cdot), \nabla_g z^\epsilon \rangle_g z^\epsilon s_\delta'(z^\epsilon) dv_g \right| \leq C(\mathbf{f}, u^\epsilon, z^\epsilon, \nabla_g z^\epsilon) \int_{\{0 < |z^\epsilon| \leq \delta\}} 1 dv_g \rightarrow 0,$$

falls $\delta \rightarrow 0$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \int_M r(z^\epsilon) dv_g \leq o(1),$$

wobei $o(1) \rightarrow 0$, falls $\delta \rightarrow 0$, oder

$$\int_M r(z^\epsilon(t)) dv_g \leq \int_M r(z^\epsilon(t')) dv_g + \int_{t'}^t o(1) dt,$$

mit $0 \leq t' \leq t$; und somit gilt im Grenzwert für $\delta \rightarrow 0$, dass

$$\int_M |z^\epsilon(t)| dv_g \leq \int_M |z^\epsilon(t')| dv_g,$$

womit (4.2.3) bewiesen ist.

Nun wollen wir uns dem Beweis von (4.2.4) zuwenden. Da M kompakt ist, existiert ein endlicher Atlas $\mathcal{A} = \{(U_m, \varphi_m) \mid m \in I\}$ und eine zur Überdeckung $\{U_m \mid m \in I\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_m : U_m \rightarrow [0, 1] \mid m \in I\}$ (vgl. Lemma 2.12.1), wobei I eine endliche Indexmenge ist. Sei von nun an $m \in I$ fest. Um Redundanz in der Notation zu vermeiden, werden in den folgenden Rechnungen die Argumente und die Vorschaltung der Parametrisierung, wenn Bedeutung und Bezug eindeutig sind, weggelassen. Wir schreiben auch abkürzend $u = u^\epsilon$, $\psi = \psi_m$, $\varphi = \varphi_m$, $U = U_m$, $\Omega = \Omega_m := \varphi_m(U_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

Lokal, das heißt im Koordinatengebiet Ω , ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, x)) &= \overbrace{(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x)}^{=0} + \langle \mathbf{f}_u(u, x), \nabla_g u \rangle_g = f_u^j(u, x) \partial_j u \\ &= \partial_j (f^j(u, x)) - (\partial_j f^j)(u, x), \end{aligned}$$

wobei lokal $\mathbf{f} = f^i \partial_i$. Man beachte an dieser Stelle, dass aus $(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x) = 0$ nicht folgt, dass $(\partial_j f^j)(u, x) = 0$ wäre. Deshalb hat (4.2.1) lokal auf Ω die Form

$$\partial_t u + \partial_j (f^j(u, x)) - (\partial_j f^j)(u, x) = \epsilon g^{ij} \partial_i \partial_j u - \epsilon \underbrace{g^{ij} \Gamma_{ij}^l}_{\Gamma^l} \partial_l u \quad (4.2.6)$$

Wir leiten Gleichung (4.2.6) nach der k -ten Koordinate ab und erhalten mit $w_k := \partial_k u$

$$\begin{aligned} &\partial_t w_k + \partial_k [\partial_j (f^j(u, x)) - (\partial_j f^j)(u, x)] \\ &= \epsilon \partial_k g^{ij} \partial_i w_j + \epsilon g^{ij} \partial_i \partial_j w_k - \epsilon \partial_k \Gamma^l w_l - \epsilon \Gamma^l \partial_l w_k. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Mit

$$\begin{aligned} \partial_k [\partial_j (f^j(u, x)) - (\partial_j f^j)(u, x)] &= \partial_j ((\partial_k f^j) + f_u^j w_k) - (\partial_k \partial_j f^j) - (\partial_j f_u^j) w_k \\ &= (\partial_k \partial_j f^j) + (\partial_k f_u^j) w_j + \partial_j (f_u^j w_k) - (\partial_k \partial_j f^j) - (\partial_j f_u^j) w_k \\ &= (\partial_k f_u^j) w_j + \partial_j (f_u^j w_k) - (\partial_j f_u^j) w_k \end{aligned}$$

wird (4.2.7) zu

$$\begin{aligned} \partial_t w_k + (\partial_k f_u^j) w_j + \partial_j (f_u^j w_k) - (\partial_j f_u^j) w_k \\ = \epsilon \partial_k g^{ij} \partial_i w_j + \epsilon g^{ij} \partial_i \partial_j w_k - \epsilon \partial_k \Gamma^l w_l - \epsilon \Gamma^l \partial_l w_k. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\psi s_\delta(w_k)$ und Integration über Ω liefert

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) \partial_t w_k dx}_{T_0(k)} &= - \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) [(\partial_k f_u^l) + \epsilon \partial_k \Gamma^l] w_l dx}_{T_1(k)} - \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) \partial_j (f_u^j w_k) dx}_{T_2(k)} \\ &+ \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) (\partial_j f_u^j) w_k dx}_{T_3(k)} - \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) \epsilon \Gamma^l \partial_l w_k dx}_{T_4(k)} \\ &+ \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) \epsilon g^{ij} \partial_i \partial_j w_k dx}_{T_5(k)} + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_\delta(w_k) \epsilon \partial_k g^{ij} \partial_i w_j dx}_{T_6(k)}. \end{aligned}$$

Mit $r(y) = \int_0^y s_\delta(\xi) d\xi$ erhalten wir

$$T_0(k) = \int_{\Omega} \psi \partial_t (r(w_k)) dx.$$

Nun wollen wir nacheinander die Terme $T_1(k)$ bis $T_5(k)$ abschätzen. Notwendig, um Funktionen in u^ϵ abschätzen zu können, ist die L^∞ -Stabilität,

$$\|u^\epsilon(t)\|_{L^\infty(M)} \leq \|u^\epsilon(t')\|_{L^\infty(M)} \text{ für } 0 \leq t' \leq t,$$

das wir aus Satz 4.1.1 kennen. In u^ϵ glatte Funktionen sind somit durch ihr Maximum auf dem kompakten Intervall $J := [-\|u_0^\epsilon\|_{L^\infty(M)}, \|u_0^\epsilon\|_{L^\infty(M)}]$ abschätzbar. Es gilt damit

$$T_1(k) \leq C_1(k) \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \sum_{l=1}^n |w_l| dx \quad \text{mit } C_1(k) = \sup_{\substack{\varphi(\text{spt } \psi) \\ l=1, \dots, n \\ \bar{u} \in J}} |(\partial_k f_u^l)(\bar{u}, \cdot) + \epsilon \partial_k \Gamma^l| < \infty.$$

Mit partieller Integration folgt unter Berücksichtigung, dass die Randterme aufgrund der Abschneidefunktion ψ wegfallen, dass

$$\begin{aligned} T_2(k) &= \int_{\Omega} \partial_j \psi s_\delta(w_k) f_u^j w_k dx + \int_{\Omega} \psi s'_\delta(w_k) \partial_j w_k f_u^j w_k dx \\ &\leq C_2 \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_k| dx + \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \psi s'_\delta(w_k) \partial_j w_k f_u^j w_k dx \end{aligned}$$

mit $C_2 = \sup_{\substack{\varphi(\text{spt } \psi) \\ \bar{u} \in J}} |\partial_j \psi f_u^j(\bar{u}, \cdot)| < \infty$.

Nun wollen wir das Verhalten des zweiten Summanden,

$$\int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \psi s'_\delta(w_k) \partial_j w_k f_u^j w_k dx,$$

für $\delta \rightarrow 0$ untersuchen. Wir nutzen aus, dass $\text{spt } \{s'_\delta(w_k)\} \subseteq \{|w_k| \leq \delta\}$. Es reicht demnach, über die Menge $\{0 < |w_k| \leq \delta\}$ zu integrieren. Damit können wir $|w_k|$ im Integranden durch δ abschätzen. Hingegen verhält sich s'_δ wie δ^{-1} . Die restlichen Terme sind L^∞ auf $\varphi(\text{spt } \psi)$ und unabhängig von δ . Es gibt also eine Konstante $C_{2a}(w_k, \mathbf{f}, u_0^\epsilon)$, die unabhängig von δ ist, so dass

$$\int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \psi s'_\delta(w_k) \partial_j w_k f_u^j w_k dx \leq C_{2a}(w_k, \mathbf{f}, u_0^\epsilon) \int_{\substack{\varphi(\text{spt } \psi) \cap \\ \{0 < |w_k| \leq \delta\}}} 1 dx \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0.$$

Somit ist

$$T_2(k) \leq C_2 \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_k| dx + o(1),$$

wobei $o(1)$ bezüglich $\delta \rightarrow 0$ zu verstehen ist. Für den dritten Term erhalten wir

$$T_3(k) \leq C_3 \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_k| dx \quad \text{mit } C_3 = \sup_{\substack{\varphi(\text{spt } \psi) \\ \bar{u} \in J}} |(\partial_j f_u^j)(\bar{u}, \cdot)| < \infty.$$

Mit partieller Integration und dem gleichen Argument wie bei $T_2(k)$ folgt für den vierten Term

$$\begin{aligned} T_4(k) &= \epsilon \int_{\Omega} \partial_l (\psi \Gamma^l) s_\delta(w_k) w_k dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi s'_\delta(w_k) \partial_l w_k \Gamma^l w_k dx \\ &\leq \epsilon C_4 \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_k| dx + o(1) \end{aligned}$$

mit $C_4 = \sup_{\varphi(\text{spt } \psi)} |\partial_l (\psi \Gamma^l)| < \infty$.

Für den fünften Term ergibt sich mit partieller Integration und unter Ausnutzung, dass $s'_\delta, \psi \geq 0$ und $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit ist,

$$\begin{aligned} T_5(k) &= -\epsilon \int_{\Omega} \partial_i (\psi g^{ij}) s_\delta(w_k) \partial_j w_k dx - \epsilon \int_{\Omega} \underbrace{\psi s'_\delta(w_k) \partial_i w_k g^{ij} \partial_j w_k}_{\geq 0} dx \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega} \partial_j \partial_i (\psi g^{ij}) s_\delta(w_k) w_k dx + \epsilon \int_{\Omega} \partial_i (\psi g^{ij}) s'_\delta(w_k) \partial_j w_k w_k dx \\ &\leq \epsilon C_5 \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_k| dx + o(1) \end{aligned}$$

mit $C_5 = \sup_{\varphi(\text{spt } \psi)} |\partial_j \partial_i (\psi g^{ij})| < \infty$.

Für beliebiges n gilt also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi r(w_k) dx \leq \underbrace{(C_1(k) + C_2 + C_3 + C_4 + C_5)}_{C_{\Sigma}(k)} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \sum_{l=1}^n |w_l| dx + o(1) + T_6(k),$$

oder nach Summation über k

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi \sum_{k=1}^n r(w_k) dx \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n C_{\Sigma}(k)}_{C_{\Sigma}} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \sum_{l=1}^n |w_l| dx + o(1) + \sum_{k=1}^n T_6(k).$$

Um den Term $\sum_{k=1}^n T_6(k)$ behandeln zu können, betrachten wir von nun an den Spezialfall $n = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 T_6(k) &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_k) \epsilon \partial_k g^{ij} \partial_i w_j dx \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_1) \epsilon \partial_1 g^{11} \partial_1 w_1 dx}_{T_{6.1}} + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_1) \epsilon \partial_1 g^{12} \partial_1 w_2 dx}_{T_{6.2}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_1) \epsilon \partial_1 g^{21} \partial_2 w_1 dx}_{T_{6.3}} + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_1) \epsilon \partial_1 g^{22} \partial_2 w_2 dx}_{T_{6.4}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_2) \epsilon \partial_2 g^{11} \partial_1 w_1 dx}_{T_{6.5}} + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_2) \epsilon \partial_2 g^{12} \partial_1 w_2 dx}_{T_{6.6}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_2) \epsilon \partial_2 g^{21} \partial_2 w_1 dx}_{T_{6.7}} + \underbrace{\int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_2) \epsilon \partial_2 g^{22} \partial_2 w_2 dx}_{T_{6.8}} \end{aligned}$$

Wir wollen die Terme $T_{6.1}$ bis $T_{6.8}$ wieder der Reihe nach abschätzen. Für den ersten Term gilt nach partieller Integration

$$\begin{aligned} T_{6.1} &= -\epsilon \int_{\Omega} \partial_1 (\psi \partial_1 g^{11}) s_{\delta}(w_1) w_1 dx - \epsilon \int_{\Omega} \psi s'_{\delta}(w_1) \partial_1 g^{11} \partial_1 w_1 w_1 dx \\ &\leq \epsilon C_{6.1} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_1| dx + o(1) \end{aligned}$$

mit $C_{6.1} = \sup_{\varphi(\text{spt } \psi)} |\partial_1 (\psi \partial_1 g^{11})| < \infty$.

Mit $\partial_1 w_2 = \partial_1 \partial_2 u = \partial_2 w_1$, der Symmetrie von $(g^{ij})_{i,j=1,2}$ und partieller Integration

erhalten wir für den zweiten und dritten Term

$$\begin{aligned} T_{6.2} = T_{6.3} &= \epsilon \int_{\Omega} \partial_2 (\psi \partial_1 g^{12}) s_{\delta}(w_1) w_1 dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi \partial_1 g^{12} s'_{\delta}(w_1) \partial_2 w_1 w_1 dx \\ &\leq \epsilon C_{6.2} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_1| dx + o(1) \end{aligned}$$

mit $C_{6.2} = \sup_{\varphi(\text{spt } \psi)} |\partial_2 (\psi \partial_1 g^{12})| < \infty$.

Den Term $T_{6.4}$ behandeln wir, indem wir die Differentialgleichung ausnutzen. Da $(g^{ij})_{i,j=1,2}$ positiv definit ist, ist $g^{22} > 0$ und wir erhalten aus (4.2.6) für $n = 2$, dass

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_2 w_2 &= \epsilon \partial_2 \partial_2 u = (g^{22})^{-1} (\partial_t u + f_u^j \partial_j u - \epsilon g^{11} \partial_1 \partial_1 u - 2\epsilon g^{12} \partial_2 \partial_1 u + \epsilon \Gamma^l \partial_l u) \\ &= (g^{22})^{-1} (\partial_t u + (f_u^l + \epsilon \Gamma^l) w_l - \epsilon g^{11} \partial_1 w_1 - 2\epsilon g^{12} \partial_2 w_1), \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\partial_j (f^j(u, x)) = f_u^j(u, x) \partial_j u + (\partial_j f^j)(u, x)$. Damit ergibt sich für $T_{6.4}$ nach partieller Integration

$$\begin{aligned} T_{6.4} &= \int_{\Omega} \psi s_{\delta}(w_1) \partial_1 g^{22} (g^{22})^{-1} (\partial_t u + (f_u^l + \epsilon \Gamma^l) w_l - \epsilon g^{11} \partial_1 w_1 - 2\epsilon g^{12} \partial_2 w_1) dx \\ &\leq C_{6.4a} \int_{\Omega} \psi |\partial_t u| dx + C_{6.4b} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \sum_{l=1}^2 |w_l| dx + C_{6.4c} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} |w_1| dx + o(1) \end{aligned}$$

mit $C_{6.4a} = \sup_{\varphi(\text{spt } \psi)} |\partial_1 g^{22} (g^{22})^{-1}| < \infty$,

$$C_{6.4b} = \sup_{\substack{\varphi(\text{spt } \psi) \\ l=1,2 \\ \bar{u} \in J}} |\partial_1 g^{22} (g^{22})^{-1}| (|f_u^l(\bar{u}, \cdot)| + |\Gamma^l|) < \infty$$

und $C_{6.4c} = \sup_{\varphi(\text{spt } \psi)} \left| \partial_1 (\psi \partial_1 g^{22} (g^{22})^{-1} g^{11}) + \partial_2 (\psi \partial_1 g^{22} (g^{22})^{-1} 2g^{12}) \right| < \infty$.

Entsprechende Behandlung der Terme $T_{6.5}$, $T_{6.6}$, $T_{6.7}$ und $T_{6.8}$ mit entsprechenden Konstanten $C_{6.5a}$, $C_{6.5b}$, $C_{6.5c}$ für $T_{6.5}$, $C_{6.6}$ für $T_{6.6}$ und $T_{6.7}$, und $C_{6.8}$ für $T_{6.8}$ liefert entsprechende Abschätzungen.

Wir haben jetzt also insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi \sum_{k=1}^2 r(w_k) dx &\leq C_{A1} \int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \sum_{l=1}^2 |w_l| dx \\ &\quad + (C_{6.4a} + C_{6.5a}) \int_{\Omega} \psi |\partial_t u| dx + o(1), \end{aligned}$$

wobei $C_{A1} := C_\Sigma + C_{6.1} + C_{6.8} + 2C_{6.2} + 2C_{6.6} + C_{6.4b} + C_{6.5b} + C_{6.4c} + C_{6.5c}$.
Im Grenzfall für $\delta \rightarrow 0$ konvergiert $r(w_k)$ gegen $|w_k|$ und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \psi \sum_{k=1}^2 |w_k| dx \leq C_{A1} \underbrace{\int_{\varphi(\text{spt } \psi)} \sum_{k=1}^2 |w_k| dx}_{T_{A1}} + (C_{6.4a} + C_{6.5a}) \int_\Omega \psi |\partial_t u| dx. \quad (4.2.8)$$

An dieser Stelle ist es noch nicht möglich, das Lemma von Gronwall auf (4.2.8) anzuwenden, da die ersten beiden Integranden sich um ein ψ unterscheiden und der letzte Term formal noch von t abhängt. Im Folgenden bringen wir T_{A1} in die passende Gestalt. Dazu werden wir eine Eins einfügen und einen Kartenwechsel vornehmen. Es ist also angebracht, von nun an zu kennzeichnen, mit welcher Karte wir jeweils arbeiten. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{A1} &= \int_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m)} \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \\ &= \int_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m)} \underbrace{\sum_{m' \in I} (\psi_{m'} \circ \varphi_m^{-1})}_{=1} \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \\ &= \sum_{\substack{m' \in I \\ k=1,2}} \int_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} (\psi_{m'} \circ \varphi_m^{-1}) |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \\ &= \sum_{\substack{m' \in I \\ k=1,2}} \int_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} (\psi_{m'} \circ \varphi_m^{-1}) |\partial_k (u \circ \varphi_{m'}^{-1} \circ \varphi_{m'} \circ \varphi_m^{-1})| dx \\ &= \sum_{\substack{m' \in I \\ k=1,2}} \int_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} (\psi_{m'} \circ \varphi_m^{-1}) \left| \sum_{l=1}^2 \partial_l (u \circ \varphi_{m'}^{-1}) \circ \Phi_{m'm}^{-1} \partial_k (\varphi_{m'}^l \circ \varphi_m^{-1}) \right| dx \\ &\leq \sum_{m' \in I} C_{mm'} \int_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} (\psi_{m'} \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{l=1}^2 |\partial_l (u \circ \varphi_{m'}^{-1}) \circ \Phi_{m'm}^{-1}| dx, \end{aligned}$$

wobei $C_{mm'} := 2 \max_{k,l} \sup_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} |\partial_k (\varphi_{m'}^l \circ \varphi_m^{-1})| < \infty$ und der Kartenwechsel durch $\Phi_{m'm} := \varphi_m \circ \varphi_{m'}^{-1}$ definiert ist. Nun wenden wir den Transformati-

onssatz an. Damit ist

$$\begin{aligned}
T_{A1} &\leq \sum_{\substack{m' \in I \\ l=1,2}} C_{mm'} \int_{\Phi_{m'm}(\varphi_{m'}(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'}))} (\psi_{m'} \circ \varphi_{m'}^{-1}) |\partial_l (u \circ \varphi_{m'}^{-1}) \circ \Phi_{m'm}^{-1}| dx \\
&= \sum_{\substack{m' \in I \\ l=1,2}} C_{mm'} \int_{\varphi_{m'}(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} (\psi_{m'} \circ \varphi_{m'}^{-1}) |\partial_l (u \circ \varphi_{m'}^{-1})| |\det D \Phi_{m'm}| dx \\
&\leq C_m \sum_{m' \in I} \int_{\Omega_{m'}} (\psi_{m'} \circ \varphi_{m'}^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_{m'}^{-1})| dx,
\end{aligned}$$

mit $C_m := \max_{m' \in I} \sup_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m \cap \text{spt } \psi_{m'})} |C_{mm'}| |\det D \Phi_{m'm}| < \infty$. Um den zweiten Summanden in (4.2.8) abzuschätzen, bemerken wir, dass die Dichte $\sqrt{|g_m|} := \sqrt{\det(g \circ \varphi_m^{-1})}$ ihr Minimum und Maximum auf der kompakten Menge $\varphi_m(\text{spt } \psi_m)$ annimmt.

Mit $c_g := \min_{m \in I} \inf_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m)} \sqrt{|g_m|} > 0$ erhalten wir insgesamt, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \\
&\leq C_{A1} C_m \sum_{m' \in I} \int_{\Omega_{m'}} (\psi_{m'} \circ \varphi_{m'}^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_{m'}^{-1})| dx \\
&\quad + \underbrace{\frac{C_{6.4a}}{c_g} \int_{\Omega_m} \psi_m |\partial_t (u \circ \varphi_m^{-1})| \sqrt{|g_m|} dx}_{\int_M \psi_m |\partial_t u| dv_g}.
\end{aligned}$$

Summation über $m \in I$ liefert mit $C_A := C_{A1} \sum_{m \in I} C_m$ und $\tilde{C}_B := C_{6.4a}/c_g$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \\
&\leq C_A \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx + \tilde{C}_B \|\partial_t u\|_{L^1(M)}.
\end{aligned}$$

Aufgrund von (4.2.3), (4.2.1) und (4.2.2) können wir $\tilde{C}_B \|\partial_t u\|_{L^1(M)}$ durch

$$C(u_0^\epsilon) := \tilde{C}_B [\|\text{div}_g(\mathbf{f}(u_0^\epsilon, x))\|_{L^1(M)} + \epsilon \|\Delta u_0^\epsilon\|_{L^1(M)}]$$

abschätzen und erhalten mit dem Lemma von Gronwall (siehe z. B. [Eva98, Seite 624]), dass

$$\begin{aligned} & \left. \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \right|_t \\ & \leq \left(C(u_0^\epsilon) + \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \right)_0 \exp(C_A t). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Aufgrund der Normäquivalenz im \mathbb{R}^2 , der Kompaktheit von $\varphi_m(\text{spt } \psi_m)$ und weil $|I| < \infty$ gibt es Konstanten \bar{c} und \bar{C} , so dass für jedes $m \in I$ und $x \in \varphi_m(\text{spt } \psi_m)$ und für alle $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass

$$\bar{c} \sum_{k=1}^2 |v_k| \leq \sqrt{g^{ij}(\varphi_m^{-1}(x)) v_i v_j} \leq \bar{C} \sum_{k=1}^2 |v_k|.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \left. \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \right|_0 \\ & \leq \frac{1}{\bar{c}} \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sqrt{\partial_i (u_0^\epsilon \circ \varphi_m^{-1}) g^{ij} \circ \varphi_m^{-1} \partial_j (u_0^\epsilon \circ \varphi_m^{-1})} dx \\ & \leq \frac{1}{\bar{c} c_g} \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sqrt{\partial_i (u_0^\epsilon \circ \varphi_m^{-1}) g^{ij} \circ \varphi_m^{-1} \partial_j (u_0^\epsilon \circ \varphi_m^{-1})} \sqrt{|g_m|} dx \\ & = \frac{1}{\bar{c} c_g} \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) |\nabla_g u_0^\epsilon|_g \circ \varphi_m^{-1} \sqrt{|g_m|} dx \\ & = \frac{1}{\bar{c} c_g} \sum_{m \in I} \int_M \psi_m |\nabla_g u_0^\epsilon|_g dv_g \\ & = \frac{1}{\bar{c} c_g} \text{TV}(u_0^\epsilon) \end{aligned}$$

und mit $C_g := \max_{m \in I} \sup_{\varphi_m(\text{spt } \psi_m)} \sqrt{|g_m|} < \infty$ und (4.2.9) erhalten wir für die Totalvariation von u zum Zeitpunkt t

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(t)) &= \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sqrt{|\partial_i (u(t) \circ \varphi_m^{-1}) g^{ij} \circ \varphi_m^{-1} \partial_j (u(t) \circ \varphi_m^{-1})|} \sqrt{|g_m|} dx \\ &\leq \bar{C} C_g \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} (\psi_m \circ \varphi_m^{-1}) \sum_{k=1}^2 |\partial_k (u \circ \varphi_m^{-1})| dx \Big|_t \\ &\leq \bar{C} C_g \left(C(u_0^\epsilon) + \frac{1}{\bar{c} c_g} \text{TV}(u_0^\epsilon) \right) \exp(C_A t) \\ &= C_B(u_0^\epsilon) \exp(C_A t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C_B(u_0^\epsilon) &:= \bar{C} C_g \left(C(u_0^\epsilon) + \frac{1}{\bar{c} c_g} \text{TV}(u_0^\epsilon) \right) \\ &= \underbrace{\bar{C} C_g \tilde{C}_B}_{C_{B.1}} \left[\|\text{div}_g(\mathbf{f}(u_0^\epsilon, x))\|_{L^1(M)} + \epsilon \|\Delta u_0^\epsilon\|_{L^1(M)} \right] + \underbrace{\frac{\bar{C} C_g}{\bar{c} c_g}}_{C_{B.2}} \text{TV}(u_0^\epsilon). \end{aligned}$$

□

4.3 Konvergenz der Viskositätslösungen

Um die Konvergenz der Viskositätslösungen folgern zu können, benötigen wir die Kompaktheit der Einbettung der $H^{1,1}$ -Funktionen in die L^1 -Funktionen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dazu zitieren wir den folgenden Satz aus [Aub82].

Satz 4.3.1 (Kondrakov-Theorem). *Sei (M^n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit C^1 -Rand. Dann ist für $k \in \mathbb{N}$ und $p, q \geq 1$ mit $1 \geq 1/p > 1/q - k/n > 0$ die folgende Einbettung kompakt.*

$$H^{k,p}(\text{Int } M) \hookrightarrow L^p(\text{Int } M).$$

Beweis: Siehe [Aub82, Theorem 2.34].

An diesem Punkt angelangt, haben wir die nötigen Voraussetzungen geschaffen, um die Konvergenz der Viskositätslösungen gegen eine Entropielösung zu beweisen. Der folgende Satz ist in ähnlicher Form in [BAL07, Theorem 4.4] zu finden, jedoch ist der Beweis dazu sehr knapp gehalten und für mich nicht in allen Teilen durchweg nachvollziehbar. Deshalb wird im Folgenden ein eigener Existenzbeweis präsentiert und nur für den Beweis der Eindeutigkeit auf [BAL07, Seite 14] verwiesen.

Satz 4.3.2. Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, x)$ ein divergenzfreier, glatter Fluss auf einer kompakten, differenzierbaren, 2-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ohne Rand. Für Anfangswerte $u_0 \in L^\infty(M) \cap \text{BV}(M)$, zu denen es eine Familie von Funktionen $u_0^\epsilon \in C^\infty(M)$ gibt, die (4.1.3) erfüllen, existiert eine eindeutige Entropielösung $u \in L^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$ zum Anfangswertproblem (3.1.1) und (3.1.2) im Sinne von Definition 3.4.1, die der Grenzwert der Folge u^ϵ aus Satz 4.1.1 ist. Des Weiteren erfüllt die Entropielösung die folgenden Eigenschaften:

$$\|u(t)\|_{L^p(M)} \leq \|u_0\|_{L^p(M)} \quad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}^+ \text{ für } 1 \leq p \leq \infty, \quad (4.3.1)$$

und es gibt Konstanten $C_A, C_2 > 0$, die nur von u_0, \mathbf{f} und M abhängen, so dass

$$\text{TV}(u(t)) \leq C_2 \exp(C_A t) \quad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.3.2)$$

Falls u, v Entropielösungen zu den Anfangsdaten u_0, v_0 sind, dann gilt die L^1 -Kontraktion

$$\|v(t) - u(t)\|_{L^1(M)} \leq \|v_0 - u_0\|_{L^1(M)} \quad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.3.3)$$

Beweis: Satz 4.1.1 besagt, dass es für alle $\epsilon > 0$ eindeutige Lösungen $u^\epsilon \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$ von (4.1.1) und (4.1.2) gibt mit

$$\|u^\epsilon(t)\|_{L^p(M)} \leq \|u^\epsilon(t')\|_{L^p(M)} \quad \text{für } 0 \leq t' \leq t, p > 1. \quad (4.3.4)$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass die Familie der Funktionen u^ϵ gleichmäßig in $H^{1,1}(M \times (0, T))$ beschränkt ist, um dann mithilfe des Kondrakov-Theorems die Konvergenz gegen eine Funktion $u \in L^1(M \times (0, T))$ zeigen zu können. Dazu betrachten wir die kompakte 3-dimensionale Produktmannigfaltigkeit $M_T := M \times [0, T]$. Da $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$, ist an jeder Stelle $t \in [0, T]$ mit dem Vektor $\partial_t(t) = \partial/\partial t(t)$ eine Basis des Tangentialraums $T_t[0, T]$ gegeben. Ist $X_T \in T_{(x,t)}M_T$ ein Vektor, so kann er lokal als

$$X_T = \sum_{i=1}^3 X^i \partial_i + X^t \partial_t \quad \text{mit } X^i, X^t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

Da wir natürlicherweise fordern, dass der Raum (M) und die Zeit $([0, T])$ orthogonal zueinander stehen, gibt es Karten, so dass die Riemannsche Metrik g_T von M_T an der beliebigen Stelle $(x, t) \in M_T$ lokal in Matrixform die Gestalt

$$(g_{Tkl})_{1 \leq k, l \leq 3} = \begin{pmatrix} (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ die lokale Darstellung der Riemannschen Metrik g um den Punkt $x \in M$ ist. Für den Gradienten $\nabla_{g_T} u^\epsilon$ erhalten wir somit lokal

$$\nabla_{g_T} u^\epsilon = g^{ij} \partial_j u^\epsilon \partial_i + \partial_t u^\epsilon \partial_t$$

und die $H^{1,1}(M_T)$ -Halbnorm von u^ϵ können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |u^\epsilon|_{H^{1,1}(M_T)} &= \int_0^T \int_M |\nabla_{g_T} u^\epsilon|_{g_T} dv_g dt = \int_0^T \int_M \sqrt{g^{ij} \partial_i u^\epsilon \partial_j u^\epsilon + (\partial_t u^\epsilon)^2} dv_g dt \\ &\leq c \int_0^T \int_M |\nabla_g u^\epsilon|_g dv_g dt + c \int_0^T \int_M |\partial_t u^\epsilon| dv_g dt \\ &= c \int_0^T \text{TV}(u^\epsilon(t)) dt + c \int_0^T \|\partial_t u^\epsilon(t)\|_{L^1(M)} dt, \end{aligned}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante der Normäquivalenz im \mathbb{R}^2 ist. Somit folgt für die $H^{1,1}(M_T)$ -Norm von u^ϵ , dass

$$\|u^\epsilon\|_{H^{1,1}(M_T)} \leq \underbrace{\int_0^T \|u^\epsilon(t)\|_{L^1(M)} dt}_{T_1} + c \underbrace{\int_0^T \text{TV}(u^\epsilon(t)) dt}_{T_2} + c \underbrace{\int_0^T \|\partial_t u^\epsilon(t)\|_{L^1(M)} dt}_{T_3}.$$

Für T_1 erhalten wir mit (4.3.4) und (4.1.3), dass

$$T_1 = \int_0^T \|u^\epsilon(t)\|_{L^1(M)} dt \leq \int_0^T \|u_0^\epsilon\|_{L^1(M)} dt \leq T \|u_0\|_{L^1(M)}.$$

Mit Lemma 4.2.1 erhalten wir bei Übernahme der Notation

$$T_2 \leq \int_0^T C_B(u_0^\epsilon) \exp(C_A t) dt \leq T C_B(u_0^\epsilon) \exp(C_A T),$$

wobei $C_B(u_0^\epsilon) = C_{B.1} [\|\text{div}_g(\mathbf{f}(u_0^\epsilon, \cdot))\|_{L^1(M)} + \epsilon \|\Delta u_0^\epsilon\|_{L^1(M)}] + C_{B.2} \text{TV}(u_0^\epsilon)$. Für $C_B(u_0^\epsilon)$ gilt wegen der Divergenzfreiheit von \mathbf{f} und wegen (4.1.3)

$$\begin{aligned} C_B(u_0^\epsilon) &\leq C_{B.1} \left[\int_M \left| \langle \partial_u \mathbf{f}(u_0^\epsilon, \cdot), \nabla_g u_0^\epsilon \rangle_g \right| dv_g + C \text{TV}(u_0) \right] + C_{B.2} \text{TV}(u_0) \\ &\leq C_{B.1} \left[\text{TV}(u_0) \max_{\substack{x \in M \\ \bar{u} \in J}} |\partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, x)|_g + C \text{TV}(u_0) \right] + C_{B.2} \text{TV}(u_0) \\ &=: C_2, \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

wobei $J := [-\|u_0\|_{L^\infty(M)}, \|u_0\|_{L^\infty(M)}]$ und $C_2 > 0$ unabhängig von ϵ ist. Unter Ausnutzung von (4.2.3) und der Differentialgleichung (4.2.1) können wir T_3 abschätzen durch

$$T_3 \leq T \|\partial_t u^\epsilon(0)\|_{L^1(M)} = T [\|\text{div}_g(\mathbf{f}(u_0^\epsilon, \cdot))\|_{L^1(M)} + \epsilon \|\Delta u_0^\epsilon\|_{L^1(M)}] \leq T C_3,$$

wobei der letzte Schritt analog zur Behandlung von T_2 funktioniert und $C_3 > 0$ nicht von ϵ abhängt. Insgesamt gilt also für alle ϵ

$$\|u^\epsilon\|_{H^{1,1}(M_T)} \leq T\|u_0\|_{L^1(M)} + cTC_2 \exp(C_AT) + cTC_3.$$

Somit ist die Familie u^ϵ gleichmäßig in $H^{1,1}(M_T)$ beschränkt und aus dem Kondrakov-Theorem (Satz 4.3.1) folgt, dass eine Teilfolge u^{ϵ_j} mit

$$u^{\epsilon_j} \rightarrow u \text{ in } L^1(M_T) \text{ für } j \rightarrow \infty \quad (4.3.6)$$

existiert. Um zu zeigen, dass u eine Entropielösung im Sinne von Definition (3.4.1) ist, multiplizieren wir Ungleichung (4.1.5) mit einer nichtnegativen Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(M \times [0, T])$ und integrieren über $M \times [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_M \int_{[0,T]} \varphi \partial_t (U(u^{\epsilon_j})) + \int_M \int_{[0,T]} \varphi \operatorname{div}_g (\mathbf{F}(u^{\epsilon_j}, \cdot)) \leq \epsilon \int_M \int_{[0,T]} \varphi \Delta_g U(u^{\epsilon_j}) \\ \Leftrightarrow & \int_M \int_{[0,T]} \partial_t \varphi U(u^{\epsilon_j}) + \int_M \int_{[0,T]} \langle \nabla_g \varphi, \mathbf{F}(u^{\epsilon_j}, \cdot) \rangle_g \\ & + \int_M \varphi(\cdot, 0) U(u_0^{\epsilon_j}) \geq -\epsilon \int_M \int_{[0,T]} \Delta_g \varphi U(u^{\epsilon_j}). \end{aligned}$$

Im Grenzwert für $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\int_M \int_{[0,T]} \partial_t \varphi U(u) + \int_M \int_{[0,T]} \langle \nabla_g \varphi, \mathbf{F}(u, \cdot) \rangle_g + \int_M \varphi(\cdot, 0) U(u_0) \geq 0,$$

was zeigt, dass u eine Entropielösung ist.

Aus (4.3.4) und (4.1.3) folgt, dass

$$\|u^{\epsilon_j}(t)\|_{L^p(M)} \leq \|u_0^{\epsilon_j}\|_{L^p(M)} \leq \|u_0\|_{L^p(M)}.$$

Die L^1 -Konvergenz aus (4.3.6) sagt uns, dass für fast alle $(x, t) \in M_T$ $u^{\epsilon_j}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ für $j \rightarrow \infty$. Mit dem Lemma von Fatou folgt somit für fast alle $t \in [0, T]$ die L^p -Stabilität (4.3.1), nämlich

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p} &= \left(\int_M |u(x, t)|^p dv_g(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_M \lim_{j \rightarrow \infty} |u^{\epsilon_j}(x, t)|^p dv_g(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M |u^{\epsilon_j}(x, t)|^p dv_g(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u^{\epsilon_j}(t)\|_{L^p(M)} \leq \|u_0\|_{L^p(M)}. \end{aligned}$$

Mit (4.3.5) und Lemma 4.2.1 gilt

$$\operatorname{TV}(u^\epsilon(t)) \leq C_2 \exp(C_At) \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Es gilt somit nach der Definition der Totalvariation (Definition 4.0.4) für ein beliebiges $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M)$ mit $\sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1$

$$\int_M u^\epsilon(t) \operatorname{div}_g \mathbf{X} \leq C_2 \exp(C_A t) \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Einfügen einer Null liefert

$$\int_M (u^\epsilon(t) - u(t)) \operatorname{div}_g \mathbf{X} + \int_M u(t) \operatorname{div}_g \mathbf{X} \leq C_2 \exp(C_A t) \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle ϵ . Deshalb können wir zum Grenzwert übergehen und erhalten, da M kompakt und $\operatorname{div}_g \mathbf{X}$ glatt ist, dass

$$\int_M u(t) \operatorname{div}_g \mathbf{X} \leq C_2 \exp(C_A t) \text{ für fast alle } t \in [0, T].$$

Da \mathbf{X} beliebig war, können wir auf der linken Seite das Supremum über alle solche \mathbf{X} nehmen und erhalten (4.3.2). Den Beweis der L^1 -Kontraktion (4.3.3) wollen wir hier nicht ausführen, sondern verweisen auf [BAL07, Seite 14]. Aus der L^1 -Kontraktion folgt schließlich die Eindeutigkeit der Entropielösung. \square

Bemerkung 4.3.3. *Erhaltungsgleichungen im Euklidischen ($M = \mathbb{R}^n$) erfüllen die sogenannte TVD-Eigenschaft¹, falls der zugehörige Fluss $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u})$ nur von der erhaltenen Größe und insbesondere nicht von Ort und Zeit abhängt. Für Mannigfaltigkeiten haben wir mit (4.2.4) gezeigt, dass die Totalvariation zu jedem Zeitpunkt endlich bleibt. Das folgende Lemma und das darauf aufbauende Beispiel zeigen, dass eine TVD-Eigenschaft im Falle von Mannigfaltigkeiten nicht zu erwarten ist, auch nicht für divergenzfreie Flüsse \mathbf{f} . Dies resultiert nicht erst aus Geometrie- oder Krümmungseigenschaften, sondern schon allein aus der Abhängigkeit des Flusses vom Ort, was bei Flüssen auf Mannigfaltigkeiten jedoch stets der Fall ist.*

Das folgende Lemma gibt Lösungen der Erhaltungsgleichung im Euklidischen für eine geeignete Klasse von Flüssen \mathbf{f} an.

Lemma 4.3.4. *Sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein glattes Vektorfeld, das durch $(x_1, x_2) \mapsto (V_1(x_2), 0)^T$ dargestellt werden kann, wobei $V_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $u(x_1, x_2, t) := u_0(x_1 - V_1(x_2)t, x_2)$ eine Lösung von*

$$\partial_t u + \operatorname{div}(\mathbf{f}(u, \cdot)) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \quad (4.3.7)$$

falls $\mathbf{f}(\bar{u}, x) := \bar{u}\mathbf{V}(x)$ für $\bar{u} \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$.

¹TVD steht für Total Variation Diminishing und bedeutet, dass die Totalvariation der Entropielösung im zeitlichen Verlauf nicht anwächst.

Beweis: Wir berechnen einerseits

$$\begin{aligned}\partial_t u(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (u_0(x_1 - V_1(x_2)t, x_2)) \\ &= -V_1(x_2) \partial_1 u_0(x_1 - V_1(x_2)t, x_2),\end{aligned}$$

andererseits folgt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{f}(u(x_1, x_2, t), x_1, x_2)) &= \operatorname{div}(u(x_1, x_2, t)\mathbf{V}(x_1, x_2)) \\ &= \nabla u(x_1, x_2, t) \cdot \mathbf{V}(x_1, x_2) + u(x_1, x_2, t) \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{V}(x_1, x_2)}_{=0} \\ &= \nabla(u_0(x_1 - V_1(x_2)t, x_2)) \cdot \mathbf{V}(x_1, x_2) \\ &= \partial_1 u_0(x_1 - V_1(x_2)t, x_2) V_1(x_2) \\ &= -\partial_t u(x_1, x_2, t).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.3.5. Der Fluss $\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) := \bar{u}\mathbf{V}$ aus Lemma 4.3.4 ist divergenzfrei, da $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass bereits bei einem divergenzfreien Fluss im Euklidischen (\mathbb{R}^2) die Totalvariation der zugehörigen Entropielösung im zeitlichen Verlauf ansteigen kann.

Beispiel 4.3.6. Wir betrachten Lemma 4.3.4 für den Spezialfall

$$\begin{aligned}V_1(x_2) &:= \sin(x_2), \\ u_0(x_1, x_2) &:= \Psi(x_1)\Psi(x_2),\end{aligned}$$

wobei

$$\Psi(z) := \mathbb{1}_{\{|z-\pi| < \pi/2\}} \cos^2(z).$$

Die zeitliche Entwicklung von u sehen wir in Abbildung 4.2. Nun erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_1 u_0(x_1, x_2) &= \Psi'(x_1)\Psi(x_2) = -2 \tan(x_1)\Psi(x_1)\Psi(x_2), \\ \partial_2 u_0(x_1, x_2) &= \Psi(x_1)\Psi'(x_2) = -2 \tan(x_2)\Psi(x_1)\Psi(x_2),\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

da

$$\begin{aligned}\Psi'(z) &= \mathbb{1}_{\{|z-\pi| < \pi/2\}} 2 \cos(z)(-\sin(z)) \\ &= -2 \mathbb{1}_{\{|z-\pi| < \pi/2\}} \cos^2(z) \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \\ &= -2 \tan(z)\Psi(z)\end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{R}$. Der (klassische) Gradient von u berechnet sich zu

$$\nabla u(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_0(x_1 - \sin(x_2)t, x_2) \\ \partial_2 u_0(x_1 - \sin(x_2)t, x_2) - \cos(x_2)t \partial_1 u_0(x_1 - \sin(x_2)t, x_2) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$|\nabla u(x_1, x_2, t)| = [(\partial_1 u_0)^2 + (\partial_2 u_0 - \cos(x_2)t \partial_1 u_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

wobei das Argument $(x_1 - \sin(x_2)t, x_2)$ aus Gründen der Lesbarkeit weggelassen wurde. Mit (4.3.8) sehen wir, dass dann

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_1, x_2, t)| &= [(-2 \tan(\tilde{x}_1) \Psi(\tilde{x}_1) \Psi(x_2))^2 \\ &\quad + (-2 \tan(x_2) \Psi(\tilde{x}_1) \Psi(x_2) - \cos(x_2)t(-2 \tan(\tilde{x}_1) \Psi(\tilde{x}_1) \Psi(x_2)))^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \Psi(\tilde{x}_1) \Psi(x_2) [\tan^2(\tilde{x}_1) + (\tan(x_2) - \cos(x_2)t \tan(\tilde{x}_1))^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{x}_1 := x_1 - \sin(x_2)t$. Die Totalvariation von u zum Zeitpunkt t berechnet sich demnach zu

$$\begin{aligned} \text{TV}(u) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)| \, dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tilde{x}_1) \Psi(x_2) [\tan^2(\tilde{x}_1) + (\tan(x_2) - \cos(x_2)t \tan(\tilde{x}_1))^2]^{\frac{1}{2}} \, dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Eine numerische Berechnung des obigen Integrals mit 10.000 ($N = 100$), 1.000.000 ($N = 1.000$) und 100.000.000 ($N = 10.000$) Quadraturpunkten ist in Abbildung 4.1, (b) dargestellt. Alle drei Kurven scheinen in der Abbildung aufeinander zu liegen, was die Konvergenz der numerischen Berechnung bestätigt. Dass die Kurven ansteigen, zeigt, dass die Totalvariation im zeitlichen Verlauf anwächst.

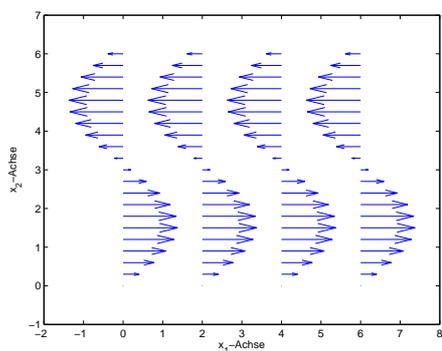
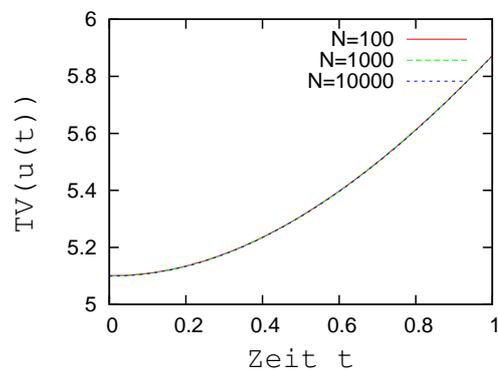
(a) Das Vektorfeld \mathbf{V} .(b) Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u .

Abbildung 4.1: Wir sehen im rechten Bild, dass die Totalvariation der exakten Lösung zeitlich anwächst, sogar wenn das zugrunde liegende Vektorfeld (linkes Bild) divergenzfrei ist.

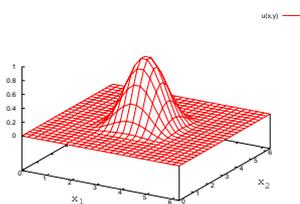
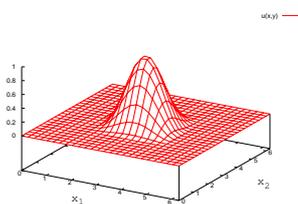
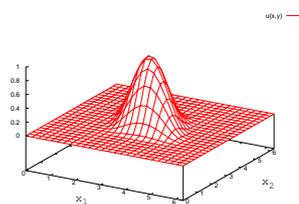
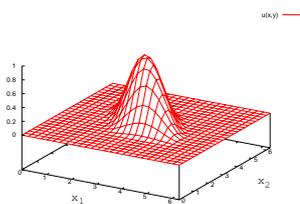
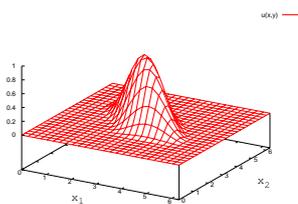
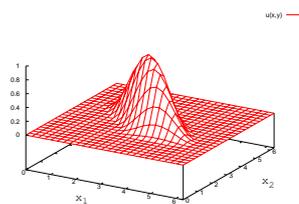
(a) u für $t = 0, 0$ (b) u für $t = 0, 2$ (c) u für $t = 0, 4$ (d) u für $t = 0, 6$ (e) u für $t = 0, 8$ (f) u für $t = 1, 0$

Abbildung 4.2: Zeitliche Entwicklung von u für sechs Zeitpunkte.

Kapitel 5

Die $TV_{\mathbf{X}}$ -Abschätzung

In Kapitel 4 haben wir gezeigt, dass die Totalvariation der Entropielösung vom Anfangswertproblem (3.1.1) und (3.1.2) unter gewissen Annahmen zu jedem Zeitpunkt endlich ist. Wir wollen in diesem Kapitel einen modifizierten Begriff der Totalvariation, die sogenannte Totalvariation entlang eines Vektorfeldes, einführen und zeigen, unter welchen Bedingungen sie für alle Zeiten durch die Anfangsdaten beschränkt bleibt.

5.1 Motivation

Als Motivation präsentieren wir eine neue Proposition, die aufzeigt, dass unter bestimmten Annahmen an den Fluss \mathbf{f} die Erhaltungsgleichung (3.1.1) lokal zu einer Familie von eindimensionalen Erhaltungsgleichungen entkoppelt.

Proposition 5.1.1. *Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, x)$ ein glatter Fluss auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ohne Rand, der als*

$$\mathbf{f}(\bar{u}, x) = f(\bar{u}, x)\mathbf{V}(x) + \mathbf{W}(x) \quad \text{für } x \in M \text{ und } \bar{u} \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann, wobei $f \in C^1(\mathbb{R} \times M)$ und $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathcal{T}(M)$ Vektorfelder sind mit $f(\bar{u}, \cdot) \operatorname{div}_g \mathbf{V} + \operatorname{div}_g \mathbf{W} = 0$ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$. Ist u für einen solchen Fluss \mathbf{f} eine Lösung der Erhaltungsgleichung (3.1.1), dann erfüllt u eindimensionale Erhaltungsgleichungen entlang der Integralkurven von \mathbf{V} , das heißt, falls $\gamma : J \rightarrow M$ eine Integralkurve des Vektorfeldes \mathbf{V} ist, dann erfüllt $\tilde{u}(s, t) := u(\gamma(s), t)$ die Erhaltungsgleichung

$$\partial_t \tilde{u}(s, t) + \frac{\partial}{\partial s} (f(\tilde{u}(s, t), \gamma(s))) = 0 \quad \text{für } (s, t) \in J \times \mathbb{R}^+. \quad (5.1.1)$$

Beweis: Da $f(u, \cdot) \operatorname{div}_g \mathbf{V} + \operatorname{div}_g \mathbf{W} = 0$ ist, gilt auf $M \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot)) \\ &= -\operatorname{div}_g(f(u, \cdot)\mathbf{V} + \mathbf{W}) \\ &= -\langle \partial_u f(u, \cdot) \nabla_g u, \mathbf{V} \rangle_g - \langle (\nabla_g f)(u, \cdot), \mathbf{V} \rangle_g - \underbrace{f(u, \cdot) \operatorname{div}_g \mathbf{V} - \operatorname{div}_g \mathbf{W}}_{=0} \\ &= -\langle \nabla_g u, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g - \langle (\nabla_g f)(u, \cdot), \mathbf{V} \rangle_g. \end{aligned}$$

Aus dieser Identität und der Definition der Integralkurve (Definition 2.6.5) folgt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(f(\tilde{u}(s, t), \gamma(s))) &= \partial_u f(\tilde{u}(s, t), \gamma(s)) \frac{\partial}{\partial s}(u(\gamma(s), t)) \\ &\quad + \langle (\nabla_g f)(\tilde{u}(s, t), \gamma(s)), \gamma'(s) \rangle_g \\ &= \partial_u f(\tilde{u}(s, t), \gamma(s)) \langle \gamma'(s), \nabla_g u(\gamma(s), t) \rangle_g \\ &\quad + \langle (\nabla_g f)(\tilde{u}(s, t), \gamma(s)), \mathbf{V}(\gamma(s)) \rangle_g \\ &= \partial_u f(u(\gamma(s), t), \gamma(s)) \langle \mathbf{V}(\gamma(s)), \nabla_g u(\gamma(s), t) \rangle_g \\ &\quad + \langle (\nabla_g f)(\tilde{u}(s, t), \gamma(s)), \mathbf{V}(\gamma(s)) \rangle_g \\ &= \langle \partial_u \mathbf{f}(u(\gamma(s), t), \gamma(s)), \nabla_g u(\gamma(s), t) \rangle_g \\ &\quad + \langle (\nabla_g f)(u(\gamma(s), t), \gamma(s)), \mathbf{V}(\gamma(s)) \rangle_g \\ &= -\partial_t u(\gamma(s), t) \\ &= -\partial_t \tilde{u}(s, t) \end{aligned}$$

für $(s, t) \in J \times \mathbb{R}^+$. Damit ist (5.1.1) gezeigt. \square

5.2 Die Totalvariation entlang von Vektorfeldern

Der eindimensionale Charakter der Erhaltungsgleichung entlang der Integralkurven des zum Fluss gehörigen Vektorfeldes, den uns Proposition 5.1.1 verdeutlicht, lässt vermuten, dass die Totalvariation entlang dieser Integralkurven nicht ansteigt. Diese Vermutung motiviert die folgende, systematische Untersuchung der Totalvariation entlang von Vektorfeldern. Dazu machen wir folgende Definition (vgl. [ABAL05, Seite 3]).

Definition 5.2.1 (Totalvariation entlang \mathbf{X}). Sei (M^n, g) eine differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $u \in L^1(M)$. Die Totalvariation von u auf (M, g) entlang des Vektorfeldes $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M)$ ist definiert durch

$$TV_{\mathbf{X}}(u) := \sup_{\substack{\varphi \in C^1(M), \\ \|\varphi\|_{L^\infty(M)} \leq 1}} \int_M u \operatorname{div}_g(\varphi \mathbf{X}) \, dv_g.$$

Für glatte Funktionen $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$TV_{\mathbf{X}}(u) = \int_M |\mathbf{X}(u)| \, dv_g.$$

Ist $TV_{\mathbf{X}}(u) < \infty$, dann hat u eine beschränkte Totalvariation entlang \mathbf{X} .

5.3 Differentialgleichung für $\mathbf{X}(u)$

Die folgende Proposition aus [ABAL05, Proposition 2.1] stellt eine Identität über die Richtungsableitungen der Lösungen von (3.1.1) zur Verfügung, die als Ausgangspunkt für den darauf folgenden Satz über die Abschätzung der Totalvariation von Lösungen von (3.1.1) entlang von Vektorfeldern dienen wird.

Proposition 5.3.1. *Sei (M^n, g) eine differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $u : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Lösung der Erhaltungsgleichung (3.1.1), wobei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ ein glatter Fluss ist. Sei \mathbf{X} ein beliebiges glattes Vektorfeld auf M . Dann erfüllt die Funktion $\mathbf{X}(u) : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung.*

$$\partial_t(\mathbf{X}(u)) + \operatorname{div}_g(\mathbf{X}(u)\partial_u\mathbf{f}(u, \cdot)) = -\langle \nabla_g u, (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f})(u, \cdot) \rangle_g - \mathbf{X}(\operatorname{div}_g\mathbf{f})(u, \cdot). \quad (5.3.1)$$

Beweis: Wir wenden das Vektorfeld \mathbf{X} auf die Erhaltungsgleichung (3.1.1) an, was zu

$$\partial_t(\mathbf{X}(u)) + \mathbf{X}(\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot))) \quad \text{auf } M \times \mathbb{R}^+$$

führt. Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$\mathbf{X}(\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot))) = \operatorname{div}_g(\mathbf{X}(u)\partial_u\mathbf{f}(u, \cdot)) + \langle \nabla_g u, (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f})(u, \cdot) \rangle_g + \mathbf{X}(\operatorname{div}_g\mathbf{f})(u, \cdot). \quad (5.3.2)$$

Nun ist mit (2.14.1) und (2.14.3) aus Lemma 2.14.1

$$\begin{aligned} A &:= \mathbf{X}(\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot))) = \mathbf{X}((\operatorname{div}_g\mathbf{f})(u, \cdot)) + \mathbf{X}\left(\langle \nabla_g u, \partial_u\mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g\right) \\ &= \mathbf{X}(\operatorname{div}_g\mathbf{f})(u, \cdot) + \mathbf{X}(u)(\operatorname{div}_g\partial_u\mathbf{f})(u, \cdot) + \mathbf{X}\left(\langle \nabla_g u, \partial_u\mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g\right), \end{aligned}$$

und mit der Produktregel aus Lemma 2.12.9 und mit (2.14.1) sehen wir, dass

$$\begin{aligned} B &:= \operatorname{div}_g(\mathbf{X}(u)\partial_u\mathbf{f}(u, \cdot)) = \mathbf{X}(u)\operatorname{div}_g(\partial_u\mathbf{f}(u, \cdot)) + \langle \nabla_g(\mathbf{X}(u)), \partial_u\mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g \\ &= \mathbf{X}(u)(\operatorname{div}_g\partial_u\mathbf{f})(u, \cdot) + \mathbf{X}(u)\langle \nabla_g u, \partial_{uu}\mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g + \langle \nabla_g(\mathbf{X}(u)), \partial_u\mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g. \end{aligned}$$

Kombinieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A = & B + \mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot) + \mathbf{X} \left(\langle \nabla_g u, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g \right) \\ & - \mathbf{X}(u) \langle \nabla_g u, \partial_{uu} \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g - \langle \nabla_g(\mathbf{X}(u)), \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g. \end{aligned}$$

Mit der Lie-Ableitung von Tensorfeldern (vgl. Definition 2.9.9), angewendet auf die Riemannsche Metrik g , können wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \left(\langle \nabla_g u, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g \right) &= (\mathcal{L}_\mathbf{X} g) (\nabla_g u, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot)) \\ &+ \langle \mathcal{L}_\mathbf{X} \nabla_g u, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g + \langle \nabla_g u, \mathcal{L}_\mathbf{X}(\partial_u \mathbf{f}(u, \cdot)) \rangle_g \end{aligned}$$

und erhalten mit (2.14.2)

$$\begin{aligned} A = & B + \mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot) + (\mathcal{L}_\mathbf{X} g) (\nabla_g u, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot)) \\ &+ \langle \mathcal{L}_\mathbf{X} \nabla_g u - \nabla_g(\mathbf{X}(u)), \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g \\ &+ \underbrace{\langle \nabla_g u, \mathcal{L}_\mathbf{X}(\partial_u \mathbf{f}(u, \cdot)) - \mathbf{X}(u) \partial_{uu} \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g}_{\langle \nabla_g u, (\mathcal{L}_\mathbf{X} \partial_u \mathbf{f})(u, \cdot) \rangle_g}. \end{aligned}$$

Die Identität (5.3.2) ist also gezeigt, falls für alle Vektorfelder $\mathbf{X}, \mathbf{Z} \in \mathcal{T}(M)$ gilt, dass

$$\langle \mathcal{L}_\mathbf{X} \nabla_g u - \nabla_g(\mathbf{X}(u)), \mathbf{Z} \rangle_g = -(\mathcal{L}_\mathbf{X} g) (\nabla_g u, \mathbf{Z}).$$

In lokalen Koordinaten ist für die i -te Komponente in der Koordinatenbasis

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\mathbf{X} \nabla_g u - \nabla_g(\mathbf{X}(u)))^i &= X^j \partial_j \nabla^i u - \nabla^j u \partial_j X^i - \nabla^i (X^j \partial_j u) \\ &= \underbrace{X^j (\partial_j \nabla^i u - \nabla^i \partial_j u)}_{=: I_1} - \underbrace{\nabla^j u \partial_j X^i - \nabla^i X^j \partial_j u}_{=: I_2}, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

wobei X^i die i -te Komponente von \mathbf{X} in der Koordinatenbasis bezeichnet und $\nabla^i = g^{ij} \partial_j$ (vgl. Definition 2.13.1). Für I_1 schreiben wir

$$\begin{aligned} I_1 &= X^j (\partial_j \nabla^i u - \nabla^i \partial_j u) = X^j (\partial_j (g^{il} \partial_l u) - g^{il} \partial_l \partial_j u) = X^j \partial_j g^{il} \partial_l u \\ &= \mathbf{X}(g^{il}) \underbrace{g_{lj} g^{jm}}_{\delta_l^i} \partial_m u = \mathbf{X}(g^{il}) g_{lj} \nabla^j u = -\mathbf{X}(g_{lj}) g^{il} \nabla^j u, \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

wobei wir hier ausgenutzt haben, dass $\mathbf{X}(g^{il})g_{lj} + \mathbf{X}(g_{lj})g^{il} = \mathbf{X}(g^{il}g_{lj}) = \mathbf{X}(\delta_j^i) = 0$. Um I_2 zu behandeln, berechnen wir zunächst die lokalen Komponenten von $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)_{jl} &= (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)(\partial_j, \partial_l) = \mathbf{X}(g_{jl}) - \langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_j, \partial_l \rangle_g - \langle \partial_j, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_l \rangle_g \\ &= \mathbf{X}(g_{jl}) - \langle X^m \underbrace{\partial_m \delta_j^i}_{=0} \partial_i - \partial_j X^m \partial_m, \partial_l \rangle_g \\ &\quad - \langle \partial_j, X^m \partial_m \delta_l^i - \partial_l X^m \partial_m \rangle_g \\ &= \mathbf{X}(g_{jl}) + \partial_j X^m g_{ml} + \partial_l X^m g_{mj}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} -\nabla^j u g^{il} ((\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)_{jl} - \mathbf{X}(g_{lj})) &= -\nabla^j u g^{il} (\partial_j X^m g_{ml} + \partial_l X^m g_{mj}) \\ &= -\nabla^j u \partial_j X^i - \nabla^i X^j \partial_j u = I_2 \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

und aus (5.3.3), (5.3.4) und (5.3.5) erhalten wir schließlich

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\nabla_g u - \nabla_g(\mathbf{X}(u)))^i = -g^{li} \nabla^j u (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)_{jl}.$$

Aus der letzten Gleichung können wir folgern, dass

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\nabla_g u - \nabla_g(\mathbf{X}(u)), \mathbf{Z} \rangle_g &= -g_{im} g^{li} \nabla^j u (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)_{jl} Z^m \\ &= -\nabla^j u (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)_{jl} Z^l \\ &= -(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)(\nabla_g u, \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

wobei Z^i die i -te Komponente von \mathbf{Z} in der Koordinatenbasis bezeichnet. Daraus folgt letztlich die Behauptung. \square

Im Beweis von Proposition 5.3.1 haben wir eine Identität gezeigt, die wir im folgenden Korollar noch einmal extrahieren.

Korollar 5.3.2. *Sei (M^n, g) eine differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt für jeden glatten Fluss $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ und jedes glatte Vektorfeld \mathbf{X} auf M*

$$\mathbf{X}(\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot))) = \operatorname{div}_g(\mathbf{X}(u)\partial_u \mathbf{f}(u, \cdot)) + \langle \nabla_g u, (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u \mathbf{f})(u, \cdot) \rangle_g + \mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot).$$

5.4 Die Abschätzung

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Kapitels. Es ist eine Abschwächung von [ABAL05, Theorem 2.3] in dem Sinne, dass wir eine glatte Lösung voraussetzen, statt nur einer Entropielösung. Der Grund dafür ist, dass die Argumentation

aus [ABAL05] nur den Fall behandelt, in dem eine glatte Lösung u vorausgesetzt ist. Auf Anfragen hin und nach darauf folgenden Gesprächen war es auch den Autoren von [ABAL05] nicht möglich, den Beweis auf Entropielösungen auszuweiten. Deshalb betrachten wir nur glatte Lösungen und stellen den Beweis aus [ABAL05] ausführlich dar.

Satz 5.4.1 (Totalvariationsabschätzung). *Sei u eine glatte Lösung der Erhaltungsgleichung (3.1.1) auf einer differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ohne Rand, wobei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ ein glatter Fluss ist. Sei \mathbf{X} ein glattes Vektorfeld auf M und bezeichne $u(t) = u(\cdot, t)$.*

1. *Dann erfüllt die Totalvariation von u entlang von \mathbf{X} für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ die folgende Ungleichung:*

$$\begin{aligned} \mathbf{TV}_{\mathbf{X}}(u(t)) \leq & \mathbf{TV}_{\mathbf{X}}(u(0)) + \sup_{M \times (0,t)} |(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f})(u, \cdot)|_g \int_0^t \mathbf{TV}(u(\tau)) d\tau \\ & + \|\mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot)\|_{L^1(M \times (0,t))}. \end{aligned}$$

2. *Falls \mathbf{f} divergenzfrei ist und die Lie-Klammer von $\partial_u \mathbf{f}$ und \mathbf{X} verschwindet, das heißt $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0$ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$, dann hat u beschränkte Totalvariation entlang von \mathbf{X} für alle Zeiten $t > 0$, falls dies zur Zeit $t = 0$ gilt. In diesem Fall gilt also*

$$\mathbf{TV}_{\mathbf{X}}(u(t)) \leq \mathbf{TV}_{\mathbf{X}}(u(0)) \text{ für alle } t > 0.$$

Beweis: Wie beim Beweis von Lemma 4.2.1 führen wir zunächst eine Regularisierung $s_\delta : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ der Signum-Funktion ein, die folgende Eigenschaften haben soll:

1. $s_\delta(x) = -s_\delta(-x)$,
2. $s_\delta' \geq 0$,
3. $s_\delta'(x) = 0$ für $|x| > \delta$,
4. $|s_\delta'(x)| \leq C\delta^{-1}$ für $|x| \leq \delta$ mit einer Konstanten $C > 0$.

Multiplizieren wir (5.3.1) mit $s_\delta(w)$, wobei $w := X(u) : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, und integrieren über M , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M s_\delta(w) \partial_t w \, dv_g + \int_M s_\delta(w) \operatorname{div}_g (w \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot)) \, dv_g \\ = - \int_M s_\delta(w) \langle \nabla_g u, (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f})(u, \cdot) \rangle_g \, dv_g - \int_M s_\delta(w) \mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot) \, dv_g. \end{aligned}$$

Mit $r(y) := \int_0^y s_\delta(\xi) d\xi$ und partieller Integration im zweiten Term auf der linken Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M r(w) dv_g - \int_M s'_\delta(w) w \langle \nabla_g w, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g dv_g \\ = - \int_M s_\delta(w) \langle \nabla_g u, (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f})(u, \cdot) \rangle_g dv_g - \int_M s_\delta(w) \mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot) dv_g. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Dabei sei beachtet, dass die Voraussetzungen für das Vertauschen von Zeitableitung und Integral im ersten Term erfüllt sind. Um das zweite Integral auf der linken Seite von (5.4.1) zu berechnen, benutzen wir dasselbe Argument wie im Beweis von Lemma 4.2.1, nämlich, dass $\operatorname{spt} s'_\delta(w) \subseteq \{|w| \leq \delta\}$. Es reicht also, über $\{0 < |w| \leq \delta\}$ zu integrieren. Dort können wir aber $|w|$ durch δ abschätzen und da $|s'_\delta(x)| \leq C\delta^{-1}$, gilt

$$\left| \int_M s'_\delta(w) w \langle \nabla_g w, \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot) \rangle_g dv_g \right| \leq C(\mathbf{f}, u, w, \nabla_g w) \int_{\{0 < |w| \leq \delta\}} 1 dv_g \rightarrow 0,$$

falls $\delta \rightarrow 0$. Integrieren wir (5.4.1) über das Intervall $(0, t)$ und betrachten den Grenzfall für $\delta \rightarrow 0$, so erhalten wir nach Abschätzung der Terme auf der rechten Seite

$$\begin{aligned} \int_M |w(\cdot, t)| dv_g \leq \int_M |w(\cdot, 0)| dv_g + \int_0^t \int_M |\nabla_g u|_g |(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f})(u, \cdot)|_g dv_g dt \\ + \int_0^t \int_M |\mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot)| dv_g dt. \end{aligned}$$

oder mit den Definitionen von $\operatorname{TV}_{\mathbf{X}}$ und TV

$$\begin{aligned} \operatorname{TV}_{\mathbf{X}}(u(t)) \leq \operatorname{TV}_{\mathbf{X}}(u(0)) + \sup_{M \times (0, t)} |(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f})(u, \cdot)|_g \int_0^t \operatorname{TV}(u(\tau)) d\tau \\ + \|\mathbf{X}(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, \cdot)\|_{L^1(M \times (0, t))}. \end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Erhaltungsgleichungen auf der Sphäre \mathbb{S}^2

In der Geophysik ist der Spezialfall $M = \mathbb{S}^2$ von besonderem Interesse, da die 2-Sphäre als Modell für die Erdoberfläche dient. So wird zum Beispiel der globale Luft- oder Meeresstrom auf der Erdoberfläche durch das mathematische Modell der Shallow Water Gleichungen auf der 2-Sphäre beschrieben ([WDH⁺92, Gir01, CP96, CHL08, RBL04, Gir00]). Diese Gleichungen stellen ein System von nichtlinearen hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen dar. Die in dieser Arbeit betrachteten nichtlinearen hyperbolischen skalaren Erhaltungsgleichungen sind ein Modellproblem für solche Systeme.

Aus diesem Grund wenden wir uns in diesem Kapitel dem Spezialfall $M = \mathbb{S}^2$ zu und versehen \mathbb{S}^2 mit der Riemannschen Metrik $g = \widehat{g}|_{\mathbb{S}^2}$, die vom Standardskalarprodukt $\widehat{g} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ des \mathbb{R}^3 durch die Inklusion $\iota : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ auf \mathbb{S}^2 induziert wird (vgl. Beispiel 2.10.5). Die Erhaltungsgleichung (3.1.1) wird dann zu

$$\partial_t u + \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot)) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \quad (6.0.1)$$

wobei die Funktion $u : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist und $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ für jeden Wert des Parameters $\bar{u} \in \mathbb{R}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 ist, das glatt vom Parameter \bar{u} abhängt. Der Fluss $\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ ist also insbesondere an jeder Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ aus $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$ und somit tangential an \mathbb{S}^2 .

Zu Beginn des Kapitels führen wir lokale Koordinaten, die sphärischen Koordinaten, für die 2-Sphäre ein. Danach überlegen wir, wie sich Tangentialvektoren an \mathbb{S}^2 mithilfe der Einbettung $\iota : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ anschaulich darstellen lassen. Weiter wollen wir untersuchen, wie man Flüsse \mathbf{f} konstruieren kann, die divergenzfrei sind. Schließlich entwickeln wir ein Beispielproblem, das in sphärischen Koordinaten zu

einer eindimensionalen Differentialgleichung entkoppelt und deshalb besonders gut für numerische Tests geeignet ist.

6.1 Sphärische Koordinaten

An dieser Stelle wird die Beschreibung der 2-Sphäre anhand von sphärischen Koordinaten untersucht. Diese haben den Vorteil, dass sie bis auf eine $dvol_g$ -Nullmenge die ganze Sphäre parametrisieren. Sphärische Koordinaten für die 2-Sphäre haben wir in Beispiel 2.2.3, b) eingeführt. Wir definieren die 2-Sphäre als eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 durch

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Jeder Punkt auf \mathbb{S}^2 kann durch die Angabe seines Breitengrades $\varphi \in [0, 2\pi]$ und Längengrades $\theta \in [0, \pi]$ dargestellt werden (siehe Abbildung 2.3), das heißt

$$\mathbb{S}^2 = \{(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}.$$

Die Abbildung

$$\mathbf{x}_O : \Omega_O \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad (\varphi, \theta) \mapsto (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

mit $\Omega_O := (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, ist eine Parametrisierung der Sphäre bis auf eine Nullmenge. Wir wollen im Folgenden nur glatte Funktionen auf \mathbb{S}^2 betrachten. Deshalb ist es sinnvoll, periodische Randbedingungen für $\varphi \downarrow 0$ und $\varphi \uparrow 2\pi$ einzuführen, oder, äquivalent dazu, die Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ zu unserem Parametergebiet Ω_0 hinzuzufügen und miteinander zu identifizieren. Bis auf die Pole können wir die Sphäre also parametrisieren durch

$$\mathbf{x}_P : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad (\varphi, \theta) \mapsto (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

mit $\Omega := T^1 \times (0, \pi)$. Dabei ist $T^1 := [0, 2\pi]$, wobei die Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ miteinander identifiziert sind. Da wir nur glatte Funktionen auf \mathbb{S}^2 betrachten, können wir diese durch Funktionen von $(\varphi, \theta) \in \Omega$ repräsentieren und, aufgrund der Stetigkeit, auf ganz \mathbb{S}^2 , das heißt zu den Polen ($\theta = 0$ und $\theta = \pi$), fortsetzen.

6.1.1 Tangentialvektoren in sphärischen Koordinaten

\mathbb{S}^2 ist eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 und an jeder Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ können wir den Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$ als 2-dimensionalen Unterraum des $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ auffassen. Die Koordinatenvektoren der sphärischen Koordinaten schreiben wir für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ in Kurzform als

$$\partial_\varphi = \partial_\varphi(\mathbf{x}) := \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_{\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad \partial_\theta = \partial_\theta(\mathbf{x}) := \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\mathbf{x}}.$$

Fassen wir diese Vektoren als Elemente des $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ auf, dann erhalten wir für die Koordinatenvektoren an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ mit der Formel aus Bemerkung 2.4.7

$$\begin{aligned}\partial_\varphi(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \varphi} \right|_{(\varphi, \theta)} = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0) = \sin \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \partial_\theta(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \theta} \right|_{(\varphi, \theta)} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta).\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

6.1.2 Die Riemannsche Metrik in sphärischen Koordinaten

Mit der Formel aus Beispiel 2.10.6 oder anhand von (2.10.1) sieht man, dass sich die lokale Darstellung der Riemannschen Metrik an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ zu

$$\begin{aligned}g_{\varphi\varphi}(\mathbf{x}) &= \langle \partial_\varphi(\mathbf{x}), \partial_\varphi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \sin^2 \theta, \\ g_{\theta\theta}(\mathbf{x}) &= \langle \partial_\theta(\mathbf{x}), \partial_\theta(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1, \\ g_{\varphi\theta}(\mathbf{x}) &= \langle \partial_\varphi(\mathbf{x}), \partial_\theta(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0,\end{aligned}$$

berechnet, in Matrixform ist also

$$(g_{ij})_{i,j=\varphi,\theta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (g^{ij})_{i,j=\varphi,\theta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.1.3 Die Erhaltungsgleichung in sphärischen Koordinaten

Wir wollen nun den Fluss \mathbf{f} in sphärischen Koordinaten schreiben. Dieser lässt sich in der Koordinatenbasis schreiben als

$$\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}_P(\varphi, \theta)) = f^\varphi(\bar{u}, \varphi, \theta) \partial_\varphi(\mathbf{x}_P(\varphi, \theta)) + f^\theta(\bar{u}, \varphi, \theta) \partial_\theta(\mathbf{x}_P(\varphi, \theta)),$$

wobei $\bar{u} \in \mathbb{R}$ und $f^\varphi, f^\theta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$. Da die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{V} = V^\varphi \partial_\varphi + V^\theta \partial_\theta$ in sphärischen Koordinaten die Gestalt

$$\operatorname{div}_g(\mathbf{V}) = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (V^\varphi \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (V^\theta \sin \theta) \right)\tag{6.1.2}$$

hat (vgl. (2.12.1)), lautet die Erhaltungsgleichung (6.0.1) in sphärischen Koordinaten nach Multiplikation mit $\sin \theta$

$$\partial_t (u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f^\varphi(u, \varphi, \theta) \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (f^\theta(u, \varphi, \theta) \sin \theta) = 0,\tag{6.1.3}$$

wobei wir durch die Stetigkeit von u auf ganz \mathbb{S}^2 bzw. durch die Identifizierung von $\varphi = 0$ mit $\varphi = 2\pi$ eine periodische Randbedingung

$$u(t, 0, \theta) = u(t, 2\pi, \theta) \quad \text{für } \theta \in (0, \pi), \quad t \geq 0$$

erhalten.

6.2 Eingebettete Darstellung

Wir wollen in diesem Abschnitt, der stark an [BAL07] angelehnt ist, stärker ausnutzen, dass die Sphäre \mathbb{S}^2 isometrisch in den \mathbb{R}^3 eingebettet ist. Somit fassen wir nun alle Tangentialvektoren aus dem Tangentialbündel $T\mathbb{S}^2$ als Elemente des \mathbb{R}^3 auf (siehe dazu Beispiel 2.7.5). Im Folgenden kürzen wir das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ des \mathbb{R}^3 mit dem Punkt “ \cdot ” ab. Des Weiteren bezeichnen wir mit “ \times ” das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 . An jeder Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ definieren wir durch

$$\mathbf{n}(\varphi, \theta) := (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

einen äußeren Normalenvektor auf \mathbb{S}^2 in \mathbb{R}^3 .

6.2.1 Orthonormalbasis des Tangentialraums

Mithilfe der Koordinatenbasis aus (6.1.1) können wir an jeder Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ definieren (vgl. Abbildung 6.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1(\varphi, \theta) &:= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{t}_2(\varphi, \theta) &:= -\partial_\theta(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Wir erhalten also mit dem Tripel $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ an jeder Stelle aus $\mathbf{x}_P(\Omega) \subseteq \mathbb{S}^2$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 . Einen Vektor $\mathbf{V} = V^\varphi \partial_\varphi(\mathbf{x}) + V^\theta \partial_\theta(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ können wir als Element des \mathbb{R}^3 auffassen und ihn darstellen als $\mathbf{V} = \tilde{V}^1 \mathbf{t}_1(\varphi, \theta) + \tilde{V}^2 \mathbf{t}_2(\varphi, \theta) + \tilde{V}^3 \mathbf{n}(\varphi, \theta)$, wobei $\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \tilde{V}^3 \in \mathbb{R}$ die Komponenten von \mathbf{V} in der Basis $(\mathbf{t}_1(\varphi, \theta), \mathbf{t}_2(\varphi, \theta), \mathbf{n}(\varphi, \theta))$ sind. Mit (6.2.1) sehen wir, dass

$$\mathbf{V} = V^\varphi \partial_\varphi(\mathbf{x}) + V^\theta \partial_\theta(\mathbf{x}) = \sin \theta V^\varphi \mathbf{t}_1(\varphi, \theta) - V^\theta \mathbf{t}_2(\varphi, \theta).$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten bei der Koordinatenbasis der sphärischen Koordinaten einerseits und der eingebetteten Darstellung durch die Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ andererseits ist folglich

$$\tilde{V}^1 = \sin \theta V^\varphi, \quad \tilde{V}^2 = -V^\theta, \quad \tilde{V}^3 = 0. \quad (6.2.2)$$

6.2.2 Die Erhaltungsgleichung in der Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$

Der Fluss $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ kann jetzt als

$$\mathbf{f}(u, \varphi, \theta) = \tilde{f}^1(u, \varphi, \theta) \mathbf{t}_1(\varphi, \theta) + \tilde{f}^2(u, \varphi, \theta) \mathbf{t}_2(\varphi, \theta)$$

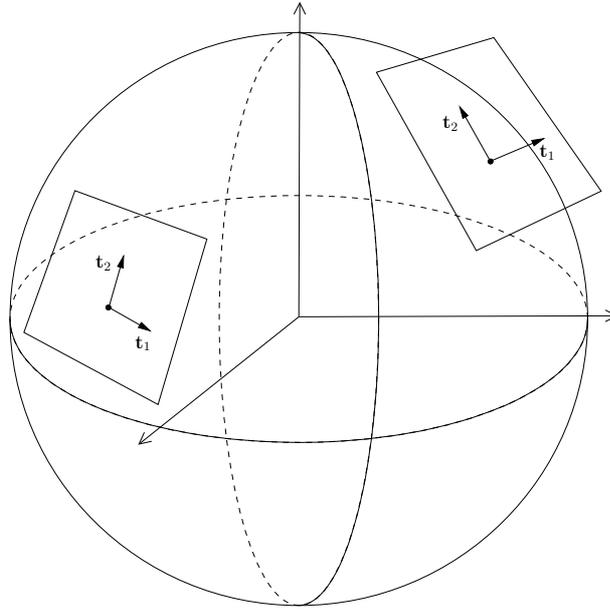


Abbildung 6.1: Das orthonormale Basisfeld $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$.

mit $\tilde{f}^1 = \sin \theta f^\varphi$ und $\tilde{f}^2 = -f^\theta$ geschrieben werden. Wir lesen aus Gleichung (6.1.2), dass

$$\operatorname{div}_g \mathbf{f} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{f}^2 \sin \theta) \right). \quad (6.2.3)$$

Mit $u = u(t, \varphi, \theta)$ wird die Erhaltungsgleichung (6.1.3) zu

$$\partial_t (u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{f}^1(u, \varphi, \theta)) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{f}^2(u, \varphi, \theta) \sin \theta) = 0. \quad (6.2.4)$$

6.2.3 Das dreidimensionale Vektorfeld Φ

Um Flüsse zu konstruieren, die divergenzfrei sind, und um die $\operatorname{TV}_{\mathbf{x}}$ -Abschätzung auf der Sphäre genauer zu untersuchen (vgl. Kapitel 7), werden die folgenden zwei Lemmata hilfreich sein. Das erste der beiden Lemmata ist neu, wogegen das zweite in [ABAL05, Seite 12] zu finden ist.

Lemma 6.2.1. *Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^2)$ für jedes $\bar{u} \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Umgebung $T \subseteq \mathbb{R}^3$ von \mathbb{S}^2 und ein dreidimensionales Vektorfeld $\Phi = \Phi(\bar{u}, \cdot) \in \mathcal{T}(T)$, so dass*

$$\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2. \quad (6.2.5)$$

Beweis: Wir definieren $T := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 1/2 < \|\mathbf{x}\|_2 < 3/2\}$ als Umgebung von \mathbb{S}^2 . Für $\mathbf{x} \in T$ ist $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2 \in \mathbb{S}^2$ und wir definieren für $\bar{u} \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) := -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \times \mathbf{f}\left(\bar{u}, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}\right). \quad (6.2.6)$$

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ ist $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ und mit der Graßmann-Identität sehen wir, dass in diesem Fall

$$\mathbf{x} \times \Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x})) = -\mathbf{x} \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}))}_{=0} + \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}_{=1} = \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}).$$

Da die Projektion $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ von T auf die Sphäre glatt ist, ist auch $\Phi(\bar{u}, \cdot)$ glatt. □

Lemma 6.2.2. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von \mathbb{S}^2 und für jedes $\bar{u} \in \mathbb{R}$ sei $\Phi = \Phi(\bar{u}, \cdot) \in \mathcal{T}(T)$ ein Vektorfeld, so dass (6.2.5) erfüllt ist. Dann kann die Divergenz des zugehörigen Flusses \mathbf{f} für $\bar{u} \in \mathbb{R}$ als

$$\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)) = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}_P(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}_P(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (6.2.7)$$

geschrieben werden und die Erhaltungsgleichung (6.2.4) wird zu

$$\partial_t(u \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Phi(u, \mathbf{x}_P(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi(u, \mathbf{x}_P(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (6.2.8)$$

Beweis: Man kann leicht nachrechnen, dass die Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ positiv orientiert ist, das heißt

$$\mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1. \quad (6.2.9)$$

Die Tangentialkomponenten von $\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}_P(\varphi, \theta))$ berechnen sich zu

$$\tilde{\Phi}^i(\bar{u}, \mathbf{x}_P(\theta, \varphi)) = \Phi(\bar{u}, \mathbf{x}_P(\theta, \varphi)) \cdot \mathbf{t}_i(\varphi, \theta), \quad i = 1, 2 \quad (6.2.10)$$

und deshalb ist

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \times \Phi = \mathbf{n} \times (\tilde{\Phi}^1 \cdot \mathbf{t}_1 + \tilde{\Phi}^2 \cdot \mathbf{t}_2) = \tilde{\Phi}^1 \cdot \mathbf{t}_2 - \tilde{\Phi}^2 \cdot \mathbf{t}_1$$

und folglich

$$\tilde{f}^1 = -\tilde{\Phi}^2 \quad \text{und} \quad \tilde{f}^2 = \tilde{\Phi}^1.$$

Andererseits folgt aus (6.2.1) und (6.2.10), dass

$$\tilde{\Phi}^1 = \frac{1}{\sin \theta} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{\Phi}^2 = - \left(\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right)$$

und somit insgesamt für die Komponenten von \mathbf{f} in der Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$

$$\tilde{f}^1 = \left(\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{f}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right)$$

und mit (6.2.2) äquivalent dazu in sphärischen Koordinaten

$$f^\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) \quad \text{und} \quad f^\theta = - \frac{1}{\sin \theta} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right).$$

Mit (6.2.3) und (6.2.4) folgt nun die Behauptung. \square

6.3 Konstruktion divergenzfreier Flüsse

Wir wollen uns in diesem Kapitel damit beschäftigen, wie wir Flüsse \mathbf{f} auf der Sphäre \mathbb{S}^2 konstruieren können, die divergenzfrei sind, das heißt die die Identität

$$\operatorname{div}_g \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{S}^2$$

für $\bar{u} \in \mathbb{R}$ erfüllen. Diese Eigenschaft ist von besonderer Bedeutung für die Wohlgestelltheitstheorie mittels der Methode der verschwindenden Viskosität (vgl. Kapitel 4). Man beachte, dass sie gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass konstante Anfangswerte (triviale) Lösungen der Erhaltungsgleichung (3.1.1) sind. Den Ideen aus [BAFL09] folgend, präsentieren wir an dieser Stelle zwei Methoden, divergenzfreie Flüsse zu konstruieren. Wir werden uns im darauf folgenden Abschnitt dieser Methoden bedienen, um ein Beispielproblem zu konstruieren, das zu einer eindimensionalen Differentialgleichung entkoppelt und somit für numerische Experimente besonders geeignet sein wird.

6.3.1 Homogene Flüsse

Das folgende Lemma ermöglicht uns, aus einem in einer Umgebung von \mathbb{S}^2 konstanten dreidimensionalen Vektorfeld Φ gemäß (6.2.5) einen divergenzfreien Fluss $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x})$ zu konstruieren. Zu finden ist das Lemma in [BAFL09, Seite 6], jedoch möchten wir einen etwas kürzeren, eigenen Beweis präsentieren.

Lemma 6.3.1 (Homogene Flüsse). *Sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von \mathbb{S}^2 und sei $\Phi(\bar{u}, \cdot) = \Phi(\bar{u}) \in \mathcal{T}(T)$ für $\bar{u} \in \mathbb{R}$ ein dreidimensionales Vektorfeld, das nicht vom Ort abhängt. Dann ist der zugehörige Fluss $\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) := \mathbf{x} \times \Phi(\bar{u}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$ divergenzfrei.*

Beweis: Unter Ausnutzung von (6.2.7) sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_g(\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Phi(\bar{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi(\bar{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right) \\ &= \Phi(\bar{u}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \varphi \partial \theta} - \Phi(\bar{u}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \theta \partial \varphi} = 0.\end{aligned}$$

□

6.3.2 Gradientenflüsse

Im nächsten Lemma, das aus [BAFL09, Seite 6] stammt, wird gezeigt, wie man mittels skalarer Potentialfunktionen divergenzfreie Flüsse konstruieren kann.

Lemma 6.3.2 (Gradientenflüsse). *Sei $h = h(\bar{u}, \mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R} \times T)$, wobei T eine Umgebung von \mathbb{S}^2 ist. Der dreidimensionale Fluss Φ sei definiert durch*

$$\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) := \nabla h(\bar{u}, \mathbf{x}) \quad \text{für } (\bar{u}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times T, \quad (6.3.1)$$

wobei ∇ der klassische Gradient bezüglich \mathbf{x} ist. Dann ist der zugehörige Fluss \mathbf{f} auf der Sphäre \mathbb{S}^2 , $\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) := \mathbf{x} \times \Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$, divergenzfrei.

Beweis: Wir benutzen den Satz von Gauß (Satz 2.12.10) in einem beliebigen Gebiet $D \subseteq \mathbb{S}^2$ mit glattem Rand ∂D für $\bar{u} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x})) \, dv_g &= \int_{\partial D} \langle \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x}) \rangle_g \, dv_{\partial D} \\ &= \int_{\partial D} \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, dv_{\partial D} \\ &= \int_{\partial D} (\mathbf{x} \times \nabla h(\bar{u}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, dv_{\partial D},\end{aligned}$$

wobei dv_g das Oberflächenmaß auf \mathbb{S}^2 , $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ die äußere Normale entlang $\partial D \subseteq \mathbb{S}^2$ an der Stelle \mathbf{x} und $dv_{\partial D}$ das von (\mathbb{S}^2, g) auf ∂D induzierte Bogenlängenmaß ist. Man beachte, dass $\mathbf{t}(\mathbf{x}) := \mathbf{N}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}$ ein an ∂D tangentialer Einheitsvektor an der Stelle $\mathbf{x} \in \partial D$ ist und deshalb $(\mathbf{x} \times \nabla h(\bar{u}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \nabla h(\bar{u}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x})$ nichts anderes als die Richtungsableitung von h entlang ∂D ist. Da der Rand ∂D eine geschlossene Kurve darstellt, ist dann

$$\int_D \operatorname{div}_g(\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x})) \, dv_g = 0.$$

Dies gilt für jedes beliebige Gebiet D und deshalb können wir schlussfolgern, dass $\operatorname{div}_g \mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) = 0$ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$. □

6.4 Entkoppelndes Beispielproblem

Ziel dieses Abschnitts ist es, durch eine geeignete Wahl des Flusses \mathbf{f} ein Beispielproblem zu konstruieren, das in sphärischen Koordinaten die Struktur eines eindimensionalen euklidischen Problems mit periodischen Randbedingungen aufweist. Erhaltungsgleichungen im \mathbb{R}^1 sind sowohl in der Theorie als auch in der Numerik bereits intensiv erforscht worden. Wir können deshalb auf schon vorhandene und etablierte numerische Verfahren in 1-D (siehe z. B. [Krö97]) zurückgreifen, um durch Berechnungen in 1-D sehr präzise Approximationslösungen für die Gleichung auf der Sphäre \mathbb{S}^2 zu erhalten.

6.4.1 Entkopplung der Erhaltungsgleichung

Das folgende Lemma zeigt, dass die Erhaltungsgleichung (6.0.1) auf der Sphäre \mathbb{S}^2 unter einer bestimmten Wahl des Flusses \mathbf{f} zu einer Einparameterfamilie von unabhängigen eindimensionalen Erhaltungsgleichungen auf T^1 entkoppelt.

Lemma 6.4.1. *Sei die Potentialfunktion h definiert durch*

$$h : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\bar{u}, x, y, z) \mapsto -f(\bar{u})z,$$

wobei $T := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 1/2 < \|\mathbf{x}\|_2 < 3/2\}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist. Mit dem zugehörigen Fluss

$$\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) := \mathbf{x} \times \nabla h(\bar{u}, \mathbf{x})$$

wird die Erhaltungsgleichung (6.0.1) zu

$$\partial_t u(t, \varphi, \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} f(u(t, \varphi, \theta)) = 0 \text{ auf } T^1 \text{ für alle } \theta \in (0, \pi).$$

Beweis: Für den dreidimensionalen Fluss Φ (vgl. (6.3.1)) erhalten wir

$$\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) = \nabla h(\bar{u}, \mathbf{x}) = (0, 0, -f(\bar{u})).$$

Damit und mit (6.2.1) sehen wir, dass

$$\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = f(\bar{u}) \sin \theta \quad \text{und} \quad \Phi(\bar{u}, \mathbf{x}(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = 0. \quad (6.4.1)$$

Nach Einsetzen von (6.4.1) in (6.2.8) erhalten wir

$$\sin \theta \partial_t u + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(u)) = 0$$

bzw. nach Division durch $\sin \theta$ für $\theta \in (0, \pi)$

$$\partial_t u + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(u)) = 0.$$

□

6.4.2 Beispielproblem

Das folgende, für diese Arbeit entwickelte Korollar hilft uns dabei, Lösungen für Beispielprobleme zu konstruieren, indem es aufzeigt, dass das Anfangswertproblem in sphärischen Koordinaten die Struktur eines eindimensionalen euklidischen Problems mit periodischen Randbedingungen aufweist.

Korollar 6.4.2. *Angenommen die Funktion $\tilde{u} = \tilde{u}(\varphi, t)$ ist eine Lösung der Erhaltungsgleichung*

$$\partial_t \tilde{u}(\varphi, t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(\tilde{u}(\varphi, t))) = 0 \text{ auf } T^1 \times \mathbb{R}^+,$$

wobei $f(u) := \frac{1}{2}u^2$. Sei $\hat{u} = \hat{u}(\theta)$ eine beliebige Funktion auf $(0, \pi)$. Dann ist die Funktion $u = u(\varphi, \theta, t)$, definiert durch

$$u(\varphi, \theta, t) := \hat{u}(\theta) \tilde{u}(\varphi, \hat{u}(\theta)t),$$

eine Lösung von

$$\partial_t u(\varphi, \theta, t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(u(\varphi, \theta, t))) = 0 \text{ auf } T^1 \times (0, \pi) \times \mathbb{R}^+$$

und somit für die zugehörige Potentialfunktion h und den zugehörigen Fluss \mathbf{f} aus Lemma 6.4.1 auch eine Lösung von (6.0.1).

Beweis: Nach Definition berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_t u(\varphi, \theta, t) &= \hat{u}^2(\theta) \partial_t \tilde{u}(\varphi, \hat{u}(\theta)t) = \hat{u}^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{2} \tilde{u}^2(\varphi, \hat{u}(\theta)t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{2} (\hat{u}(\theta) \tilde{u}(\varphi, \hat{u}(\theta)t))^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{2} (u(\varphi, \theta, t))^2 \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} (f(u(\varphi, \theta, t))). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.4.3. *Der zu Lemma 6.4.1 gehörige Fluss \mathbf{f} berechnet sich an der Stelle $\mathbf{x} = (x, y, z) = \mathbf{x}(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ zu*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(u, \mathbf{x}) &= \mathbf{x} \times \nabla h(u, \mathbf{x}) = (-f(u)y, f(u)x, 0) = f(u) (-y, x, 0) \\ &= f(u) \sin \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = f(u) \partial_\varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

(vgl. (6.2.5)).

Kapitel 7

Die $TV_{\mathbf{X}}$ -Abschätzung auf der Sphäre \mathbb{S}^2

In der Einleitung des vorigen Kapitels haben wir erläutert, warum die 2-Sphäre ein besonders wichtiges Beispiel für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit darstellt. In diesem Kapitel wollen wir dort anknüpfen und untersuchen, unter welchen Bedingungen die Totalvariation $TV_{\mathbf{X}}(u)$ einer Lösung u von (6.0.1), der Erhaltungsgleichung auf der 2-Sphäre, entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^2)$ in der Zeit nicht anwächst. Aus Satz 5.4.1 wissen wir, dass $TV_{\mathbf{X}}(u)$ im zeitlichen Verlauf nicht ansteigt, falls der zugehörige Fluss \mathbf{f} divergenzfrei ist und

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0 \text{ für alle } \bar{u} \in \mathbb{R}. \quad (7.0.1)$$

Die Bedingung der Divergenzfreiheit auf der 2-Sphäre haben wir in Kapitel 6 schon untersucht und wollen uns in diesem Kapitel Bedingung (7.0.1) widmen. Wir schränken uns dabei auf den Fall von Gradientenflüssen (siehe Definition 7.2.1) ein, von denen wir aus Lemma 6.3.2 schon wissen, dass sie divergenzfrei sind.

7.1 Darstellung der Größen auf \mathbb{S}^2

Wir greifen auf die in Kapitel 6 bereitgestellte Darstellung von \mathbb{S}^2 durch sphärische Koordinaten und auf die Hilfsmittel zur Beschreibung von Funktionen und Vektorfeldern auf \mathbb{S}^2 zurück. Insbesondere wollen wir Vektoren aus $T\mathbb{S}^2$ wieder als Elemente des \mathbb{R}^3 auffassen und Funktionen und Vektorfelder auf \mathbb{S}^2 wieder als Funktionen und Vektorfelder in sphärischen Koordinaten $\varphi \in T^1$ und $\theta \in (0, \pi)$ schreiben, wobei T^1 wie in Abschnitt 6.1 definiert ist. Wir haben gezeigt (vgl. Lemma 6.2.1), dass es für einen beliebigen glatten Fluss $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ und ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^2)$

differenzierbare Abbildungen $\Phi : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\bar{u}, \varphi, \theta) &= \mathbf{n}(\varphi, \theta) \times \Phi(\bar{u}, \mathbf{n}(\varphi, \theta)), & \Phi \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{X}(\varphi, \theta) &= \mathbf{n}(\varphi, \theta) \times \Psi(\mathbf{n}(\varphi, \theta)), & \Psi \cdot \mathbf{n} &= 0, \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

wobei T eine Umgebung von \mathbb{S}^2 ist und

$$\mathbf{n}(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

7.2 Die Gradientenbedingung

Wir formulieren die folgende Definition und zitieren zwei Bemerkungen aus [ABAL05, Seite 13].

Definition 7.2.1. *Sei \mathbf{f} ein glatter Fluss und \mathbf{X} ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 . Wir sagen, dass \mathbf{f} und \mathbf{X} die Gradientenbedingung erfüllen, falls es eine Umgebung $T \subseteq \mathbb{R}^3$ von \mathbb{S}^2 und differenzierbare Abbildungen $\Phi : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, die (7.1.1) erfüllen, und Funktionen $a : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, die für festes $\bar{u} \in \mathbb{R}$ nur von $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| \in \mathbb{S}^2$ abhängen, das heißt $a(\bar{u}, \mathbf{x}) = a(\bar{u}, \mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ und $b(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ für $\mathbf{x} \in T$, und glatt auf T sind, so dass*

$$\Phi(\bar{u}, \mathbf{x}) = \nabla a(\bar{u}, \mathbf{x}/|\mathbf{x}|), \quad \Psi(\mathbf{x}) = \nabla b(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|), \quad \mathbf{x} \in T, \quad (7.2.1)$$

wobei ∇ der klassische Gradient bezüglich \mathbf{x} ist.

Bemerkung 7.2.2. *Ist die Gradientenbedingung für einen glatten Fluss \mathbf{f} und ein glattes Vektorfeld \mathbf{X} auf \mathbb{S}^2 erfüllt, so gilt, mit der Notation aus Definition 7.2.1,*

$$\Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ und } \Psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \mathbb{S}^2, \quad (7.2.2)$$

das heißt die Vektorfelder Φ und Ψ sind tangential an \mathbb{S}^2 .

Bemerkung 7.2.3. *Ist die Gradientenbedingung für einen glatten Fluss \mathbf{f} und ein glattes Vektorfeld \mathbf{X} auf \mathbb{S}^2 erfüllt, so folgt aus Lemma 6.3.2, dass der Fluss \mathbf{f} und das Vektorfeld \mathbf{X} divergenzfrei sind.*

7.3 Darstellung der Vektorfelder mittels Φ und Ψ

Für den Rest des Kapitels sei $\bar{u} \in \mathbb{R}$ fest und wir schreiben \bar{u} in unseren Rechnungen im Folgenden nicht aus, um die Notation zu verkürzen.

Die Überlegungen in diesem Abschnitt entstammen [ABAL05, Seite 14]. Wie schon in Abschnitt 6.2 wollen wir Vektoren aus $T\mathbb{S}^2$ in der Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, die in (6.2.1)

definiert ist, darstellen. Im Beweis von Lemma 6.2.2 haben wir gesehen, dass wir die Komponenten $(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2)$ von \mathbf{f} in der Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ an der Stelle $\mathbf{x}_P(\varphi, \theta)$ darstellen können als

$$\tilde{f}^1 = \Phi \cdot \mathbf{n}_\theta, \quad \tilde{f}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \Phi \cdot \mathbf{n}_\varphi, \quad (7.3.1)$$

wobei untere Indizes partielle Ableitungen kennzeichnen. Für die Komponenten (f^φ, f^θ) von \mathbf{f} in der Koordinatenbasis $(\partial_\varphi, \partial_\theta) = (\mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_\theta)$ erhielten wir

$$f^\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \Phi \cdot \mathbf{n}_\theta, \quad f^\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \Phi \cdot \mathbf{n}_\varphi.$$

Analoge Überlegungen für \mathbf{X} ergeben

$$\tilde{X}^1 = \Psi \cdot \mathbf{n}_\theta, \quad \tilde{X}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi, \quad (7.3.2)$$

und

$$X^\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \Psi \cdot \mathbf{n}_\theta, \quad X^\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi.$$

Das folgende Lemma bringt \mathbf{n} mit seinen partiellen Ableitungen in Beziehung.

Lemma 7.3.1. *Mit den bisherigen Notationen gelten die folgenden Identitäten.*

$$\mathbf{n}_{\varphi\varphi} = -\sin^2 \theta \mathbf{n} - \sin \theta \cos \theta \mathbf{n}_\theta, \quad (7.3.3)$$

$$\mathbf{n}_{\varphi\theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{n}_\varphi, \quad (7.3.4)$$

$$\mathbf{n}_{\theta\theta} = -\mathbf{n}. \quad (7.3.5)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\varphi, \theta) &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{n}_\varphi(\varphi, \theta) &= \sin \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{n}_\theta(\varphi, \theta) &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{n}_{\varphi\varphi}(\varphi, \theta) &= -\sin \theta (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{n}_{\varphi\theta}(\varphi, \theta) &= \cos \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{n}_\varphi(\varphi, \theta), \\ \mathbf{n}_{\theta\theta}(\varphi, \theta) &= (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta) = -\mathbf{n}(\varphi, \theta). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & -\sin^2 \theta \mathbf{n}(\varphi, \theta) - \sin \theta \cos \theta \mathbf{n}_\theta(\varphi, \theta) \\ &= -\sin^2 \theta (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ &= -\sin \theta (\cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta), \sin \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta), 0) \\ &= \mathbf{n}_{\varphi\varphi}(\varphi, \theta). \end{aligned}$$

□

7.4 Die Bedingung $\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f} = 0$ ausgedrückt durch Φ und Ψ

Das folgende Lemma ([ABAL05, Lemma 4.3]) drückt Bedingung (7.0.1) mit den Vektorfeldern Φ und Ψ aus.

Lemma 7.4.1. *Sei \mathbf{f} ein glatter Fluss und X ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 und seien die differenzierbaren Abbildungen $\Phi : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart, dass (7.1.1) erfüllt ist. Dann ist Bedingung (7.0.1) äquivalent dazu, dass das folgende System von Differentialgleichungen erfüllt ist.*

$$\begin{aligned} (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta)(\Psi_\varphi \cdot \mathbf{n}_\theta) - (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi)(\Psi_\theta \cdot \mathbf{n}_\theta) &= -(\Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi)((\Phi_{u\theta} \cdot \mathbf{n}_\theta) - (\Phi_u \cdot \mathbf{n})) \\ &\quad - (\Psi \cdot \mathbf{n})(\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) + (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta)(\Phi_{u\varphi} \cdot \mathbf{n}_\theta), \\ (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta)(\Psi_\varphi \cdot \mathbf{n}_\varphi) - (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi)(\Psi_\theta \cdot \mathbf{n}_\varphi) &= (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta)((\Phi_{u\varphi} \cdot \mathbf{n}_\varphi) - \sin^2 \theta (\Phi_u \cdot \mathbf{n})) \\ &\quad + \sin^2 \theta (\Psi \cdot \mathbf{n})(\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta) - (\Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi)(\Phi_{u\theta} \cdot \mathbf{n}_\varphi). \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Beweis: Wir schreiben die φ -Komponente $(\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f})^\varphi$ von $\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f}$ aus. Dann hat Bedingung (7.0.1) auf dieser Komponente die Form

$$0 = (\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f})^\varphi = (X^\varphi \partial_\varphi + X^\theta \partial_\theta)(f_u^\varphi) - (f_u^\varphi \partial_\varphi + f_u^\theta \partial_\theta)(X^\varphi),$$

was mit den Abbildungen Φ und Ψ nach Multiplikation mit $\sin \theta$ geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta) \partial_\varphi (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta) - (\Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi) \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta \right) \\ - \frac{1}{\sin \theta} (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta) \partial_\varphi (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta) + (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \Psi \cdot \mathbf{n}_\theta \right) = 0. \end{aligned}$$

Ausdifferenzieren und Multiplizieren mit $\sin \theta$ führt zu

$$\begin{aligned} (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta) (\Phi_{u\varphi} \cdot \mathbf{n}_\theta) + (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta) (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_{\theta\varphi}) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi) (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta) \\ - (\Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi) (\Phi_{u\theta} \cdot \mathbf{n}_\theta) - (\Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi) (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_{\theta\theta}) - (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta) (\Psi_\varphi \cdot \mathbf{n}_\theta) \\ - (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\theta) (\Psi \cdot \mathbf{n}_{\theta\varphi}) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) (\Psi \cdot \mathbf{n}_\theta) \\ + (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) (\Psi_\theta \cdot \mathbf{n}_\theta) + (\Phi_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) (\Psi \cdot \mathbf{n}_{\theta\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Mit (7.3.4) sehen wir, dass sowohl der dritte und der siebte Term als auch der zweite und der achte Term sich jeweils zu Null addieren. Anwenden von (7.3.5) und

Umsortieren ergibt die erste behauptete Gleichung.

Die zweite Gleichung erhält man analog, indem man die θ -Komponente von $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f}$,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f})^\theta = (X^\varphi\partial_\varphi + X^\theta\partial_\theta)(f_u^\theta) - (f_u^\varphi\partial_\varphi + f_u^\theta\partial_\theta)(X^\theta),$$

mit den Abbildungen Φ und Ψ schreibt und Lemma 7.3.1 anwendet. \square

7.5 Die äquivalente Bedingung für $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f} = 0$

Der folgende Satz ([ABAL05, Theorem 4.2]) gibt unter gewissen Annahmen eine äquivalente Bedingung für $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f} = 0$ an.

Satz 7.5.1. *Seien \mathbf{f} ein glatter Fluss und \mathbf{X} ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 , die die Gradientenbedingung aus Definition 7.2.1 erfüllen. Dann ist Bedingung (7.0.1) äquivalent dazu, dass es eine Funktion $C : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) = 0$ und*

$$\partial_u\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = C(\bar{u}, \cdot)\mathbf{X} \quad \text{für alle } \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Zuerst beweisen wir die einfachere Rück-Richtung. Dazu nehmen wir an, dass eine Funktion $C : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) = 0$ und $\partial_u\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = C(\bar{u}, \cdot)\mathbf{X}$. In beliebigen lokalen Koordinaten gilt dann für die i -te Komponente

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)]^i &= \mathbf{X}(f_u^i(\bar{u}, \cdot)) - \partial_u\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)(X^i) = \mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)X^i) - C(\bar{u}, \cdot)\mathbf{X}(X^i) \\ &= \mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot))X^i + C(\bar{u}, \cdot)\mathbf{X}(X^i) - C(\bar{u}, \cdot)\mathbf{X}(X^i) = 0. \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

Zum Beweis der Hin-Richtung nehmen wir an, dass $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\partial_u\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0$ und bezeichnen mit $\Phi : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $a : \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ die differenzierbaren Abbildungen und Funktionen aus Definition 7.2.1, die zu \mathbf{f} und \mathbf{X} gehören. Wir wollen zuerst zeigen, dass in sphärischen Koordinaten für $i = \varphi, \theta$ gilt, dass

$$a_i = \Phi \cdot \mathbf{n}_i, \quad b_i = \Psi \cdot \mathbf{n}_i,$$

wobei hier $a_i(\bar{u}, \varphi, \theta) := \partial_i(a(\bar{u}, \mathbf{n}(\varphi, \theta)))$ und $b_i(\varphi, \theta) := \partial_i(b(\mathbf{n}(\varphi, \theta)))$. Für b_i folgt nach Kettenregel und (7.2.1)

$$b_i(\varphi, \theta) = \partial_i(b(\mathbf{n}(\varphi, \theta))) = \nabla b(\mathbf{n}(\varphi, \theta)) \cdot \mathbf{n}_i(\varphi, \theta) = \Psi(\mathbf{n}(\varphi, \theta)) \cdot \mathbf{n}_i(\varphi, \theta),$$

wobei ∇ den klassischen Gradienten bezeichnet. Analog berechnet man a_i .

Wir können das System (7.4.1) mit den Funktionen a und b schreiben und erhalten nach Ausnutzung von (7.2.2) dafür

$$\begin{aligned} a_{u\theta}(\partial_\varphi\nabla b \cdot \mathbf{n}_\theta) - a_{u\varphi}(\partial_\theta\nabla b \cdot \mathbf{n}_\theta) &= -b_\varphi(\partial_\theta\nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta) + b_\theta(\partial_\varphi\nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta), \\ a_{u\theta}(\partial_\varphi\nabla b \cdot \mathbf{n}_\varphi) - a_{u\varphi}(\partial_\theta\nabla b \cdot \mathbf{n}_\varphi) &= b_\theta(\partial_\varphi\nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) - b_\varphi(\partial_\theta\nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi). \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Mit den Identitäten aus Lemma 7.3.1 finden wir

$$\begin{aligned}
a_{u\theta\theta} &= \partial_\theta(\nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta) = \partial_\theta \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta - \nabla a_u \cdot \mathbf{n} = \partial_\theta \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta, \\
a_{u\varphi\varphi} &= \partial_\varphi(\nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi) = \partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi + \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_{\varphi\varphi} = \partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi - \sin \theta \cos \theta a_{u\theta}, \\
a_{u\theta\varphi} &= \partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta + \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_{\theta\varphi} = \partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi \\
&= \partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} a_{u\varphi}, \\
a_{u\varphi\theta} &= \dots = \partial_\theta \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} a_{u\varphi},
\end{aligned}$$

so dass also

$$\begin{aligned}
\partial_\theta \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta &= a_{u\theta\theta}, \\
\partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi &= a_{u\varphi\varphi} + \sin \theta \cos \theta a_{u\theta}, \\
\partial_\varphi \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\theta &= a_{u\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} a_{u\varphi} = \partial_\theta \nabla a_u \cdot \mathbf{n}_\varphi.
\end{aligned}$$

Analog gilt für b

$$\begin{aligned}
\partial_\theta \nabla b \cdot \mathbf{n}_\theta &= b_{\theta\theta}, \\
\partial_\varphi \nabla b \cdot \mathbf{n}_\varphi &= b_{\varphi\varphi} + \sin \theta \cos \theta b_\theta, \\
\partial_\varphi \nabla b \cdot \mathbf{n}_\theta &= b_{\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b_\varphi = \partial_\theta \nabla b \cdot \mathbf{n}_\varphi,
\end{aligned}$$

deshalb wird das Gleichungssystem (7.5.2) zu

$$\begin{aligned}
a_{u\theta} \left(b_{\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b_\varphi \right) - a_{u\varphi} b_{\theta\theta} &= -b_\varphi a_{u\theta\theta} + b_\theta \left(a_{u\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} a_{u\varphi} \right), \\
a_{u\theta} (b_{\varphi\varphi} + \sin \theta \cos \theta b_\theta) - a_{u\varphi} \left(b_{\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} b_\varphi \right) &= b_\theta (a_{u\varphi\varphi} + \sin \theta \cos \theta a_{u\theta}) \\
&\quad - b_\varphi \left(a_{u\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} a_{u\varphi} \right)
\end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
b_\varphi a_{u\theta\theta} + b_{\varphi\theta} a_{u\theta} - a_{u\varphi} b_{\theta\theta} - b_\theta a_{u\varphi\theta} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (a_{u\theta} b_\varphi - b_\theta a_{u\varphi}), \\
a_{u\theta} b_{\varphi\varphi} + b_\varphi a_{u\theta\varphi} - b_\theta a_{u\varphi\varphi} - a_{u\varphi} b_{\varphi\theta} &= 0.
\end{aligned}$$

Mit der Produktregel sehen wir die Äquivalenz des Systems zu

$$\begin{aligned}
(a_{u\theta} b_\varphi - b_\theta a_{u\varphi})_\theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (a_{u\theta} b_\varphi - b_\theta a_{u\varphi}), \\
(a_{u\theta} b_\varphi - b_\theta a_{u\varphi})_\varphi &= 0.
\end{aligned} \tag{7.5.3}$$

Das System (7.5.3) ist also äquivalent dazu, dass die Funktion $h := a_{u\theta}b_\varphi - b_\theta a_{u\varphi}$ nicht von φ abhängt und die Differentialgleichung

$$h_\theta(\bar{u}, \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} h(\bar{u}, \theta) \quad \text{auf } (0, \pi) \quad (7.5.4)$$

erfüllt. Mit [Wal93, Seite 24] stellen wir fest, dass die allgemeine Lösung von (7.5.4) auf dem Intervall $(0, \pi)$ die Form

$$h(\bar{u}, \theta; C) = C(\bar{u}) \exp(G(\theta))$$

mit

$$G(\theta) = \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{\theta} = \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} (\log \sin \bar{\theta}) d\bar{\theta} = \log \sin \theta$$

hat, wobei $C = C(\bar{u})$ eine Konstante ist, die nur von \bar{u} abhängt. Also gilt

$$a_{u\theta}b_\varphi - b_\theta a_{u\varphi} = \sin \theta C. \quad (7.5.5)$$

In den Komponenten $(\tilde{f}_u^1, \tilde{f}_u^2, \tilde{f}_u^3)$ von $\partial_u\mathbf{f}$ und $(\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \tilde{X}^3)$ von \mathbf{X} hat Gleichung (7.5.5) die folgende Gestalt:

$$-\tilde{f}_u^2 \tilde{X}^1 + \tilde{f}_u^1 \tilde{X}^2 = C,$$

denn mit (7.3.1) und (7.3.2) sehen wir, dass

$$\tilde{f}^1 = \Phi \cdot \mathbf{n}_\theta = a_\theta, \quad \tilde{f}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \Phi \cdot \mathbf{n}_\varphi = \frac{a_\varphi}{\sin \theta},$$

und

$$\tilde{X}^1 = \Psi \cdot \mathbf{n}_\theta = b_\theta, \quad \tilde{X}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \Psi \cdot \mathbf{n}_\varphi = \frac{b_\varphi}{\sin \theta}.$$

Dabei ist $-\tilde{f}_u^2 \tilde{X}^1 + \tilde{f}_u^1 \tilde{X}^2$ genau die dritte Komponente des Kreuzproduktes von $\partial_u\mathbf{f}$ und \mathbf{X} in der Basis $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$, das heißt

$$[\widetilde{\partial_u\mathbf{f} \times \mathbf{X}}]^3 = -\tilde{f}_u^2 \tilde{X}^1 + \tilde{f}_u^1 \tilde{X}^2 = C. \quad (7.5.6)$$

Da sowohl \mathbf{X} als auch $\partial_u\mathbf{f}$ tangential an der Sphäre sind, ist ihr Kreuzprodukt entweder senkrecht zur Sphäre oder gleich 0. In jedem Fall ist (7.5.6) äquivalent dazu, dass es eine Konstante $C = C(\bar{u})$ gibt, so dass

$$\partial_u\mathbf{f} \times \mathbf{X} = C(\bar{u})\mathbf{n}, \quad (7.5.7)$$

Da \mathbf{X} global glatt ist, muss es nach dem Satz vom gekämmten Igel (Satz 2.5.4) an mindestens einer Stelle verschwinden, woraus folgt, dass $C = 0$ ist und somit $\partial_u \mathbf{f}$ und \mathbf{X} auf ganz \mathbb{S}^2 kollinear sind, das heißt es existiert eine Funktion $C = C(\bar{u}, x)$, so dass $\partial_u \mathbf{f} = C\mathbf{X}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$. Um zu zeigen, dass $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) = 0$ ist, erinnern wir uns an die Rechnung aus (7.5.1), aus der dann folgt, dass in beliebigen lokalen Koordinaten für eine beliebige Komponente von $[\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)]$

$$0 = [\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)]^i = \mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) X^i.$$

An einer beliebigen Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ ist also entweder $X^i(\mathbf{x}) = 0$ für alle i , woraus $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$ und $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \mathbf{x})) = 0$ folgt oder, falls es ein i gibt mit $X^i(\mathbf{x}) \neq 0$, dann folgt auch $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \mathbf{x})) = 0$. Also ist $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) = 0$ auf ganz \mathbb{S}^2 . \square

Das folgende, neue Korollar gibt an, dass, falls eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 7.5.1 erfüllt ist, eine Lösung u der Erhaltungsgleichung (6.0.1) auch eine Lösung von eindimensionalen Erhaltungsgleichungen entlang der Integralkurven von \mathbf{X} ist.

Korollar 7.5.2. *Seien \mathbf{f} ein glatter Fluss und \mathbf{X} ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 , die die Gradientenbedingung aus Definition 7.2.1 erfüllen. Seien die beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 7.5.1 erfüllt, das heißt es gibt eine Funktion $C : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) = 0$ und $\partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = C(\bar{u}, \cdot)\mathbf{X}$ auf \mathbb{S}^2 für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$ und es ist, äquivalent dazu, $[\mathcal{L}_X \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)] = 0$ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$. Dann sind die Voraussetzungen von Proposition 5.1.1 erfüllt und eine Lösung u der Erhaltungsgleichung (6.0.1) löst demnach eindimensionale Erhaltungsgleichungen entlang der Integralkurven von \mathbf{X} .*

Beweis: Um das Korollar zu beweisen, weisen wir die Voraussetzungen von Proposition 5.1.1 nach: Der Fluss \mathbf{f} kann als

$$\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) = \underbrace{\int_0^{\bar{u}} C(\hat{u}, \mathbf{x}) d\hat{u}}_{=: \tilde{C}(\bar{u}, \mathbf{x})} \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(0, \mathbf{x})$$

geschrieben werden. Da \mathbf{f} divergenzfrei ist (siehe Bemerkung 7.2.3), gilt folglich

$$\begin{aligned} 0 &= (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(\bar{u}, \mathbf{x}) \\ &= \operatorname{div}_g \left(\tilde{C}(\bar{u}, \mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) \right) + \underbrace{\operatorname{div}_g \mathbf{f}(0, \mathbf{x})}_{=0} \\ &= \left\langle \nabla_g \tilde{C}(\bar{u}, \mathbf{x}), \mathbf{X}(\mathbf{x}) \right\rangle_g + \underbrace{\tilde{C}(\bar{u}, \mathbf{x}) \operatorname{div}_g \mathbf{X}(\mathbf{x})}_{=0} \\ &= \mathbf{X} \left(\tilde{C}(\bar{u}, \cdot) \right) (\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Es ist nach Definition und Voraussetzung

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \left(\tilde{C}(\bar{u}, \cdot) \right) (x) &= \mathbf{X} \left(\int_0^{\bar{u}} C(\hat{u}, \cdot) d\hat{u} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \int_0^{\bar{u}} \underbrace{\mathbf{X} (C(\hat{u}, \cdot)) (x)}_{=0} d\hat{u} = 0 \end{aligned}$$

und deshalb gilt $\tilde{C}(\bar{u}, x) \operatorname{div}_g \mathbf{X}(x) = 0$. Da auch $\operatorname{div}_g \mathbf{f}(0, x) = 0$ ist, sind die Voraussetzungen von Proposition 5.1.1 erfüllt und u löst demnach eindimensionale Erhaltungsgleichungen entlang der Integralkurven von \mathbf{X} . \square

Kapitel 8

Das Finite Volumen Verfahren

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung und dem Konvergenzbeweis eines Finite Volumen Verfahrens zur Berechnung von Näherungslösungen der Entropielösung des Anfangswertproblems (3.1.1) und (3.1.2). Wir orientieren uns dabei an der Arbeit von Amorim [ABAL05]. Nach der Definition des numerischen Verfahrens in Abschnitt 8.1 zeigen wir in Abschnitt 8.2 einige interessante Eigenschaften der diskreten Lösung, die schließlich zum Beweis der Konvergenz des Verfahrens in Abschnitt 8.3 benötigt werden.

8.1 Definition des Verfahrens

In diesem Abschnitt wollen wir das Finite Volumen Verfahren für Erhaltungsgleichungen auf einer d -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) ohne Rand definieren. Es basiert auf monotonen numerischen Flussfunktionen. Wir konstruieren Näherungslösungen der Entropielösung vom Anfangswertproblem (3.1.1) und (3.1.2), wobei wir $u_0 \in L^\infty(M)$ voraussetzen. Zum Beweis der Konvergenz ist Divergenzfreiheit als Annahme an den Fluss \mathbf{f} nicht notwendig; es reicht, wenn wir im Folgenden voraussetzen, dass \mathbf{f} die Wachstumsbedingung

$$|\operatorname{div}_g \mathbf{f}(\bar{u}, x)| \leq C_1 + C_2 |\bar{u}| \text{ für alle } (\bar{u}, x) \in \mathbb{R} \times M \quad (8.1.1)$$

erfüllt, wobei $C_1, C_2 > 0$ Konstanten sind.

8.1.1 Triangulierung und numerischer Fluss

Das Finite Volumen Verfahren basiert auf einer Zerlegung von M in gekrümmte Polyeder. Diese definieren wir wie folgt.

Definition 8.1.1 (gekrümmte Polyeder). Ein gekrümmtes Polyeder einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^d, g) ohne Rand ist eine zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge $K \subset M$, deren Rand ∂M die Vereinigung von endlich vielen $(d - 1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M , Kanten von K genannt, ist, so dass der Schnitt zweier Kanten e_1 und e_2 entweder leer oder eine höchstens $(d - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M ist.

Definition 8.1.2 (Triangulierung). Eine Triangulierung \mathcal{T}^h einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^d, g) ohne Rand ist eine Menge von gekrümmten Polyedern $K \subset M$, so dass $M = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^h} \bar{K}$ gilt. Des Weiteren benutzen wir die folgenden Notationen und Annahmen an \mathcal{T}^h (vgl. Abbildung 8.1):

1. Für zwei verschiedene Elemente $K_1, K_2 \in \mathcal{T}^h$ ist $K_1 \cap K_2$ entweder leer, eine gemeinsame Kante von K_1 und K_2 oder eine höchstens $(d - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M .
2. ∂K bezeichnet die Menge der Kanten e von $K \in \mathcal{T}^h$.
3. Mit K_e bezeichnen wir das eindeutige Polyeder, das die Kante e mit $K \in \mathcal{T}^h$ teilt.
4. \mathbf{n}_K bezeichnet das äußere Normalenfeld entlang ∂K für $K \in \mathcal{T}^h$ und mit $\mathbf{n}_{e,K}$ bezeichnen wir das äußere Normalenfeld entlang $e \in \partial K$ für $K \in \mathcal{T}^h$. Es ist $\mathbf{n}_{e,K}(x) \in T_x M$ für $x \in e$.
5. Für das d - bzw. $(d - 1)$ -dimensionale $d\text{vol}_g$ -Maß von $K \in \mathcal{T}^h$ bzw. $e \in \partial K$ schreiben wir $|K|$ bzw. $|e|$.
6. $p_K := \sum_{e \in \partial K} |e|$ ist das Maß vom Rand ∂K von $K \in \mathcal{T}^h$.
7. Für eine Untermannigfaltigkeit N von (M, g) ist dv_N das Volumenelement auf N , das durch g induziert wird. Wir schreiben für das Volumenelement dv_g auf M auch dv_M .
8. Der Diskretisierungsparameter h ist definiert durch

$$h := \sup_{\substack{x, y \in K \\ K \in \mathcal{T}^h}} d_g(x, y), \quad (8.1.2)$$

wobei $d_g(\cdot, \cdot)$ die von g induzierte Abstandsfunktion auf M ist. Er weist darauf hin, dass für $h \rightarrow 0$ Konvergenz gegen die Lösung des gegebenen Problems erreicht werden soll.

9. Die Zeitschrittweite nennen wir $\tau = \tau(h)$ und setzen $t_n := \tau n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Weiter nehmen wir an, dass

$$\tau \rightarrow 0, \quad \frac{h^2}{\tau} \rightarrow 0, \quad (8.1.3)$$

falls $h \rightarrow 0$.

10. Für ein beliebiges glattes Vektorfeld $\mathbf{F} \in \mathcal{T}(M)$ gibt es eine Konstante $C = C(\mathbf{F})$, so dass

$$\sup_{\substack{x, y \in e \\ e \in \partial K \\ K \in \mathcal{T}^h}} |\langle \mathbf{F}(x), \mathbf{n}_{e,K}(x) \rangle_g - \langle \mathbf{F}(y), \mathbf{n}_{e,K}(y) \rangle_g| \leq C(\mathbf{F})h. \quad (8.1.4)$$

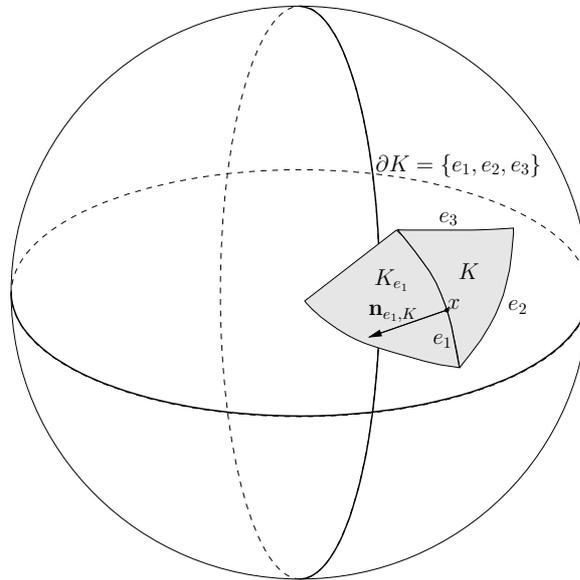


Abbildung 8.1: Triangulierung.

Analog zum euklidischen Fall führen wir numerische Flussfunktionen ein, die den Fluss der gesuchten Größe über die Kanten der Elemente der Triangulierung approximieren sollen.

Definition 8.1.3 (Numerischer Fluss, [ABAL05]). Sei \mathcal{T}^h eine Triangulierung einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^d, g) ohne Rand und \mathbf{f} ein Fluss wie in Abschnitt 3.1. Eine Familie von numerischen Flussfunktionen zu \mathcal{T}^h ist eine Familie von lokal lipschitzstetigen C^2 -Funktionen $f_{e,K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $K \in \mathcal{T}^h$ und $e \in \partial K$. Weiter definieren wir folgende Eigenschaften.

1. $\{f_{e,K}\}_{K \in \mathcal{T}^h, e \in \partial K}$ heißt **konsistent mit \mathbf{f}** , falls

$$f_{e,K}(u, u) = \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e, \quad (8.1.5)$$

für alle $K \in \mathcal{T}^h$, $e \in \partial K$ und $u \in \mathbb{R}$.

2. $\{f_{e,K}\}_{K \in \mathcal{T}^h, e \in \partial K}$ heißt **erhaltend**, falls

$$f_{e,K}(u, v) = -f_{e,K_e}(v, u) \quad (8.1.6)$$

für alle $K \in \mathcal{T}^h$, $e \in \partial K$ und $u, v \in \mathbb{R}$.

3. $\{f_{e,K}\}_{K \in \mathcal{T}^h, e \in \partial K}$ heißt **monoton**, falls

$$\frac{\partial}{\partial u} f_{e,K}(u, v) \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} f_{e,K}(u, v) \leq 0 \quad (8.1.7)$$

für alle $K \in \mathcal{T}^h$, $e \in \partial K$ und $u, v \in \mathbb{R}$.

Beispiel 8.1.4 (Engquist-Osher und Lax-Friedrichs-Verfahren). Mit den Notationen aus Definition 8.1.3 definieren wir für $K \in \mathcal{T}^h$ und $e \in \partial K$

$$\begin{aligned} c_{e,K}(u) &:= \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e, \\ c_{e,K}^+(u) &:= c_{e,K}(0) + \int_0^u \max\{c'_{e,K}(s), 0\} ds, \\ c_{e,K}^-(u) &:= \int_0^u \min\{c'_{e,K}(s), 0\} ds. \end{aligned}$$

Dann ist der Engquist-Osher-Fluss durch

$$f_{e,K}^{EO}(u, v) := c_{e,K}^+(u) + c_{e,K}^-(v)$$

gegeben. Ein Lax-Friedrichs-Fluss ist gegeben durch

$$f_{e,K}^{LF}(u, v) := \frac{1}{2} (c_{e,K}(u) + c_{e,K}(v)) - \frac{1}{2\lambda_e} (v - u),$$

mit $\lambda_e > 0$, so dass

$$\lambda_e \sup_{u \in \mathbb{R}} |c'_{e,K}(u)| \leq 1. \quad (8.1.8)$$

Wir zeigen, dass sowohl der Engquist-Osher- als auch der Lax-Friedrichs-Fluss die Eigenschaften (8.1.5)-(8.1.7) erfüllen. Dazu berechnen wir zunächst für den Engquist-Osher-Fluss

$$\begin{aligned} f_{e,K}^{EO}(u, u) &= c_{e,K}(0) + \int_0^u \max\{c'_{e,K}(s), 0\} + \min\{c'_{e,K}(s), 0\} ds \\ &= c_{e,K}(0) + \int_0^u c'_{e,K}(s) ds \\ &= c_{e,K}(u). \end{aligned}$$

Da $\mathbf{n}_{e,K}(x) = -\mathbf{n}_{e,K_e}(x)$ für alle $x \in e$ und deshalb auch $c_{e,K}(u) = -c_{e,K_e}(u)$, gilt

$$\begin{aligned} f_{e,K}^{EO}(u, v) &= c_{e,K}(0) + \int_0^u \max\{c'_{e,K}(s), 0\} ds + \int_0^v \min\{c'_{e,K}(s), 0\} ds \\ &= -c_{e,K_e}(0) + \int_0^u \max\{-c'_{e,K_e}(s), 0\} ds + \int_0^v \min\{-c'_{e,K_e}(s), 0\} ds \\ &= -c_{e,K_e}(0) - \int_0^u \min\{c'_{e,K_e}(s), 0\} ds - \int_0^v \max\{c'_{e,K_e}(s), 0\} ds \\ &= -f_{e,K_e}^{EO}(v, u) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u} f_{e,K}^{EO}(u, v) = \max\{c'_{e,K}(u), 0\} \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} f_{e,K}^{EO}(u, v) = \min\{c'_{e,K}(v), 0\} \leq 0.$$

Für den Lax-Friedrichs-Fluss berechnen wir

$$f_{e,K}^{LF}(u, u) = c_{e,K}(u),$$

$$\begin{aligned} f_{e,K}^{LF}(u, v) &= \frac{1}{2}(c_{e,K}(u) + c_{e,K}(v)) - \frac{1}{2\lambda_e}(v - u) \\ &= -\frac{1}{2}(c_{e,K_e}(u) + c_{e,K_e}(v)) + \frac{1}{2\lambda_e}(u - v) = -f_{e,K_e}^{LF}(v, u) \end{aligned}$$

und wegen (8.1.8) ist

$$\frac{\partial}{\partial u} f_{e,K}^{LF}(u, v) = \frac{1}{2}c'_{e,K}(u) + \frac{1}{2\lambda_e} \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} f_{e,K}^{LF}(u, v) = \frac{1}{2}c'_{e,K}(v) - \frac{1}{2\lambda_e} \leq 0.$$

Für die Stabilität des numerischen Verfahrens brauchen wir die folgende CFL¹-Bedingung.

¹CFL steht für die drei Namen Courant, Friedrichs und Lewy, nach denen derartige Bedingungen benannt sind.

Definition 8.1.5. Für eine Triangulierung \mathcal{T}^h einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^d, g) ohne Rand und eine Familie von numerischen Flussfunktionen $\{f_{e,K}\}_{K \in \mathcal{T}^h, e \in \partial K}$ heißt die Bedingung

$$\frac{\tau p_K}{|K|} \max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \sup_{\substack{u, v, w \in \mathbb{R} \\ u \neq v}} \left| \frac{f_{e,K}(u, w) - f_{e,K}(v, w)}{u - v} \right| < 1, \quad (8.1.9)$$

$$\frac{\tau p_K}{|K|} \text{Lip}(\mathbf{f}) < 1$$

für alle $K \in \mathcal{T}^h$, CFL-Bedingung ([CFL28]), wobei

$$\text{Lip}(\mathbf{f}) := \sup_{\substack{x \in M \\ \bar{u} \in \mathbb{R}}} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(\bar{u}, x) \right|_g.$$

8.1.2 Motivation und Definition des Verfahrens

Die grundlegende Idee, die hinter dem Finite Volumen Verfahren steckt, ist die formale Mittelwertbildung der Erhaltungsgleichung (3.1.1) über ein Element $K \in \mathcal{T}^h$, die Anwendung des Satzes von Gauß und schließlich eine Approximation der auftretenden Terme:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{1}{|K|} \int_K u \, dv_M + \frac{1}{|K|} \int_K \text{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot)) \, dv_M \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{|K|} \int_K u \, dv_M + \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_K \rangle_g \, dv_{\partial K} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{|K|} \int_K u \, dv_M + \frac{1}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \int_e \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g \, dv_e \end{aligned}$$

Mit den Approximationen

$$u_K^n \approx \frac{1}{|K|} \int_K u \, dv_M, \quad f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) \approx \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g \, dv_e$$

und der Diskretisierung der Zeitableitung durch den Differenzenquotienten definieren wir das Finite Volumen Verfahren durch

$$u_K^{n+1} := u_K^n - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n), \quad (8.1.10)$$

mit gemittelten Werten aus der Anfangsbedingung (3.1.2) als Anfangswerte

$$u_K^0 := \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) \, dv_M. \quad (8.1.11)$$

Als die numerische Lösung definieren wir die Funktion

$$u^h(x, t) := u_K^n, \text{ falls } x \in K, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \quad (8.1.12)$$

8.2 Eigenschaften der diskreten Lösung

In diesem Abschnitt werden wir Eigenschaften der numerischen Lösung formulieren und beweisen. Dies sind erstens ein diskretes Maximumprinzip (siehe Lemma 8.2.1), das wir aus [ABAL05] übernehmen, zweitens ein diskretes L^1 -Kontraktionsprinzip (siehe Lemma 8.2.3), das zwar in [ABAL05] zu finden ist, für das wir hier aber einen modifizierten Beweis vorstellen werden. Drittens wird eine diskrete Entropieungleichung (siehe Lemma 8.2.4), deren Beweis neu ist, vorgestellt und viertens eine Abschätzung der Entropiedissipation (siehe Proposition 8.2.7), deren einfacher Beweis selbst verfasst wurde. Wir werden diese Eigenschaften der numerischen Lösung zum Beweis der Konvergenz des Finite Volumen Verfahrens benötigen.

Lemma 8.2.1 (Diskretes Maximumprinzip). *Sei \mathcal{T}^h eine Triangulierung einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^d, g) ohne Rand und seien $f_{e,K}$ numerische Flussfunktionen, welche die Eigenschaften (8.1.5)-(8.1.7) bezüglich eines glatten Flusses \mathbf{f} erfüllen. Dabei gelte für \mathbf{f} die Wachstumsbedingung (8.1.1) und die CFL-Bedingung (8.1.9). Das Finite Volumen Verfahren (8.1.10) und (8.1.11) erfüllt dann*

$$\max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^n| \leq \left(\max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^0| + C_1 t_n \right) \exp(C_2 t_n). \quad (8.2.1)$$

Beweis: Der Beweis basiert auf der Darstellung von u_K^n als Konvexkombination der $u_{K_e}^n$ bis auf einen Divergenzterm, wofür Konsistenz, Monotonie und Erhaltungseigenschaft der numerischen Flussfunktionen und die CFL-Bedingung nötig sind. Dann nutzen wir die Wachstumsbedingung an \mathbf{f} aus und wenden ein diskretes Gronwall-Lemma (Lemma A.0.6) an.

Unter Benutzung von (8.1.10) und der Konsistenzbedingung (8.1.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_K^{n+1} &= u_K^n - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) \\
&= u_K^n + \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \left(\frac{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)}{(u_{K_e}^n - u_K^n)} (u_K^n - u_{K_e}^n) \right. \\
&\quad \left. - \frac{f_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{(u_{K_e}^n - u_K^n)} (u_K^n - u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n) \right) \\
&= \left(1 + \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \frac{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{(u_{K_e}^n - u_K^n)} \right) u_K^n \\
&\quad - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \frac{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{(u_{K_e}^n - u_K^n)} u_{K_e}^n \\
&\quad - \frac{\tau}{|K|} \sum_{e \in \partial K} \int_e \langle \mathbf{f}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e.
\end{aligned}$$

Mit

$$C_{K,e} := - \frac{\tau |e|}{|K|} \frac{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{(u_{K_e}^n - u_K^n)}$$

und dem Satz von Gauß auf der Untermannigfaltigkeit K schreiben wir

$$u_K^{n+1} = \left(1 - \sum_{e \in \partial K} C_{K,e} \right) u_K^n + \sum_{e \in \partial K} C_{K,e} u_{K_e}^n - \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, \cdot) dv_M.$$

Die Monotoniebedingung (8.1.7) garantiert uns, dass $C_{K,e} \geq 0$ für alle $K \in \mathcal{T}^h$ und $e \in \partial K$.

Aus der CFL-Bedingung (8.1.9) und der Erhaltungseigenschaft (8.1.6) folgern wir

$$\sum_{e \in \partial K} C_{K,e} \leq \frac{\tau p_K}{|K|} \max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \sup_{\substack{u, v \in \mathbb{R} \\ u \neq v}} \left| \frac{f_{e,K}(u, v) - f_{e,K}(u, u)}{v - u} \right| < 1,$$

so dass wir insgesamt haben, dass

$$0 \leq C_{K,e} \leq 1, \quad 0 \leq \sum_{e \in \partial K} C_{K,e} \leq 1 \quad \text{und somit auch} \quad 0 \leq 1 - \sum_{e \in \partial K} C_{K,e} \leq 1.$$

Bis auf den Divergenzterm ist u_K^{n+1} also eine Konvexkombination von u_K^n und $u_{K_e}^n$ für $e \in \partial K$. Deshalb können wir folgende Abschätzungen machen:

$$\begin{aligned} u_K^{n+1} &\leq \max(u_K^n, \max_{e \in \partial K} u_{K_e}^n) - \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, \cdot) dv_M, \\ u_K^{n+1} &\geq \min(u_K^n, \min_{e \in \partial K} u_{K_e}^n) - \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, \cdot) dv_M. \end{aligned}$$

Durch Induktion und aufgrund der Wachstumsbedingung (8.1.1) folgt

$$\begin{aligned} \max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^n| &\leq \max_{K \in \mathcal{T}^h} (u_K^0) + \sum_{j=0}^{n-1} \tau \max_{K \in \mathcal{T}^h} \frac{1}{|K|} \int_K |\operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^j, \cdot)| dv_M \\ &\leq \max_{K \in \mathcal{T}^h} (u_K^0) + \sum_{j=0}^{n-1} \tau \max_{K \in \mathcal{T}^h} (C_1 + C_2 |u_K^j|) \\ &= \max_{K \in \mathcal{T}^h} (u_K^0) + n\tau C_1 + \tau C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^j|, \end{aligned}$$

und mit dem diskreten Gronwall-Lemma (Lemma A.0.6) folgt die Behauptung. □

Aus dem Beweis von Lemma 8.2.1 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 8.2.2. *Falls die Voraussetzungen von Lemma 8.2.1 erfüllt sind und des Weiteren der Fluss \mathbf{f} divergenzfrei ist, dann erfüllt das Finite Volumen Verfahren (8.1.10) und (8.1.11) das folgende Maximumprinzip*

$$\max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^n| \leq \max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^{n-1}| \leq \dots \leq \max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^0| \leq \|u_0\|_{L^\infty(M)}.$$

Lemma 8.2.3 (L^1 -Kontraktionsprinzip). *Seien die Voraussetzungen von Lemma 8.2.1 erfüllt und seien u^h, v^h die numerischen Lösungen, definiert durch die Gleichungen (8.1.10)-(8.1.12), zu den Anfangswerten $u_0, v_0 \in L^1(M) \cap L^\infty(M)$. Dann gilt*

$$\|u^h(t + \tau) - v^h(t + \tau)\|_{L^1(M)} \leq \|u^h(t) - v^h(t)\|_{L^1(M)}.$$

Beweis: Der Beweis basiert im Wesentlichen auf der CFL-Bedingung, der Erhaltungseigenschaft und der Monotonie der numerischen Flüsse. Was wir zeigen müssen, ist, dass

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^{n+1} - v_K^{n+1}| |K| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^n - v_K^n| |K|.$$

Sei der Verfahrensoperator H definiert durch

$$u^{n+1} \equiv (u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}^h} \equiv (H_K(u^n))_{K \in \mathcal{T}^h} \equiv H(u^n).$$

Wir zeigen, dass H monoton ist, das heißt falls $u_K^n \leq v_K^n$ für alle $K \in \mathcal{T}^h$, dann ist auch $H_K(u^n) \leq H_K(v^n)$ für alle $K \in \mathcal{T}^h$. Dazu nehmen wir an, dass $u_K^n \leq v_K^n$ für alle $K \in \mathcal{T}^h$.

Sei nun $K \in \mathcal{T}^h$. Falls $u_K^n = v_K^n$, dann ist

$$\begin{aligned} H_K(v^n) - H_K(u^n) &= \underbrace{v_K^n - u_K^n}_{=0} + \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \underbrace{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(v_K^n, v_{K_e}^n)}_{\geq f_{e,K}(u_K^n, v_{K_e}^n)} \\ &\geq \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} f_{e,K}(v_K^n, v_{K_e}^n) - f_{e,K}(v_K^n, v_{K_e}^n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Falls $u_K^n < v_K^n$, so gilt

$$\begin{aligned} &H_K(v^n) - H_K(u^n) \\ &= v_K^n - u_K^n + \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \overbrace{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(v_K^n, v_{K_e}^n)}^{\geq f_{e,K}(u_K^n, v_{K_e}^n)} (v_K^n - u_K^n) \\ &\geq \underbrace{(v_K^n - u_K^n)}_{\geq 0} \left(1 - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \frac{f_{e,K}(u_K^n, v_{K_e}^n) - f_{e,K}(v_K^n, v_{K_e}^n)}{(u_K^n - v_K^n)} \right) \\ &\geq \underbrace{(v_K^n - u_K^n) \left(1 - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} \max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \sup_{\substack{u, v, w \in \mathbb{R} \\ u \neq v}} \left| \frac{f_{e,K}(u, w) - f_{e,K}(v, w)}{u - v} \right| \right)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben $a \vee b := \max\{a, b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ und $u^n \vee v^n := (u_K^n \vee v_K^n)_{K \in \mathcal{T}^h}$, $u^n \wedge v^n := (u_K^n \wedge v_K^n)_{K \in \mathcal{T}^h}$. Dann gilt für alle $K \in \mathcal{T}^h$

$$\begin{aligned} H_K(u^n \wedge v^n) &\leq H_K(u^n) \wedge H_K(v^n) = u_K^{n+1} \wedge v_K^{n+1}, \\ H_K(u^n \vee v^n) &\geq H_K(u^n) \vee H_K(v^n) = u_K^{n+1} \vee v_K^{n+1} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} |u_K^{n+1} - v_K^{n+1}| &= u_K^{n+1} \vee v_K^{n+1} - u_K^{n+1} \wedge v_K^{n+1} \\ &\leq H_K(u^n \vee v^n) - H_K(u^n \wedge v^n) \\ &= u_K^n \vee v_K^n - u_K^n \wedge v_K^n \\ &\quad - \sum_{e \in \partial K} \frac{\tau |e|}{|K|} (f_{e,K}(u_K^n \vee v_K^n, u_{K_e}^n \vee v_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n \wedge v_K^n, u_{K_e}^n \wedge v_{K_e}^n)). \end{aligned}$$

Man beachte, dass $u_K^n \vee v_K^n - u_K^n \wedge v_K^n = |u_K^n - v_K^n|$. Multiplikation mit $|K|$ und Summation über alle $K \in \mathcal{T}^h$ liefert die Behauptung, denn in der Summe kommt jede Kante genau zweimal vor, wobei sich die beiden Terme für jede Kante aufgrund der Erhaltungseigenschaft (8.1.6) nur um ein Minuszeichen unterscheiden und somit zu Null addieren. \square

Um die diskrete Entropie-Ungleichung zu formulieren, schreiben wir u_K^n in einer anderen Konvexkombination. Dazu machen wir folgende Definitionen:

$$\tilde{u}_{K,e}^{n+1} := u_K^n - \frac{\tau p_K}{|K|} (f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n)), \quad (8.2.2)$$

$$u_{K,e}^{n+1} := \tilde{u}_{K,e}^{n+1} - \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) dv_M. \quad (8.2.3)$$

Dann gilt aufgrund der Konsistenzbedingung (8.1.5)

$$u_K^{n+1} = \frac{1}{p_K} \sum_{e \in \partial K} |e| u_{K,e}^{n+1}. \quad (8.2.4)$$

Essentiell bei der Formulierung der diskreten Entropieungleichung ist die Existenz einer Familie von numerischen Entropieflussfunktionen, die bestimmte Bedingungen erfüllen (siehe Lemma 8.2.4). In [ABAL05] wird zwar behauptet, dass solche Funktionen existieren, ein Beweis bleibt aber aus. Es ist jedoch möglich, die in [NK05] für den eindimensionalen euklidischen Fall angegebenen numerischen Entropieflussfunktionen auf mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Der Beweis, dass diese eine diskrete Entropieungleichung erfüllen, kann im Wesentlichen aus [Krö97] vom euklidischen Fall auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Dazu benötigen wir die folgende Annahme an den numerischen Fluss, nämlich, dass

$$\partial_1 \partial_2 f_{e,K}(u, v) = 0 \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}, K \in \mathcal{T}^h, e \in \partial K. \quad (8.2.5)$$

Lemma 8.2.4 (Diskrete Entropieungleichung). *Seien die Voraussetzungen von Lemma 8.2.1 erfüllt und sei $(U, F) = (U(u), \mathbf{F}(u, x))$ ein konvexes Entropiepaar (siehe Definition 3.3.1) der Klasse C^2 . Sei zusätzlich die Annahme (8.2.5) an die numerischen Flussfunktionen erfüllt. Dann erfüllt die Familie von numerischen Entropieflussfunktionen $F_{e,K} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch*

$$F_{e,K}(u, v) := \int_0^u U'(\xi) \partial_1 f_{e,K}(\xi, v) d\xi + \int_0^v U'(\xi) \partial_2 f_{e,K}(u, \xi) d\xi + q_{e,K}, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

wobei

$$q_{e,K} := \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(0, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e,$$

die folgenden Bedingungen.

Kompatibilitätsbedingung:

$$\partial_2 F_{e,K}(u, v) = U'(v) \partial_2 f_{e,K}(u, v), \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (8.2.6)$$

Konsistenz:

$$F_{e,K}(u, u) = \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (8.2.7)$$

Erhaltungseigenschaft:

$$F_{e,K}(u, v) = -F_{e,K_e}(v, u), \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (8.2.8)$$

Diskrete Entropieungleichung:

$$U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n) + \frac{\tau PK}{|K|} (F_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - F_{e,K}(u_K^n, u_K^n)) \leq 0$$

oder mit $R_{K,e}^{n+1} := U(u_{K,e}^{n+1}) - U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1})$ äquivalent dazu

$$U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n) + \frac{\tau PK}{|K|} (F_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - F_{e,K}(u_K^n, u_K^n)) \leq R_{K,e}^{n+1}. \quad (8.2.9)$$

Beweis: Die Kompatibilitätsbedingung ist aufgrund der Definition trivialerweise erfüllt.

Nun wollen wir die Konsistenz zeigen. Da

$$F_{e,K}(0, 0) = q_{e,K} = \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(0, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e,$$

reicht es zu zeigen, dass für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{du} (F_{e,K}(u, u)) = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \right).$$

Nach Definition und Annahme (8.2.5) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (F_{e,K}(u, u)) &= U'(u) \partial_1 f_{e,K}(u, u) + \int_0^u U'(\xi) \partial_1 \partial_2 f_{e,K}(u, \xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^u U'(\xi) \partial_2 \partial_1 f_{e,K}(\xi, u) d\xi + U'(u) \partial_2 f_{e,K}(u, u) \\ &= U'(u) (\partial_1 f_{e,K}(u, u) + \partial_2 f_{e,K}(u, u)) \end{aligned}$$

und wegen $\partial_u \mathbf{F} = U' \partial_u \mathbf{f}$ und der Konsistenzbedingung für den numerischen Fluss (8.1.5) ist auch

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \left(\frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \right) &= \left(\frac{1}{|e|} \int_e \langle \partial_u \mathbf{F}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \right) \\
&= U'(u) \frac{1}{|e|} \int_e \langle \partial_u \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \\
&= U'(u) \frac{d}{du} \left(\frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{f}(u, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \right) \\
&= U'(u) \frac{d}{du} (f_{e,K}(u, u)) \\
&= U'(u) (\partial_1 f_{e,K}(u, u) + \partial_2 f_{e,K}(u, u)),
\end{aligned}$$

womit (8.2.7) gezeigt ist.

Die Erhaltungseigenschaft des numerischen Entropieflusses können wir auf die Erhaltungseigenschaft des numerischen Flusses (8.1.6) zurückführen:

$$\begin{aligned}
-F_{e,K_e}(v, u) &= - \int_0^v U'(\xi) \partial_1 f_{e,K_e}(\xi, u) d\xi - \int_0^u U'(\xi) \partial_2 f_{e,K_e}(v, \xi) d\xi - q_{e,K_e} \\
&= - \int_0^u U'(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{(f_{e,K_e}(v, \xi))}_{-f_{e,K}(\xi, v)} d\xi - \int_0^v U'(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{(f_{e,K_e}(\xi, u))}_{-f_{e,K}(u, \xi)} d\xi + q_{e,K} \\
&= \int_0^u U'(\xi) \partial_1 f_{e,K}(\xi, v) d\xi + \int_0^v U'(\xi) \partial_2 f_{e,K}(u, \xi) d\xi + q_{e,K} \\
&= F_{e,K}(u, v).
\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir uns der diskreten Entropiegleichung zuwenden. Mit $\lambda := \tau p_K / |K|$ gilt wegen (8.2.2)

$$U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1}) = U(u_K^n - \lambda (f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n))).$$

Mit $a := u_K^n$, $\gamma := u_{K_e}^n$ und

$$p(\gamma) := U(a - \lambda (f_{e,K}(a, \gamma) - f_{e,K}(a, a))) - U(a) + \lambda (F_{e,K}(a, \gamma) - F_{e,K}(a, a))$$

reicht es zu zeigen, dass

$$p \leq 0. \tag{8.2.10}$$

Dazu stellen wir fest, dass $p(a) = 0$. Unter Ausnutzung der Kompatibilitätsbedingung (8.2.6) und aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es ein

$\eta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
p'(\gamma) &= U'(a - \lambda(f_{e,K}(a, \gamma) - f_{e,K}(a, a))) (-\lambda \partial_2 f_{e,K}(a, \gamma)) + \lambda \partial_2 F_{e,K}(a, \gamma) \\
&= \lambda \partial_2 f_{e,K}(a, \gamma) [U'(\gamma) - U'(a - \lambda(f_{e,K}(a, \gamma) - f_{e,K}(a, a)))] \\
&= \lambda \partial_2 f_{e,K}(a, \gamma) U''(\eta) \left[\gamma - a + \lambda \frac{f_{e,K}(a, \gamma) - f_{e,K}(a, a)}{\gamma - a} (\gamma - a) \right] \\
&= \lambda \partial_2 f_{e,K}(a, \gamma) U''(\eta) (\gamma - a) \left[1 + \lambda \frac{f_{e,K}(a, \gamma) - f_{e,K}(a, a)}{\gamma - a} \right].
\end{aligned}$$

Wegen der Monotoniebedingung (vgl. (8.1.7)) ist $\partial_2 f_{e,K} \leq 0$, wegen der Konvexität von U ist $U'' \geq 0$ und aufgrund der CFL-Bedingung (vgl. (8.1.9)) ist

$$1 + \lambda \frac{f_{e,K}(a, \gamma) - f_{e,K}(a, a)}{\gamma - a} \geq 0.$$

Deshalb ist $p'(\gamma) \geq 0$ für $\gamma \leq a$ und es ist $p'(\gamma) \leq 0$ für $\gamma \geq a$, woraus, zusammen mit $p(a) = 0$, (8.2.10) zu folgern ist. \square

Bemerkung 8.2.5. In [LNO09] haben LeFloch et al. auch einen Beweis der diskreten Entropieungleichung (Lemma 8.2.4) nachgeliefert.

Beispiel 8.2.6 (Engquist-Osher und Lax-Friedrichs-Verfahren). Sowohl der Engquist-Osher- als auch der Lax-Friedrichs-Fluss (vgl. Beispiel 8.1.4) erfüllen Eigenschaft (8.2.5), denn es ist

$$\partial_1 \partial_2 f_{e,K}^{EO} = \partial_1 \partial_2 f_{e,K}^{LF} = 0.$$

Somit sind für diese beiden Flüsse die Voraussetzungen von Lemma 8.2.4 erfüllt.

Proposition 8.2.7 (Abschätzung der Entropiedissipation). Seien die Voraussetzungen von Lemma 8.2.4 erfüllt. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^{n+1}) |K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \\
& \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^n) |K| + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| F_{e,K}(u_K^n, u_K^n) + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1}, \tag{8.2.11}
\end{aligned}$$

wobei α das Konvexitätsmodul (vgl. Definition A.0.7) von U ist.

Beweis: Lemma A.0.8, angewandt auf Gleichung (8.2.4), ergibt nach Multiplikation mit $|K|$ und Summation über $K \in \mathcal{T}^h$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^{n+1}) |K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \leq \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}). \quad (8.2.12)$$

Nach Multiplikation der diskreten Entropieungleichung (8.2.9) mit $\frac{|e| |K|}{p_K}$ und anschließender Summation über alle $K \in \mathcal{T}^h$ und $e \in \partial K$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^n) |K| \\ & + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| F_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| F_{e,K}(u_K^n, u_K^n) - \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass die Summanden, die $F_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)$ enthalten, doppelt vorkommen, aufgrund der Erhaltungseigenschaft (8.2.8) jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen, und somit addieren sie sich zu Null auf. Wir haben also

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^n) |K| + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| F_{e,K}(u_K^n, u_K^n) + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1}. \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

Aus den Ungleichungen (8.2.12) und (8.2.13) folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^{n+1}) |K| + \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^n) |K| + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| F_{e,K}(u_K^n, u_K^n) + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1}. \end{aligned}$$

Somit ist Proposition 8.2.7 bewiesen. \square

Mithilfe von Proposition 8.2.7 können wir folgendes Korollar beweisen.

Korollar 8.2.8. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 8.2.4 gibt es eine Konstante C , die nur von $\max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^0|$, T , (M, g) , \mathbf{f} und \mathbf{F} abhängt, so dass*

$$\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^n - u_K^n|^2 \leq C, \quad (8.2.14)$$

wobei $0 \leq T - \tau N \leq \tau$ mit $N \in \mathbb{N}$.

Beweis: Aus Proposition 8.2.7 folgt für alle konvexen Entropiepaare (U, \mathbf{F}) und $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2}_{=:A} &\leq \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^0) |K|}_{=:B_1} - \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}^h} U(u_K^N) |K|}_{=:B_2} \\ &+ \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| F_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}_{=:B_3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1}}_{=:B_4}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $U(v) = v^2/2$, so folgt $\alpha = 1$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^n - u_K^n|^2, \\ B_1 &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \frac{1}{2} |u_K^0|^2 |K| = \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(M)}^2, \end{aligned}$$

und $B_2 \geq 0$. Um B_3 und B_4 abzuschätzen, nutzen wir aus, dass der zu U gehörige Entropiefluss \mathbf{F} glatt ist und dass das Finite Volumen Verfahren ein diskretes Maximumprinzip (vgl. Lemma 8.2.1) erfüllt, nämlich $\max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^n| \leq \widehat{C}(u^0, T)$ mit

$$\widehat{C}(u^0, T) := \left(\max_{K \in \mathcal{T}^h} |u_K^0| + C_1 T \right) \exp(C_2 T).$$

Wegen der Konsistenzbedingung (8.2.7) gilt

$$\begin{aligned}
B_3 &= \sum_{n=0}^{N-1} \tau \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \int_e \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \tau \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u_K^n, \cdot) dv_K \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} \tau \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \max_{\substack{x \in M \\ |v| \leq \widehat{C}(u^0, T)}} |(\operatorname{div}_g \mathbf{F})(v, \cdot)| \\
&\leq N\tau |M| C(u^0, T, \operatorname{div}_g \mathbf{F}) = C(u^0, T, (M, g), \mathbf{F}).
\end{aligned}$$

Für B_4 erhalten wir nach der Definition von $R_{K,e}^{n+1}$ (siehe dazu Lemma 8.2.4)

$$\begin{aligned}
B_4 &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} R_{K,e}^n \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} (U(u_{K,e}^n) - U(\tilde{u}_{K,e}^n)).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definitionen (8.2.2) und (8.2.3) und der Wachstumsbedingung an \mathbf{f} (siehe (8.1.1)) finden wir für $|u_{K,e}^n|$ und $|\tilde{u}_{K,e}^n|$ die folgenden Schranken:

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_{K,e}^{n+1}| &\leq |u_K^n| + \frac{\tau p_K}{|K|} \left| \frac{f_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - f_{e,K}(u_K^n, u_K^n)}{u_{K_e}^n - u_K^n} \right| |u_{K_e}^n - u_K^n| \\
&\stackrel{\text{CFL}}{\leq} \widehat{C}(u^0, T) + |u_{K_e}^n - u_K^n| \leq 3\widehat{C}(u^0, T),
\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

$$\begin{aligned}
|u_{K,e}^{n+1}| &\leq |\tilde{u}_{K,e}^{n+1}| + \frac{\tau}{|K|} \int_K |\operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, \cdot)| dv_M \\
&\stackrel{(8.1.1)}{\leq} 3\widehat{C}(u^0, T) + T (C_1 + C_2 \widehat{C}(u^0, T)) =: \tilde{C}(u^0, T).
\end{aligned} \tag{8.2.16}$$

Mit diesen Schranken, mit $U'(v) = v$ und mit (8.2.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
B_4 &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \sup_{|v| \leq \tilde{C}(u^0, T)} |U'(v)| |u_{K,e}^n - \tilde{u}_{K,e}^n| \\
&\leq \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \sup_{|v| \leq \tilde{C}(u^0, T)} |v| \left| \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^{n-1}, \cdot) dv_M \right| \\
&\stackrel{(8.1.1)}{\leq} \tilde{C}(u^0, T) \sum_{n=1}^N \tau \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| (C_1 + C_2 |u_K^{n-1}|) \\
&\leq \tilde{C}(u^0, T) T |M| (C_1 + C_2 \hat{C}(u^0, T)) = C(u^0, T, (M, g), \mathbf{f}).
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Das folgende Lemma ist eine direkte Folgerung aus der lokalen diskreten Entropieungleichung (8.2.9) und wird es uns erlauben, eine globale diskrete Entropiegleichung zu formulieren.

Lemma 8.2.9. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 8.2.4 erfüllt. Dann gilt für alle $K \in \mathcal{T}^h$, $e \in \partial K$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}
&\frac{|K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) - \frac{|K|}{p_K} U(u_K^n) + \frac{|K_e|}{p_{K_e}} U(u_{K_e,e}^{n+1}) - \frac{|K_e|}{p_{K_e}} U(u_{K_e}^n) \\
&+ \frac{\tau}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u_{K_e}^n, \cdot) - \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \leq \frac{|K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} + \frac{|K_e|}{p_{K_e}} R_{K_e,e}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{8.2.17}$$

Beweis: Ungleichung (8.2.9) gilt sowohl für $K \in \mathcal{T}^h$ als auch für K_e , das heißt unter Ausnutzung von (8.2.8) gilt

$$U(u_{K_e,e}^{n+1}) - U(u_{K_e}^n) - \frac{\tau p_{K_e}}{|K_e|} (F_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n) - F_{e,K}(u_{K_e}^n, u_{K_e}^n)) \leq R_{K_e,e}^{n+1}. \tag{8.2.18}$$

Wir multiplizieren (8.2.9) mit $|K|/p_K$ und (8.2.18) mit $|K_e|/p_{K_e}$ und summieren anschließend beide Ungleichungen auf. Man beachte, dass die Terme, die $F_{e,K}(u_K^n, u_{K_e}^n)$ enthalten, sich dabei zu Null addieren, so dass

$$\begin{aligned}
&\frac{|K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) - \frac{|K|}{p_K} U(u_K^n) + \frac{|K_e|}{p_{K_e}} U(u_{K_e,e}^{n+1}) - \frac{|K_e|}{p_{K_e}} U(u_{K_e}^n) \\
&+ \tau (F_{e,K}(u_{K_e}^n, u_{K_e}^n) - F_{e,K}(u_K^n, u_K^n)) \leq \frac{|K|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} + \frac{|K_e|}{p_{K_e}} R_{K_e,e}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wenden wir nun die Konsistenzbedingung (8.2.7) an, so schließt das den Beweis des Lemmas ab. \square

Wir sind jetzt in der Lage, die globale diskrete Entropieungleichung mit Resttermen zu formulieren.

Proposition 8.2.10. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 8.2.4 erfüllt. Sei weiterhin $\phi = \phi(x, t) \in C_0^\infty(M \times [0, T])$ eine nichtnegative Testfunktion. Für $K \in \mathcal{T}^h$ und $e \in \partial K$ definieren wir*

$$\phi_e^n := \frac{1}{\tau |e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \phi(x, t) dv_e dt, \quad \widehat{\phi}_K^n := \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \phi_e^n, \quad \widehat{\partial_t \phi}_K^n := \frac{1}{\tau} (\widehat{\phi}_K^n - \widehat{\phi}_K^{n-1}).$$

Dann erfüllen die u_K^n die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(U(u_K^n) \widehat{\partial_t \phi}_K^n + \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t) \rangle_g \right) dv_M dt \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K U(u_K^0) \widehat{\phi}_K^0 dv_M \leq E^h + Q^h + R^h \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

mit den Fehlertermen

$$\begin{aligned} E^h &:= \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) \left(\widehat{\phi}_K^n - \phi_e^n \right), \\ Q^h &:= \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} Q_K^n, \\ Q_K^n &:= \sum_{e \in \partial K} \tau \phi_e^n \int_e \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e, \\ &\quad - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t) \rangle_g dv_M dt, \\ R^h &:= \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \phi_e^n R_{K,e}^{n+1}, \\ R_{K,e}^{n+1} &= U(u_{K,e}^{n+1}) - U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1}), \end{aligned}$$

wobei $0 \leq T - \tau N \leq \tau$ mit $N \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir multiplizieren Ungleichung (8.2.17) mit $|e| \phi_e^n$ und summieren über alle $K \in \mathcal{T}^h$ und $e \in \partial K$. Sowohl die ersten als auch die letzten Terme produzieren

jeweils dasselbe Ergebnis, unabhängig davon, ob es Terme mit K oder mit K_e waren. Deshalb gilt

$$2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} \left(U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n) \right) \phi_e^n \\ + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| \phi_e^n \left(\frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u_{K_e}^n, \cdot) - \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \right) \leq 2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} \phi_e^n.$$

Mit $\mathbf{n}_{e,K} = -\mathbf{n}_{e,K_e}$ gilt

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau \phi_e^n \int_e \langle \mathbf{F}(u_{K_e}^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e = - \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau \phi_e^n \int_e \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e$$

woraus folgt, dass

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} \left(U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n) \right) \phi_e^n \\ - \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| \phi_e^n \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \leq \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} \phi_e^n. \quad (8.2.20)$$

Aus der Definition von Q_K^n können wir unmittelbar die folgende Identität ablesen.

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| \phi_e^n \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t) \rangle_g dv_M dt + \sum_{K \in \mathcal{T}^h} Q_K^n. \quad (8.2.21)$$

Aus der Jensenschen Ungleichung (Lemma A.0.9) und (8.2.4) folgt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| U(u_K^{n+1}) \widehat{\phi}_K^n \leq \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) \widehat{\phi}_K^n. \quad (8.2.22)$$

Wir ersetzen den zweiten Term in Ungleichung (8.2.20) durch den entsprechenden Term aus Gleichung (8.2.21) und erhalten

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} \left(U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^n) \right) \phi_e^n - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t) \rangle_g dv_M dt \\ \leq \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K||e|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} \phi_e^n + \sum_{K \in \mathcal{T}^h} Q_K^n.$$

Addition von

$$- \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} U(u_{K,e}^{n+1}) (\phi_e^n - \widehat{\phi}_K^n) =: E^{h,n}$$

auf beiden Seiten führt zu

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \left(U(u_{K,e}^{n+1}) \widehat{\phi}_K^n - U(u_K^n) \phi_e^n \right) - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t) \rangle_g dv_M dt \\ & \leq \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K| |e|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} \phi_e^n + \sum_{K \in \mathcal{T}^h} Q_K^n + E^{h,n}. \end{aligned}$$

Mit $\widehat{\phi}_K^n = \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \phi_e^n$ und (8.2.22) folgt nach Summation über n

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| (U(u_K^{n+1}) - U(u_K^n)) \widehat{\phi}_K^n - \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \langle \mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t) \rangle_g dv_M dt \\ & \leq \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|K| |e|}{p_K} R_{K,e}^{n+1} \phi_e^n + \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} Q_K^n + \sum_{n=0}^N E^{h,n} = E^h + Q^h + R^h. \end{aligned}$$

Partielle Summation in der ersten Summe führt zu

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| (U(u_K^{n+1}) - U(u_K^n)) \widehat{\phi}_K^n \\ & \stackrel{\widehat{\phi}_{K=0}^N}{=} \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| U(u_K^n) \widehat{\phi}_K^{n-1} - \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| U(u_K^n) \widehat{\phi}_K^n \\ & = - \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \tau |K| U(u_K^n) \frac{\widehat{\phi}_K^n - \widehat{\phi}_K^{n-1}}{\tau} - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| U(u_K^0) \widehat{\phi}_K^0 \\ & = - \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K U(u_K^n) \widehat{\partial}_t \widehat{\phi}_K^n dv_M dt - \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K U(u_K^0) \widehat{\phi}_K^0 dv_M \end{aligned}$$

und damit folgt schließlich (8.2.19). \square

8.3 Konvergenz des Verfahrens

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die starke Konvergenz der Näherungslösung u^h , die durch das Finite Volumen Verfahren (8.1.10) und (8.1.11) gegeben ist, gegen die

Entropielösung des betrachteten Cauchyproblems zu zeigen. Dazu werden wir uns der Theorie über maßwertige Lösungen von Erhaltungsgleichungen, die für den euklidischen Fall von DiPerna [DiP85] entwickelt wurde, bedienen. Die Theorie wurde in [BAL07] auf den Fall von Riemannschen Mannigfaltigkeiten erweitert. Wir werden erst eine kurze Zusammenfassung über maßwertige Lösungen geben, um dann die Konvergenzanalyse durchzuführen, das heißt wir wollen in der diskreten globalen Entropieungleichung (8.2.19) den Diskretisierungsparameter h gegen Null gehen lassen.

8.3.1 Maßwertige Lösungen von Erhaltungsgleichungen

Diesen Unterabschnitt entnehmen wir sinngemäß aus [BAL07, Kapitel 5] und aus [ABAL05, Abschnitt 6.2]. Die Beweise der folgenden Aussagen wollen wir an dieser Stelle nicht ausführen, sondern verweisen dazu auf die oben angegebenen Arbeiten.

Wir wollen hier den Begriff der Entropielösungen erweitern, indem wir maßwertige Entropielösungen im Sinne von DiPerna [DiP85] einführen. Dazu bezeichnen wir mit $\text{Prob}(\mathbb{R})$ den Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße über \mathbb{R} . Wir betrachten nun ein Young-Maß ν , was eine schwach messbare, maßwertige Abbildung

$$\nu : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{Prob}(\mathbb{R}) \text{ mit } M \times \mathbb{R}^+ \ni (x, t) \mapsto \nu_{x,t}$$

ist. Die Wirkung eines solchen Maßes auf eine stetige Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir als

$$\langle \nu_{x,t}, U \rangle := \int_{\mathbb{R}} U(\lambda) d\nu_{x,t}(\lambda). \quad (8.3.1)$$

Schwach messbar heißt dabei, dass für jedes U die Abbildung $\langle \nu_{x,t}, U \rangle$ in (x, t) messbar ist.

Um Missverständnisse mit der Notation der Wirkung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf eine stetige Funktion (vgl. (8.3.1)) zu vermeiden, verwenden wir in diesem Abschnitt als Notation für das Skalarprodukt auf der Mannigfaltigkeit statt $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ die Schreibweise $g(\cdot, \cdot)$. Eine maßwertige Entropielösung der Erhaltungsgleichung ist wie folgt definiert.

Definition 8.3.1 (Maßwertige Entropielösung). *Sei \mathbf{f} ein Fluss auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ohne Rand. Für Anfangswerte $u_0 \in L^\infty(M)$ heißt ein Young-Maß ν mit $M \times \mathbb{R}^+ \ni (x, t) \mapsto \nu_{x,t}$ maßwertige Entropielösung zum Anfangswertproblem (3.1.1) und (3.1.2), falls für alle konvexen Entropiepaare (U, \mathbf{F}) und alle differenzierbaren Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(M \times [0, \infty))$ mit*

$\varphi = \varphi(x, t) \geq 0$ gilt, dass

$$\begin{aligned} & \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \langle \nu_{x,t}, U \rangle \partial_t \varphi(x, t) + g(\langle \nu_{x,t}, \mathbf{F}(\cdot, x) \rangle, \nabla_g \varphi(x, t)) dt dv_g(x) \\ & + \int_M \int_{\mathbb{R}^+} \langle \nu_{x,t}, G(\cdot, x) \rangle \varphi(x, t) dt dv_g(x) + \int_M U(u_0(x)) \varphi(x, 0) dv_g(x) \geq 0, \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

wobei $G(u, x) = (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(u, x) - U'(u)(\operatorname{div}_g \mathbf{f})(u, x)$.

Zu einer Funktionenfolge $(u^h)_{h>0} \subset L^\infty(M \times \mathbb{R}^+)$, die für jedes $T > 0$ gleichmäßig in $L^\infty(M \times [0, T])$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge und ein Young-Maß $\nu : M \times [0, T] \rightarrow \operatorname{Prob}(\mathbb{R})$, das mit $(x, t) \in M \times [0, T]$ parametrisiert ist und durch das alle schwach-* Grenzwerte von hintereinandergeschalteten Funktionen $a(u^h)$ bestimmt werden können, wobei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion ist. Wir haben somit die Eigenschaft:

$$a(u^h) \xrightarrow{*} \langle \nu, a \rangle, \text{ falls } h \rightarrow 0.$$

Durch diese Eigenschaft wird der Übergang der linken Seite von Ungleichung (8.2.19) zur linken Seite von Ungleichung (8.3.3), wie wir sehen werden, für $h \rightarrow 0$ gerechtfertigt.

Ein Resultat über maßwertige Lösungen [BAL07, DiP85] besagt, dass ein Young-Maß ν , welches eine maßwertige Entropielösung der Erhaltungsgleichung ist, die Gestalt eines Dirac-Maßes hat, das heißt

$$\nu_{x,t} = \delta_{u(x,t)} \text{ für fast alle } (x, t) \in M \times \mathbb{R}^+,$$

falls dies zum Zeitpunkt $t = 0$ schon der Fall ist, wobei u die eindeutige Entropielösung der Erhaltungsgleichung bezeichnet. Daraus lässt sich schließlich folgern, dass die Konvergenz der numerischen Lösung u^h gegen die Entropielösung u stark, also in $L^1(M \times [0, T])$, ist.

8.3.2 Grenzwertberechnungen

Dieser Unterabschnitt besteht im Wesentlichen aus dem folgenden Lemma und dem Konvergenztheorem. Das folgende Lemma aus [ABAL05] zeigt, dass das zu u^h assoziierte Young-Maß eine maßwertige Entropielösung ist.

Lemma 8.3.2. *Sei \mathcal{T}^h eine Triangulierung von M , sei \mathbf{f} ein glatter Fluss, für den die Wachstumsbedingung (8.1.1) gilt, und seien $f_{e,K}$ numerische Flussfunktionen, die die Bedingungen (8.1.5)-(8.1.7), (8.1.9) und (8.2.5) erfüllen. Sei u^h definiert durch (8.1.12) und sei $\nu : M \times [0, T] \rightarrow \operatorname{Prob}(\mathbb{R})$ das Young-Maß zur Folge u^h .*

Dann gilt für jedes strikt konvexe Entropiepaar (U, \mathbf{F}) der Klasse C^2 und für jede nichtnegative glatte Funktion $\phi : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit kompaktem Träger

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, U(\cdot) \rangle \partial_t \phi(x, t) + g(\langle \nu_{x,t}, \mathbf{F}(\cdot, x) \rangle, \nabla_g \phi(x, t)) dv_M(x) dt \\ & - \int_M U(u_0(x)) \phi(0, x) dv_M \leq \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(\cdot, x) \rangle \phi(x, t) dv_M(x) dt \quad (8.3.3) \\ & \quad - \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, U'(\cdot) (\operatorname{div}_g \mathbf{f})(\cdot, x) \rangle \phi(x, t) dv_M(x) dt. \end{aligned}$$

Zum Beweis von Lemma 8.3.2 benötigen wir Abschätzungen, die wir im folgenden Lemma zusammenfassen. Den Beweis dazu findet man in Anhang B.

Lemma 8.3.3. *Die Diskretisierungen von ϕ , die in Proposition 8.2.10 eingeführt wurden, und*

$$\phi_K^n := \frac{1}{|K| \tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \phi(x, t) dv_M(x) dt \quad (8.3.4)$$

erfüllen die folgenden Abschätzungen.

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{t \in [t_n, t_{n+1}] \\ x \in K}} \left| \partial_t \phi(x, t) - \widehat{\partial_t \phi_K^n} \right| & \leq h_K \|\nabla_g \partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])} \\ & \quad + 3\tau \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])}, \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

$$\begin{aligned} \left| \phi_e^n - \widehat{\phi_K^n} \right| & \leq h_K \|\nabla_g \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])} \\ & \quad + \tau \|\partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])}, \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

$$\left| \phi_e^n - \phi_K^n \right| \leq h_K \|\nabla_g \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])}, \quad (8.3.7)$$

$$\left| \phi_K^{n+1} - \phi_K^n \right| \leq \tau \|\partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+2}])}, \quad (8.3.8)$$

wobei $e \in \partial K$, $K \in \mathcal{T}^h$ und $h_K := \sup_{x, y \in K} d_g(x, y)$.

Beweis: Siehe Anhang B.

Beweis von Lemma 8.3.2: Die Idee des Beweises ist, h in der globalen diskreten Entropieungleichung (8.2.19) gegen Null gehen zu lassen. Dabei sei im Folgenden $N \in \mathbb{N}$ stets so, dass $0 \leq T - \tau N \leq \tau$ gilt. Wir betrachten zunächst die linke Seite von (8.2.19), dann sehen wir mit der Argumentation aus Unterabschnitt 8.3.1 und

Lemma 8.3.3, dass

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, U(\cdot) \rangle \partial_t \phi(x, t) dv_M(x) dt - \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K U(u_K^n) \widehat{\partial_t \phi}_K^n dv_M dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, U(\cdot) \rangle \partial_t \phi(x, t) dv_M(x) dt - \int_\tau^T \int_M U(u^h) \partial_t \phi dv_M dt \right| \\ & \quad + \left| \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K U(u_K^n) \left(\partial_t \phi - \widehat{\partial_t \phi}_K^n \right) dv_M dt \right| \end{aligned}$$

gegen Null konvergiert für $h \rightarrow 0$. Ähnlich sieht man, dass auch

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_M g(\langle \nu_{x,t}, \mathbf{F}(\cdot, x) \rangle, \nabla_g \phi(x, t)) dv_M(x) dt \right. \\ & \quad \left. - \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K g(\mathbf{F}(u_K^n, \cdot), \nabla_g \phi(\cdot, t)) dv_M dt \right| \end{aligned}$$

gegen Null geht, falls $h \rightarrow 0$. Damit wäre gezeigt, dass die linke Seite von (8.2.19) gegen die linke Seite von (8.3.3) konvergiert.

Zu betrachten bleiben also noch die Terme auf den rechten Seiten. Wir beginnen mit E^h .

Aus der Definition von $\widehat{\phi}_K^n$ lesen wir ab, dass

$$\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} U(u_K^{n+1}) \left(\widehat{\phi}_K^n - \phi_e^n \right) = 0.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$|E^h| \leq \left[\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} (U(u_{K,e}^{n+1}) - U(u_K^{n+1}))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \left(\widehat{\phi}_K^n - \phi_e^n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgrund von (8.3.6) und da für vorgegebenes T die u_K^n und die $u_{K,e}^n$ gleichmäßig beschränkt sind (vgl. (8.2.1) und (8.2.16)) und U glatt ist, gibt es eine Konstante

$L = L(T, u_0, U)$, so dass

$$|E^h| \leq L(T, u_0, U) \left[\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_{K,e}^{n+1} - u_K^{n+1}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left[\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \mathcal{O}((\tau + h_K)^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aus Korollar 8.2.8 folgt, dass

$$|E^h| \leq L(T, u_0, U) \mathcal{O}(1) \mathcal{O}(\tau + h) \left(\sum_{n=0}^N 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \right)^{\frac{1}{2}} \\ = L(T, u_0, U) \mathcal{O} \left(\tau^{1/2} + \frac{h}{\tau^{1/2}} \right) ((N+1)\tau)^{\frac{1}{2}} |M|^{\frac{1}{2}} \\ = L(T, u_0, U) \mathcal{O} \left(\tau^{1/2} + \frac{h}{\tau^{1/2}} \right) (T + \tau)^{\frac{1}{2}} |M|^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgrund von (8.1.3) geht also $|E^h| \rightarrow 0$, wenn $h \rightarrow 0$.

Als nächstes betrachten wir R^h . Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} R^h = - \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, U'(\cdot) \operatorname{div}_g \mathbf{f}(\cdot, x) \rangle \phi(x, t) dv_M(x) dt =: -a. \quad (8.3.9)$$

Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| R^h + \underbrace{\sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^n) \tau \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) dv_M(x) \phi_K^n}_{=: b^h} \right| = 0 \quad (8.3.10)$$

mit ϕ_K^n definiert durch (8.3.4), denn mit

$$a^h := \int_0^T \int_M U'(u^h) \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u^h, x) \phi(x, t) dv_M(x) dt \\ = \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) \phi(x, t) dv_M(x) dt$$

haben wir

$$|R^h + a| \leq |R^h + b^h| + |a^h - b^h| + |a - a^h|,$$

wobei man mit der Argumentation aus Unterabschnitt 8.3.1 sieht, dass $|a - a^h| \rightarrow 0$, falls $h \rightarrow 0$. Es gilt aber auch $|a^h - b^h| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} |a^h - b^h| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^n) \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) dv_M(x) \frac{1}{|K|} \int_K \phi(y, t) dv_M(y) dt \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) \phi(x, t) dv_M(x) dt \right) \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^n) \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left[\left(\frac{1}{|K|} \int_K \phi(y, t) dv_M(y) \right) - \phi(x, t) \right] dv_M(x) dt \right) \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^n) \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) \underbrace{[\phi(\bar{x}, t) - \phi(x, t)]}_{\leq Ch_K} dv_M(x) dt \right) \right| \\ &\leq \mathcal{O}(1) \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \tau |K| h_K = 0, \end{aligned}$$

wobei wir das Maximumprinzip (8.2.1), die Wachstumsbedingung (8.1.1) und Lemma 2.10.15 ausgenutzt haben und wobei $\bar{x} \in K$ war.

Nun wollen wir (8.3.10) zeigen. Dazu überlegen wir zunächst, dass sich \tilde{R}^h , definiert durch

$$\tilde{R}^h := \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \phi_K^n (U(u_{K,e}^{n+1}) - U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1})),$$

im Grenzfall für $h \rightarrow 0$ nicht von R^h unterscheidet, denn mit Cauchy-Schwarz ist

$$\begin{aligned} |R^h - \tilde{R}^h| &= \left| \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} (U(u_{K,e}^{n+1}) - U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1})) (\phi_e^n - \phi_K^n) \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} (U(u_{K,e}^{n+1}) - U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} (\phi_e^n - \phi_K^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mit dem Maximumprinzip (8.2.1), der Definition der $u_{K,e}^{n+1}$, (8.2.3), der Wachstumsbedingung (8.1.1) und (8.3.7) ist dann

$$\begin{aligned} |R^h - \tilde{R}^h| &\leq \mathcal{O}(1) \left(\sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \tau^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \mathcal{O}(h_K^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathcal{O}(1) \left(\sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \tau \right)^{\frac{1}{2}} h_K, \end{aligned}$$

was gegen Null konvergiert, falls $h \rightarrow 0$. Um (8.3.10) zu beweisen, reicht es also, zu zeigen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \tilde{R}^h + \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^n) \tau \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) dv_M(x) \phi_K^n \right| = 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}^h + \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e||K|}{p_K} U'(u_K^n) \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^n, x) dv_M(x) \phi_K^n \\
&= \tilde{R}^h + \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e||K|}{p_K} U'(u_K^{n+1}) \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^{n+1}, x) dv_M(x) \phi_K^{n+1} \\
&\quad + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e||K|}{p_K} U'(u_K^0) \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^0, x) dv_M(x) \phi_K^0 \\
&= \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e||K|}{p_K} \left(U(u_K^{n+1}) - U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1}) + U'(u_K^{n+1}) \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^{n+1}, x) dv_M(x) \right) \phi_K^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e||K|}{p_K} U'(u_K^{n+1}) \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^{n+1}, x) dv_M(x) (\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}^h} U'(u_K^0) \tau \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^0, x) dv_M(x) \phi_K^0 =: A + B + C.
\end{aligned}$$

Aus (8.2.3), der Wachstumsbedingung (8.1.1) und dem Maximumprinzip (8.2.1) folgern wir, dass

$$A_K^{n+1} := \tilde{u}_{K,e}^{n+1} - u_{K,e}^{n+1} = \frac{\tau}{|K|} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{f}(u_K^{n+1}, x) dv_M(x) = \mathcal{O}(\tau).$$

Mit Taylorentwicklung von $U(\tilde{u}_{K,e}^{n+1})$ um den Punkt $u_{K,e}^{n+1}$ und dem Maximumprinzip (8.2.1) erhalten wir für A

$$\begin{aligned}
|A| &\leq \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \left| - \underbrace{(\tilde{u}_{K,e}^{n+1} - u_{K,e}^{n+1})}_{A_K^{n+1}} U'(u_{K,e}^{n+1}) + \mathcal{O}(\tau^2) + U'(u_K^{n+1}) A_K^{n+1} \right| |\phi_K^n| \\
&\leq \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} \mathcal{O}(\tau) |u_K^{n+1} - u_{K,e}^{n+1}| |\phi_K^n| + \mathcal{O}(\tau) \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \mathcal{O}(\tau) |\phi_K^n| \\
&\leq \mathcal{O}(\tau) \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |u_K^{n+1} - u_{K,e}^{n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \frac{|e| |K|}{p_K} |\phi_K^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \mathcal{O}(\tau) \|\phi\|_{L^1(M \times [0, T])} \\
&\leq \mathcal{O}(\tau) \|\phi\|_{L^2(M \times [0, T])} + \mathcal{O}(\tau) \|\phi\|_{L^1(M \times [0, T])},
\end{aligned}$$

was gegen Null konvergiert, falls $h \rightarrow 0$.

Aufgrund von (8.3.8) ist $|\phi_K^{n+1} - \phi_K^n| = \mathcal{O}(\tau)$. Deshalb ist

$$|B| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \mathcal{O}(\tau^2) = \mathcal{O}(\tau),$$

und es ist

$$|C| \leq \mathcal{O}(\tau).$$

Damit ist (8.3.10) und somit auch (8.3.9) gezeigt.

Es bleibt noch übrig, den Term $Q^h = \sum_{n,K} Q_K^n$ zu betrachten. Mit partieller Integration (vgl. Korollar 2.12.11) haben wir für Q_K^n

$$\begin{aligned}
Q_K^n &= \sum_{e \in \partial K} \frac{1}{|e|} \int_e g(\mathbf{F}(u_K^n, x), \mathbf{n}_{e,K}(x)) dv_e(x) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \phi(y, t) dv_e(y) dt \\
&\quad - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K} g(\mathbf{F}(u_K^n, x) \phi(x, t), \mathbf{n}_K(x)) dv_{\partial K}(x) dt \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \operatorname{div}_g \mathbf{F}(u_K^n, x) \phi(x, t) dv_M(x) dt.
\end{aligned}$$

Wir wollen beweisen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q^h = \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, (\operatorname{div}_g \mathbf{F})(\cdot, x) \rangle \phi(x, t) dv_M(x) dt, \quad (8.3.11)$$

also ist zu zeigen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} D^h = 0$$

mit

$$D^h := \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \left(\frac{1}{|e|} \int_e g(\mathbf{F}(u_K^n, x), \mathbf{n}_{e,K}(x)) dv_e(x) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \phi(y, t) dv_e(y) dt \right. \\ \left. - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e g(\mathbf{F}(u_K^n, x) \phi(x, t), \mathbf{n}_{e,K}(x)) dv_e(x) dt \right).$$

Sei x_e ein beliebiger Punkt auf der Kante e . Dann ist

$$D^h = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e g(\mathbf{F}(u_K^n, x), \mathbf{n}_{e,K}(x)) \\ \cdot \left(\frac{1}{|e|} \int_e \phi(y, t) dv_e(y) - \phi(x, t) \right) dv_e(x) dt \\ = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e (g(\mathbf{F}(u_K^n, x), \mathbf{n}_{e,K}(x)) - g(\mathbf{F}(u_K^n, x_e), \mathbf{n}_{e,K}(x_e))) \\ \cdot \left(\frac{1}{|e|} \int_e \phi(y, t) dv_e(y) - \phi(x, t) \right) dv_e(x) dt,$$

denn

$$\int_e g(\mathbf{F}(u_K^n, x_e), \mathbf{n}_{e,K}(x_e)) \left(\frac{1}{|e|} \int_e \phi(y, t) dv_e(y) - \phi(x, t) \right) dv_e(x) \\ = g(\mathbf{F}(u_K^n, x_e), \mathbf{n}_{e,K}(x_e)) \left(\int_e \phi(y, t) dv_e(y) - \int_e \phi(x, t) dv_e(x) \right) = 0.$$

Mit Annahme (8.1.4) und

$$\left| \frac{1}{|e|} \int_e \phi(y, t) dv_e(y) - \phi(x, t) \right| = \mathcal{O}(h) \text{ f\"ur } x \in e$$

folgt

$$|D^h| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \tau |e| \mathcal{O}(h) \mathcal{O}(h) = T \mathcal{O}(h^2) \sum_{K \in \mathcal{T}^h} p_K.$$

Aus der CFL-Bedingung (8.1.9) folgt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} p_K < \frac{1}{\tau \text{Lip}(\mathbf{f})} \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K|,$$

so dass

$$\begin{aligned} & \left| Q^h - \int_0^T \int_M \text{div}_g \mathbf{F}(u^h, x) \phi(x, t) dv_M(x) dt \right| \\ & \leq |D^h| \leq T \mathcal{O}(h^2) \frac{1}{\tau \text{Lip}(\mathbf{f})} \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |K| \leq \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{\tau}\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

womit (8.3.11) bewiesen und der Beweis von Lemma 8.3.2 somit komplett ist. \square

Aus Lemma 8.3.2 können wir das folgende Korollar ableiten.

Bemerkung 8.3.4. Falls die Annahmen von Lemma 8.3.2 erfüllt sind und zusätzlich \mathbf{f} divergenzfrei ist, dann erhalten wir statt Ungleichung (8.3.3)

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_M \langle \nu_{x,t}, U(\cdot) \rangle \partial_t \phi(x, t) + \langle \nu_{x,t}, F(\cdot, x) \rangle, \nabla_g \phi(x, t) \rangle_g dv_M dt \\ & - \int_M U(u_0(x)) \phi(0, x) dv_M \leq 0. \end{aligned}$$

Aus den Überlegungen dieses Kapitels ist der folgende Satz aus [ABAL05] bewiesen.

Satz 8.3.5. Betrachten wir das Anfangswertproblem (3.1.1) und (3.1.2) für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ohne Rand mit Anfangsbedingungen $u_0 \in L^\infty(M) \cap L^1(M)$ und einem glatten Fluss \mathbf{f} , für den die Wachstumsbedingung (8.1.1) gilt. Sei \mathcal{T}^h eine Triangulierung von M und seien $f_{e,K}$ numerische Flussfunktionen, die die Bedingungen (8.1.5)-(8.1.7), (8.1.9) und (8.2.5) erfüllen. Sei u^h definiert durch das Finite Volumen Verfahren (8.1.11) und (8.1.12). Dann ist für alle $T > 0$ die Folge u^h gleichmäßig beschränkt in $L^\infty([0, T], L^\infty(M) \cap L^1(M))$ und konvergiert fast überall gegen die Entropielösung $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(M) \cap L^1(M))$ des Anfangswertproblems (3.1.1)-(3.1.2).

Bemerkung 8.3.6. Giesselmann [Gie09] und LeFloch [LNO09] ist es zwischenzeitlich, unabhängig voneinander, gelungen, eine Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(h^{1/4})$ für das hier vorgestellte Finite Volumen Verfahren zu beweisen.

Kapitel 9

Numerische Experimente

Im Rahmen dieser Diplomarbeit haben wir das Verfahren aus dem vorigen Kapitel implementiert. Dieses Kapitel stellt die Implementierung des Verfahrens und die Ergebnisse, die wir daraus erhalten haben, vor. Dazu führen wir sechs konkrete Testprobleme auf der Sphäre \mathbb{S}^2 ein, die wir numerisch gelöst haben. Um die Konvergenz des Verfahrens numerisch zu untersuchen, berechnen wir für einige Testprobleme den EOC¹ des Finite Volumen Verfahrens und betrachten den zeitlichen Verlauf der Totalvariation und der Totalvariation entlang von Vektorfeldern.

Zunächst geben wir an, wie das Verfahren implementiert wurde.

9.1 Implementierung

9.1.1 Das Gitter

Als Grundlage für unsere Berechnungen verwenden wir Oberflächengitter, die die zweidimensionale Sphäre annähern. Die Gitterelemente (Dreiecke) sind flach und alle Eckpunkte liegen auf der Sphäre \mathbb{S}^2 . Da die Dreiecke flach sind, bilden sie keine Teilmenge der Sphäre \mathbb{S}^2 . Wir können aber alle Berechnungen so ausführen, als ob gekrümmte Elemente vorlägen, die der Definition eines gekrümmten Polyeders (siehe Definition 8.1.1) aus der Definition des Finite Volumen Verfahrens genügen, also insbesondere Teilmengen der Sphäre \mathbb{S}^2 sind. Details dazu beschreiben wir in Unterabschnitt 9.1.2.

Wir verwenden für unsere Berechnungen sieben verschiedene konkrete Gitter, die wir mit $sphere(0), sphere(1), \dots, sphere(6)$ bezeichnen. Die sieben Gitter unterscheiden sich vor allem in ihrer Feinheit. Dabei ist die durchschnittliche Kantenlänge von $sphere(i)$ etwa doppelt so groß wie die von $sphere(i + 1)$ für $i = 0, \dots, 5$.

¹EOC steht für *Experimental Order of Convergence*, siehe dazu Definition 9.3.1

Tabelle 9.1: Für die Gitter $sphere(0), \dots, sphere(6)$ sehen wir die Anzahl der Elemente, die kleinste (h_{\min}), größte (h_{\max}) und mittlere (\bar{h}) Kantenlänge, sowie das Verhältnis von größter zu kleinster Kantenlänge.

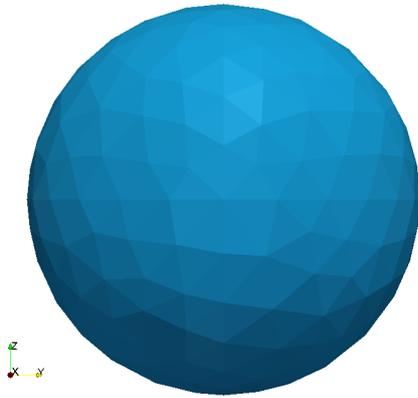
$sphere$	Elemente	h_{\min}	h_{\max}	\bar{h}	h_{\max}/h_{\min}
0	632	0.13318	0.31242	0.21605	2.35
1	2.628	0.06860	0.14572	0.10613	2.12
2	11.164	0.02806	0.08274	0.05145	2.95
3	45.102	0.01610	0.03539	0.02557	2.20
4	187.682	0.00622	0.01759	0.01251	2.83
5	747.416	0.00182	0.00883	0.00627	4.84
6	3.028.862	0.00132	0.00534	0.00311	4.04

Sonst besteht jedoch keine Beziehung der Gitter zueinander, insbesondere sind die feineren Gitter nicht aus den jeweils größeren Gittern durch Verfeinerung entstanden. Die Gitter wurden mit dem Programm *Gmsh* (siehe [gms]) in der Version 2.3.1 konstruiert. Dabei wurde der Algorithmus *MeshAdapt+Delauny* verwendet. Das gröbste und das feinste Gitter sind in Abbildung 9.1 zu sehen. In Tabelle 9.1 sind wichtige Kenngrößen für alle Gitter angegeben. In dieser Tabelle fällt auf, dass das Verhältnis von größtem zu kleinstem Durchmesser bei $sphere(5)$ und $sphere(6)$ bedeutend größer ist als bei den größeren Gittern. Betrachtet man die Werte für h_{\max} , so sieht man, dass wir von einer Halbierung bei den Schritten zum jeweils nächstfeineren Gitter maßgeblich entfernt sind. Für die über alle Elemente der Triangulierung gemittelten Durchschnitte \bar{h} kann man jedoch ziemlich exakt von einer Halbierung zum jeweils nächstfeineren Gitter sprechen. Wie wir später sehen werden, wirkt sich dies auf die Berechnung der EOCs aus.

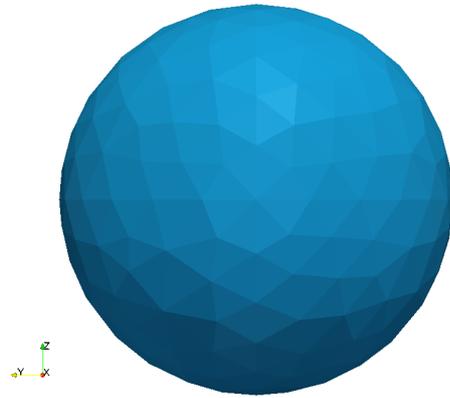
Die Softwarepakete DUNE und DUNE-PSG

Um Gitterdurchläufe zu realisieren haben wir die C++-Bibliothek DUNE² (siehe [dun]) verwendet. DUNE vereint Schnittstellendefinitionen und effiziente Implementierungen, aufgeteilt auf mehrere Module, zum Lösen partieller Differentialgleichungen. Das Kernmodul DUNE-GRID enthält die Definition einer parallelen Schnittstelle für hierarchische, strukturierte und unstrukturierte Rechengitter (siehe dazu [BBD⁺08b]). So kann bereits existierende Gittersoftware durch die Implementierung der Schnittstelle in DUNE eingebunden werden. Dies geschieht durch die Verwendung moderner C++-Techniken auf sehr effiziente und zugleich flexible Art und Weise (siehe [BBD⁺08a]).

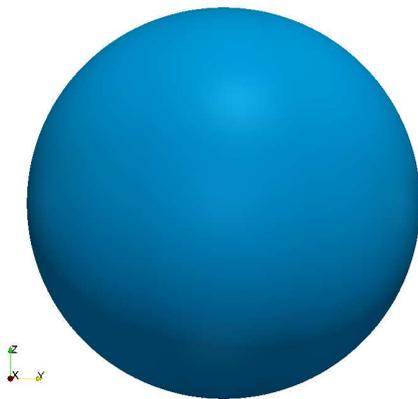
²DUNE steht für *Distributed and Unified Numerics Environment*



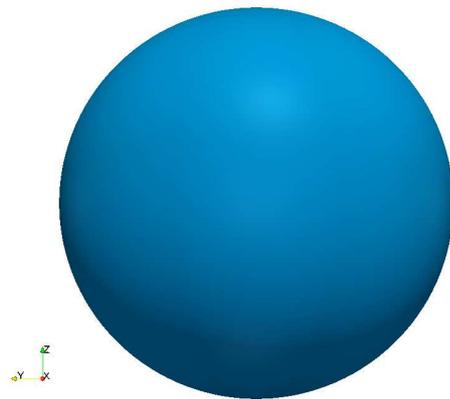
(a) *sphere(0)* Vorderansicht



(b) *sphere(0)* Rückansicht



(c) *sphere(6)* Vorderansicht



(d) *sphere(6)* Rückansicht

Abbildung 9.1: Vorder- und Rückansicht der Gitter *sphere(0)* und *sphere(6)*. Die Bilder wurden mit dem Programm *ParaView* [par] erstellt.

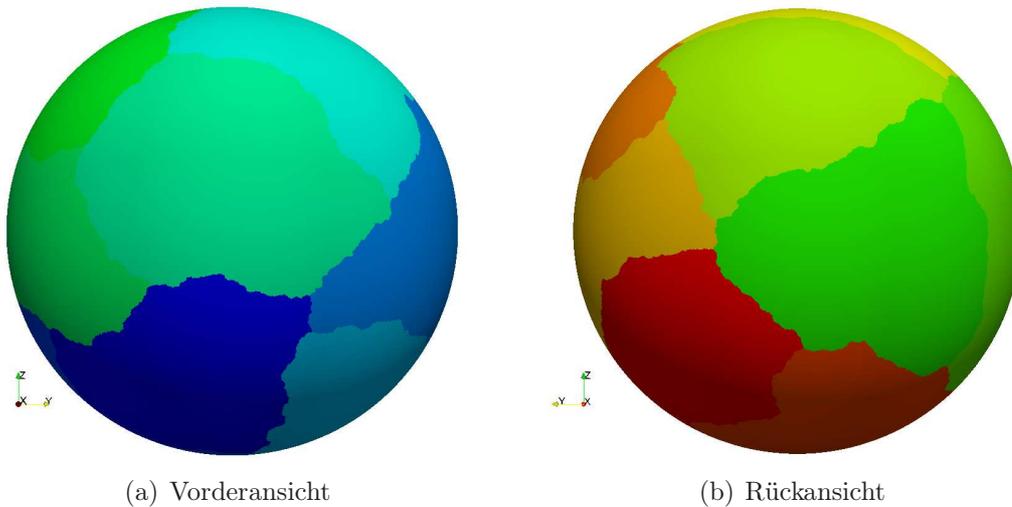


Abbildung 9.2: Aufteilung des Gitters $sphere(6)$ auf 16 Prozessoren. Jede Farbe ist einem Prozessor zugewiesen.

Insbesondere ermöglicht das Modul DUNE-PSG die Verwendung von Oberflächen-gittern. Um die Gitter, die mit *Gmsh* entstanden sind, für DUNE-PSG lesbar zu machen, musste ein Parser geschrieben werden, der die jeweiligen Dateiformate ineinander umwandelt. Damit auch auf dem feinsten Gitter, $sphere(6)$, in akzeptabler Zeit gerechnet werden kann, haben wir *parallel*³, mit bis zu 16 Gitterpartitionen (siehe Abbildung 9.2), gerechnet. Da die Parallelisierung in dieser Arbeit nicht im Vordergrund steht, haben wir keine *parallelen speedups*⁴, mit denen man auf die Effizienz der Parallelisierung schließen kann, berechnet. Für die Visualisierung sind in DUNE verschiedene hilfreiche Pakete bereits vorhanden. Wir konnten durch diese Pakete Dateien im VTK⁵-Format rausschreiben, die von Paraview [par] wieder ausgelesen und visualisiert werden können. Auf diese Weise sind die meisten der in diesem Kapitel zu sehenden Bilder entstanden.

9.1.2 Details zur Berechnung der Näherungslösungen

Zur Berechnung der Näherungslösungen mit dem vorgestellten Finite Volumen Verfahren muss ein konkreter numerischer Fluss gewählt werden. Wir haben sowohl

³Parallel rechnen bedeutet, dass das Rechengitter unter mehreren Prozessoren aufgeteilt wird und jeder Prozessor nur diejenigen Berechnungen macht, die auf seinem Teil anfallen. Somit wird die gesamte Rechenlast auf mehrere Prozessoren verteilt, die gleichzeitig arbeiten.

⁴*Paralleler speedup* bezeichnet das Verhältnis der benötigten Rechenzeiten bei zwei verschiedenen Anzahlen von Prozessoren.

⁵VTK steht für Visualization Toolkit.

einen Lax-Friedrichs als auch einen Engquist-Osher-Fluss (siehe Beispiel 8.1.4) implementiert. Die Berechnungen, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, wurden alle mit dem Engquist-Osher-Fluss gemacht, da dieser etwas genauere Lösungen produzierte.

In unseren Testproblemen sind alle analytischen Flüsse \mathbf{f} von der Form $\mathbf{f}(\bar{u}, x) = f(\bar{u})\mathbf{V}(x)$ für $x \in \mathbb{S}^2$ und $\bar{u} \in \mathbb{R}$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{V} \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^2)$. In den folgenden Zeilen wollen wir den Engquist-Osher-Fluss für diese Form von analytischen Flüssen berechnen.

Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 8.1.4 erhalten wir

$$c_{e,K}(\bar{u}) = \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{f}(\bar{u}, x), \mathbf{n}_{e,K}(x) \rangle_g dv_e(x) = f(\bar{u})\alpha_{e,K},$$

wobei

$$\alpha_{e,K} := \frac{1}{|e|} \int_e \langle \mathbf{V}(x), \mathbf{n}_{e,K}(x) \rangle_g dv_e(x).$$

Da wir in den Testproblemen **lineare** und **Burgers-artige** Flüsse betrachten, berechnen wir für diese jeweils die Engquist-Osher-Flüsse.

Linearer Fluss ($f(\bar{u}) = \bar{u}$)

Im linearen Fall erhalten wir mit der Notation aus Beispiel 8.1.4

$$\begin{aligned} c_{e,K}(\bar{u}) &= \alpha_{e,K}\bar{u}, \\ c'_{e,K}(\bar{u}) &= \alpha_{e,K}, \\ c_{e,K}^+(\bar{u}) &= c_{e,K}(0) + \int_0^{\bar{u}} \max\{c'_{e,K}(s), 0\} ds = \begin{cases} \alpha_{e,K}\bar{u}, & \text{falls } \alpha_{e,K} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \\ c_{e,K}^-(\bar{u}) &= \int_0^{\bar{u}} \min\{c'_{e,K}(s), 0\} ds = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha_{e,K} \geq 0 \\ \alpha_{e,K}\bar{u}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und somit gilt für den Engquist-Osher-Fluss

$$f_{e,K}^{\text{EO}}(u, v) = c_{e,K}^+(u) + c_{e,K}^-(v) = \begin{cases} \alpha_{e,K}u, & \text{falls } \alpha_{e,K} \geq 0 \\ \alpha_{e,K}v, & \text{falls } \alpha_{e,K} < 0. \end{cases} \quad (9.1.1)$$

Burgers-artiger Fluss ($f(\bar{u}) = \frac{1}{2}\bar{u}^2$)

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} c_{e,K}(\bar{u}) &= \frac{1}{2}\alpha_{e,K}\bar{u}^2, \\ c'_{e,K}(\bar{u}) &= \alpha_{e,K}\bar{u}, \\ c_{e,K}^+(\bar{u}) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_{e,K}\bar{u}^2, & \text{falls } \alpha_{e,K}\bar{u} \geq 0 \\ 0, & \text{falls } \alpha_{e,K}\bar{u} < 0, \end{cases} \\ c_{e,K}^-(\bar{u}) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha_{e,K}\bar{u} \geq 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{e,K}\bar{u}^2, & \text{falls } \alpha_{e,K}\bar{u} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und somit gilt für den Engquist-Osher-Fluss

$$f_{e,K}^{\text{EO}}(u, v) = c_{e,K}^+(u) + c_{e,K}^-(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha_{e,K}u < 0 \text{ und } \alpha_{e,K}v \geq 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{e,K}u^2, & \text{falls } \alpha_{e,K}u \geq 0 \text{ und } \alpha_{e,K}v \geq 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{e,K}v^2, & \text{falls } \alpha_{e,K}u < 0 \text{ und } \alpha_{e,K}v < 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{e,K}(u^2 + v^2), & \text{falls } \alpha_{e,K}u \geq 0 \text{ und } \alpha_{e,K}v < 0. \end{cases} \quad (9.1.2)$$

In dem numerischen Verfahren müssen die Terme $\alpha_{e,K}$ ausgewertet werden. Dies sind Integrale entlang der Kanten der gekrümmten Dreiecke der Triangulierung, die im Allgemeinen jedoch nur angenähert werden können. Angaben zu diesen und zu weiteren Näherungen, die wir bei der Implementierung gemacht haben, folgen sofort. Danach geben wir an, wie wir die Zeitschrittweite τ gesteuert haben.

Weitere Näherungen und Auswertungen

Das Finite Volumen Verfahren (8.1.10) und (8.1.11) erfordert die Berechnung von mehreren Termen. Schon bei der Berechnung der Anfangswerte (vgl. (8.1.11)) sind Integrale zu berechnen, die im Allgemeinen nicht ohne Weiteres exakt ausgerechnet werden können. In der Implementierung haben wir alle Integrale durch Einpunktquadraturen auf den Elementen der Triangulierung ausgewertet. Da wir für das Finite Volumen Verfahren keine höhere Konvergenzordnung als "erste Ordnung" erwarten, sollte dies die Konvergenzordnung des Gesamtverfahrens nicht negativ beeinflussen.

Für das Verfahren ist auch die Kenntnis der Flächeninhalte der gekrümmten Dreiecke auf der Sphäre notwendig. Diese können wir durch Gleichung (8) aus [VOS83] berechnen. Den geodätischen Abstand $d_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zweier Punkte \mathbf{x}, \mathbf{y} auf der Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, der für die Quadratur der Linienintegrale notwendig ist, erhalten wir mit $d_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, wobei " \cdot " das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Zeitschrittweitensteuerung

Um die Konvergenz des Verfahrens zu beweisen, haben wir in Kapitel 8 eine bestimmte Stabilitätsbedingung (siehe (8.1.9)) vorausgesetzt. Diese Stabilitätsbedingung, ‐CFL - Bedingung‐ oder auch ‐CFL - artige Bedingung‐ genannt, verlangt im Wesentlichen, dass die Zeitschrittweite τ aus Definition 8.1.2 klein genug gewählt werden muss. Diese Wahl hängt im Allgemeinen vom Gitter und der Lipschitzkonstanten des numerischen Flusses zu einem gegebenen Zeitpunkt ab. In Definition 8.1.2 wird die Zeitschrittweite τ als konstant über alle Zeitschritte hinweg definiert. Im Gegensatz dazu wird im implementierten Verfahren in jedem Zeitschritt die Stabilitätsbedingung zur Zeitschrittweitensteuerung verwendet. Wie wir sehen werden, führt dies im Fall von **linearen** Flüssen (vgl. (9.1.1)) weiterhin zu äquidistanten Zeitschritten, bei **Burgers-artigen** Flüssen (vgl. (9.1.2)) hingegen sind die Zeitschritte im Allgemeinen nicht äquidistant. Formt man die CFL-Bedingung (8.1.9) um und setzt den Engquist-Osher-Fluss ein, so erhält man

$$\tau < |K| \left(p_K \max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \sup_{\substack{u, v, w \in \mathbb{R} \\ u \neq v}} \left| \frac{f_{e,K}^{\text{EO}}(u, w) - f_{e,K}^{\text{EO}}(v, w)}{u - v} \right| \right)^{-1},$$

für alle $K \in \mathcal{T}^h$.

Im **linearen** Fall (vgl. (9.1.1)) ist

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \sup_{\substack{u, v, w \in \mathbb{R} \\ u \neq v}} \left| \frac{f_{e,K}^{\text{EO}}(u, w) - f_{e,K}^{\text{EO}}(v, w)}{u - v} \right| = \max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \alpha_{e,K}$$

und wir definieren für diesen Fall die Zeitschrittweite τ durch die Gleichung

$$\tau = \text{CFL} \min_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \left\{ \frac{\min \{|K|, |K_e|\}}{|e| \alpha_{e,K}} \right\},$$

wobei $\text{CFL} < 1$.

Bei **Burgers-artigen** Flüssen (vgl. (9.1.2)) ist der Term

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \sup_{\substack{u, v, w \in \mathbb{R} \\ u \neq v}} \left| \frac{f_{e,K}^{\text{EO}}(u, w) - f_{e,K}^{\text{EO}}(v, w)}{u - v} \right|$$

im Allgemeinen nicht beschränkt. Es macht aber Sinn, für u, v und w nur solche Werte einzusetzen, die die diskrete Lösung im jeweiligen Zeitpunkt lokal⁶ auch tatsächlich annimmt. Das führt zu folgender Definition der Zeitschrittweite für diesen

⁶Das heißt für ein Dreieck und deren Nachbarelemente.

Fall:

$$\tau^n = \text{CFL} \min_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} \left\{ \frac{\min\{|K|, |K_e|\}}{|e| \alpha_{e,K} \max\{|u_K^n|, |u_{K_e}^n|\}} \right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und mit $\text{CFL} < 1$.

Im Fall von **Burgers-artigen** Flüssen hängt die Zeitschrittweite vom Wert der diskreten Lösung zum jeweils aktuellen Zeitpunkt ab und ist somit im Allgemeinen nicht konstant. Das Finite Volumen Verfahren weicht also in diesem Fall von der Definition aus Kapitel 8 ab.

9.2 Daten für die Testprobleme

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Daten für die Testprobleme, die im Rahmen dieser Arbeit numerisch gelöst wurden. Um ein konkretes Testproblem zu definieren, müssen das Rechengebiet (die Mannigfaltigkeit (M, g)), der Fluss (\mathbf{f}) und die Anfangswerte (u_0) definiert werden. Als Rechengebiet wählen wir für alle Testprobleme, wie schon in den Kapiteln 6 und 7, die Sphäre \mathbb{S}^2 , die isometrisch in den \mathbb{R}^3 eingebettet ist. Wir benutzen wieder die Notationen aus Kapitel 6 und übernehmen insbesondere die Darstellung von \mathbb{S}^2 durch sphärische Koordinaten. Jeder Punkt auf \mathbb{S}^2 wird also durch die Angabe seines Breitengrades $\varphi \in [0, 2\pi]$ und Längengrades $\theta \in [0, \pi]$ dargestellt (siehe Abbildung 2.3), das heißt

$$\mathbb{S}^2 = \{(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}.$$

Das Anfangswertproblem (3.1.1) und (3.1.2) wird dann zu

$$\partial_t u + \text{div}_g(\mathbf{f}(u, \cdot)) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \quad (9.2.1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{S}^2, \quad (9.2.2)$$

wobei die Funktion $u : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist und $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ für jeden Wert des Parameters $\bar{u} \in \mathbb{R}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 bezeichnet, das glatt vom Parameter \bar{u} abhängt. Der Fluss $\mathbf{f}(\bar{u}, \cdot)$ ist also insbesondere an jeder Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ aus $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$, sprich tangential an \mathbb{S}^2 .

Wir bedienen uns der Parametrisierung der Sphäre aus Abschnitt 6.1, das heißt wir führen die Abbildung \mathbf{x}_P ein:

$$\mathbf{x}_P : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad (\varphi, \theta) \mapsto (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

mit $\Omega := T^1 \times (0, \pi)$. Dabei ist $T^1 := [0, 2\pi]$, wobei die Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ miteinander identifiziert sind. Funktionen auf \mathbb{S}^2 werden durch Funktionen von $(\varphi, \theta) \in \Omega$ repräsentiert. Zum Beispiel ist mit $u_0(\varphi, \theta)$ somit $u_0(\mathbf{x}_P(\varphi, \theta))$ gemeint.

Wir verwenden zu unterschiedlichen Zwecken unterschiedliche Anfangsdaten und Flussfunktionen, die wir miteinander kombinieren. Zunächst wollen wir die Anfangsdaten präsentieren, die in unseren Testproblemen zum Einsatz kamen. Im darauf folgenden Unterabschnitt werden die verschiedenen Flussfunktionen aus den Testproblemen angegeben.

Anfangswerte I

$$u_0^I(x, y, z) := 4\mathbb{1}_{\{x \geq 0,8\}}(x, y, z)$$

für $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, wobei $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion bezeichnet. Siehe Abbildung 9.3.

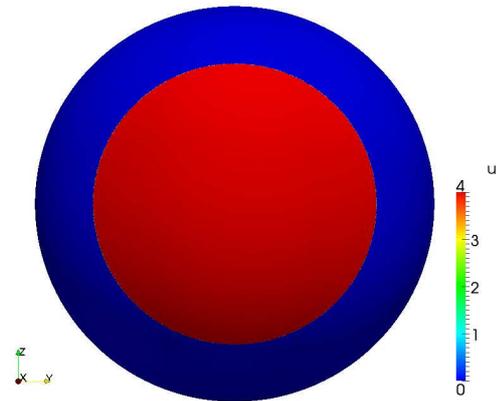


Abbildung 9.3: Vorderansicht von u_0^I .

Anfangswerte II

Hier geben wir die Anfangswerte in Polarkoordinaten an und fordern Stetigkeit an den Polen. An den Polen verschwinden die Anfangsdaten somit.

$$u_0^{\text{II}}(\varphi, \theta) := \hat{u}_0(\theta)\tilde{u}_0(\varphi),$$

wobei

$$\begin{aligned}\hat{u}_0(\theta) &:= \sin^2(3\theta)\mathbb{1}_{\{|\theta - \pi/2| < \pi/6\}}(\theta), \\ \tilde{u}_0(\varphi) &:= \cos^2(3\varphi)\chi(\varphi)\end{aligned}$$

und χ definiert ist durch $\chi(\varphi) := \mathbb{1}_{\{(|\varphi| < \pi/6) \vee (|\varphi - 2\pi| < \pi/6)\}}(\varphi)$. Siehe Abbildung 9.4.

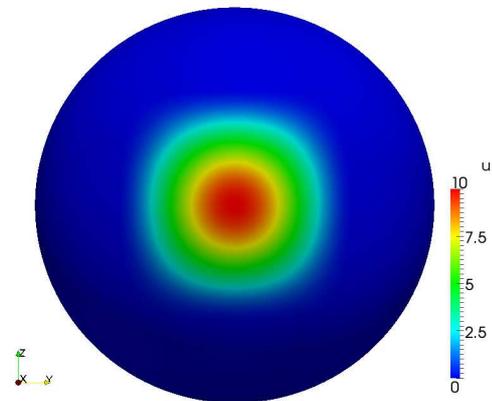


Abbildung 9.4: Vorderansicht von u_0^{II} .

Anfangswerte III

Auch hier geben wir die Anfangswerte in Polarkoordinaten an und fordern Stetigkeit an den Polen, wodurch die Anfangsdaten an den Polen verschwinden.

$$u_0^{\text{III}}(\varphi, \theta) := \widehat{u}_0(\theta) \sin(\varphi),$$

wobei \widehat{u}_0 wie bei den Anfangswerten II definiert ist. Siehe Abbildung 9.5.

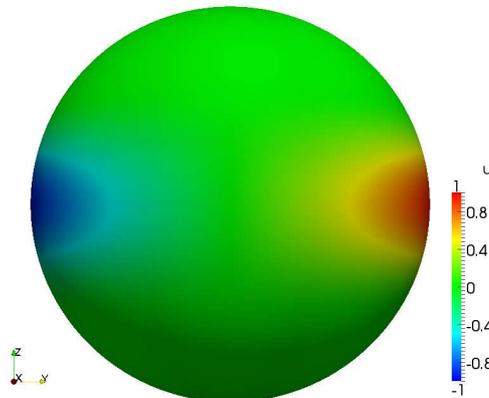


Abbildung 9.5: Vorderansicht von u_0^{III} .

Anfangswerte IV

Wieder geben wir die Anfangswerte in Polarkoordinaten an und fordern Stetigkeit an den Polen, wodurch die Anfangsdaten an den Polen verschwinden.

$$u_0^{\text{IV}}(\varphi, \theta) := \widehat{u}_0(\theta) \mathbb{1}_{\{\varphi < \pi\}}(\varphi),$$

wobei \widehat{u}_0 wie bei den Anfangswerten II definiert ist. Siehe Abbildung 9.6.

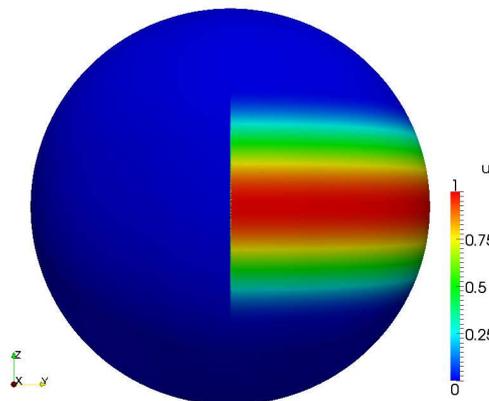


Abbildung 9.6: Vorderansicht von u_0^{IV} .

In unseren Testproblemen haben alle analytischen Flüsse \mathbf{f} die Gestalt $\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) = f(\bar{u})\mathbf{V}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$ und $\bar{u} \in \mathbb{R}$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{V} \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^2)$ ein glattes, zu \mathbb{S}^2 tangentiales Vektorfeld ist.

Betrachtet werden **lineare** und **Burgers-artige** Flüsse. Bei **linearen** Flüssen ist $f(\bar{u}) = f_{\text{Lin}}(\bar{u}) := 2\pi\bar{u}$, wohingegen für **Burgers-artige** Flüsse $f(\bar{u}) = f_{\text{Burgers}}(\bar{u}) := \pi\bar{u}^2$ ist.

Das Vektorfeld \mathbf{V} gibt die Flussrichtung an. Im Folgenden werden drei solche Vektorfelder vorgestellt, die bei unseren Testproblemen zum Einsatz kamen.

Vektorfeld A

Das erste Vektorfeld zeigt in “Ostrichtung”, und zwar so, dass der Betrag proportional zur Länge des Breitengrades an der jeweiligen Stelle ist. An den Polen verschwindet das Feld somit. Wir definieren

$$\mathbf{V}_A(x, y, z) := (-y, x, 0)^T.$$

Vektorfeld B

Das zweite Vektorfeld ist, wie schon \mathbf{V}_A , auch parallel zu den Breitengraden, jedoch wechselt es in Abhängigkeit vom Breitengrad die Richtung. Auf der “Nordhalbkugel” zeigt es nach “Osten”, wohingegen es auf der “Südhalbkugel” nach “Westen” zeigt, so dass durch dieses Vektorfeld eine Scherung verursacht wird. An den Polen verschwindet das Feld wieder. Wir definieren es in Polarkoordinaten durch

$$\mathbf{V}_B(\varphi, \theta) := \sin(2\theta)(-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)^T$$

und setzen es stetig zu den Polen fort.

Vektorfeld C

Das dritte Vektorfeld wählen wir so, dass es nicht divergenzfrei ist. Dazu definieren wir ein Feld, das stets nach “Norden” zeigt und auch an den Polen verschwindet. Wir geben es in Polarkoordinaten an:

$$\mathbf{V}_C(\varphi, \theta) := \sin^2(\theta)(-\cos(\theta)\cos(\varphi), -\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta))^T.$$

9.3 Ergebnisse der numerischen Experimente

In diesem Abschnitt untersuchen wir die numerischen Lösungen von Testproblemen. Diese Testprobleme sind auf der Sphäre \mathbb{S}^2 mit den Anfangsdaten und Flüssen aus Abschnitt 9.2 gestellt. Dabei verwenden wir das Finite Volumen Verfahren aus Kapitel 8, das durch (8.1.10) und (8.1.11) definiert ist. Details der Implementierung, wie zum Beispiel das verwendete Rechengitter, Näherungen, die wir beim Verfahren

gemacht haben, oder die Zeitschrittweitensteuerung, wurden in Abschnitt 9.1 zusammengefasst. Als numerischer Fluss wurde bei allen Testproblemen der Engquist-Osher-Fluss verwendet (siehe Beispiel 8.1.4 und Unterabschnitt 9.1.2).

Wir wollen die experimentelle Konvergenzordnung, kurz EOC (siehe Definition 9.3.1), des verwendeten Finite Volumen Verfahrens für ausgewählte Testprobleme bestimmen. Danach untersuchen wir den zeitlichen Verlauf sowohl von der üblichen Totalvariation als auch von der Totalvariation entlang von Vektorfeldern von diskreten Lösungen.

Im weiteren Verlauf des Kapitels bezeichnen wir mit $u^h : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die numerische Lösung, die durch unsere Implementierung berechnet wurde.

9.3.1 Numerische Konvergenz

In diesem Abschnitt wollen wir quantitativ überprüfen, ob das Verfahren sinnvolle Ergebnisse liefert. Dazu berechnen wir die experimentelle Konvergenzordnung für unterschiedliche, einfache Anfangswertprobleme auf der Sphäre \mathbb{S}^2 , deren Lösung uns bekannt ist.

Einfach bedeutet in diesem Zusammenhang vor allem, dass die Testprobleme so beschaffen sind, dass sie äquivalent zu einem Problem in einer Raumdimension sind. Eine Äquivalenz zu eindimensionalen Problemen haben wir in Lemma 6.4.1 bei Flüssen der Form

$$\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) := \mathbf{x} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f(\bar{u}) \end{pmatrix} = f(\bar{u}) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

was identisch zu $f(\bar{u})\mathbf{V}_A(\mathbf{x})$ ist, hergeleitet. Dabei ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung (9.2.1) ist für diesen Fluss nach Lemma 6.4.1 äquivalent zu

$$\partial_t u(t, \varphi, \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} f(u(t, \varphi, \theta)) = 0 \text{ auf } T^1 \text{ für alle } \theta \in (0, \pi), \quad (9.3.1)$$

wobei T^1 wie in Abschnitt 9.2 definiert ist.

Bevor wir die Ergebnisse für die EOCs aus den Testproblemen betrachten, wird zunächst definiert, wie sie berechnet werden.

Definition 9.3.1 (EOC). *Sei u eine exakte Lösung und seien u_{h_1}, u_{h_2} numerische Lösungen desselben Problems auf den Triangulierungen \mathcal{T}_{h_1} bzw. \mathcal{T}_{h_2} mit der Feinheit h_1 bzw. h_2 (vgl. Definition 8.1.2). Dann definieren wir die experimentelle Konvergenzordnung durch*

$$\text{EOC} = \frac{\log(\|u - u_{h_1}\|_{L^1} / \|u - u_{h_2}\|_{L^1})}{\log(h_1/h_2)}.$$

Um den EOC zu bestimmen, müssen also L^1 -Fehler ausgerechnet werden. Für die Berechnung der EOCs, die in den Tabellen dieses Unterabschnitts zu finden sind, haben wir die L^1 -Fehler durch Einpunktquadraturen auf den Elementen der Triangulierung approximiert.

Die in Unterabschnitt 9.1.1 angesprochene Ungleichmäßigkeit des Gitters verursacht, dass die EOCs ziemlich stark schwanken. Verwendet man jedoch für die Feinheit der Triangulierung, als Grundlage für die Berechnung der EOCs, nicht den maximalen Durchschnitt h_{\max} , sondern den über alle gekrümmten Dreiecke gemittelten Durchschnitt \bar{h} , so kann man für die EOCs weitaus stabilere Ergebnisse erzielen. Aus diesem Grunde geben wir in allen Tabellen in diesem Unterabschnitt jeweils beide Werte an.

Lineare Testprobleme

Wir wollen jetzt die experimentelle Konvergenzordnung für **lineare** Probleme untersuchen. Dazu führen wir zwei Testprobleme ein und vergleichen zum Zeitpunkt $t = 1.0$ die numerische Lösung mit der exakten Lösung. Bei beiden Testproblemen nehmen wir das Vektorfeld \mathbf{V}_A als Grundlage für den Fluss, so dass dieser die Form $\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) = 2\pi\bar{u}\mathbf{V}_A(\mathbf{x})$ annimmt. Somit wird Gleichung (9.3.1), die äquivalent zur Differentialgleichung (9.2.1) ist, zu

$$\partial_t u(t, \varphi, \theta) + 2\pi \frac{\partial}{\partial \varphi} u(t, \varphi, \theta) = 0 \text{ auf } T^1 \text{ für alle } \theta \in (0, \pi).$$

Die exakte Lösung ist demnach ein linearer Transport in Ost-Richtung, durch den zum Zeitpunkt $t = 1.0$ wieder der Initialzustand erreicht wird. Der L^1 -Fehler lässt sich somit leicht berechnen.

Testproblem 1 Gesucht sei eine Lösung des Anfangswertproblems

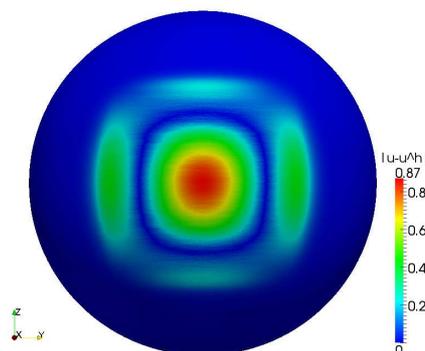
$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_g(2\pi u \mathbf{V}_A) &= 0 && \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) &= u_0^{\text{II}} && \text{auf } \mathbb{S}^2, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{V}_A und u_0^{II} in Abschnitt 9.2 definiert wurden.

Da dieses erste lineare Testproblem stetig differenzierbare Anfangswerte besitzt, liegt es nahe, entsprechend dem euklidischen Fall, eine experimentelle Konvergenzordnung von Eins zu erwarten. Die berechneten EOCs sehen wir in Tabelle 9.2. Dabei können wir feststellen, dass die EOCs tendenziell ansteigen je feiner das Gitter wird und zumindest der letzte Wert für $\operatorname{EOC}(\bar{h})$ relativ nahe an die Eins herankommt. Der Ausreißer im letzten Wert für $\operatorname{EOC}(h_{\max})$ lässt sich womöglich durch die Ungleichmäßigkeit des Gitters erklären.

Tabelle 9.2: EOCs für **Testproblem 1**

<i>sphere</i>	$\text{EOC}(h_{max})$	$\text{EOC}(\bar{h})$
0	—	—
1	0.27	0.29
2	0.52	0.41
3	0.61	0.74
4	0.66	0.64
5	0.77	0.76
6	1.26	0.91

**Abbildung 9.7:** Vorderansicht des Fehlers für **Testproblem 1** auf *sphere(6)* zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

In Abbildung 9.7 sehen wir eine Vorderansicht des Fehlers $|u - u^h|$ zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

Für **Testproblem 2** modifizieren wir lediglich die Anfangsdaten. Und zwar betrachten wir dort unstetige Anfangsdaten. Eine experimentelle Konvergenzordnung von 0.5 ist somit das, was man in einem entsprechenden euklidischen Fall erwarten würde.

Testproblem 2 Gesucht sei eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_g(2\pi u \mathbf{V}_A) &= 0 && \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) &= u_0^I && \text{auf } \mathbb{S}^2, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{V}_A und u_0^I in Abschnitt 9.2 definiert wurden.

In Tabelle 9.3 sind die berechneten EOCs abzulesen und wir sehen, dass zumindest die EOCs, die mit \bar{h} berechnet wurden, für die feineren Gitter nahe an 0.5 liegen. In Abbildung 9.8 ist eine Vorderansicht des Fehlers zu sehen. Wir können feststellen, dass sich der Fehler auf den Unstetigkeitsbereich konzentriert.

Burgers-artige Testprobleme

Jetzt wollen wir die experimentelle Konvergenzordnung für **Burgers-artige** Probleme untersuchen. Dazu führen wir drei Testprobleme ein und vergleichen wieder zum Zeitpunkt $t = 1.0$ die numerische Lösung mit der exakten Lösung. Um zu

Tabelle 9.3: EOCs für **Testproblem 2**

<i>sphere</i>	$EOC(h_{max})$	$EOC(\bar{h})$
0	—	—
1	0.31	0.33
2	0.48	0.37
3	0.47	0.57
4	0.43	0.42
5	0.47	0.47
6	0.66	0.47

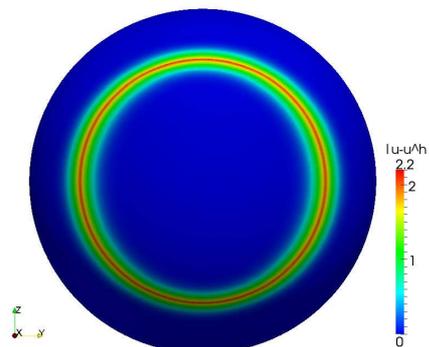


Abbildung 9.8: Vorderansicht des Fehlers für **Testproblem 2** auf *sphere(6)* zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

gewährleisten, dass uns die exakte Lösung der Testprobleme (mit hinreichender Genauigkeit) bekannt ist, nehmen wir wieder das Vektorfeld \mathbf{V}_A als Grundlage für den Fluss. Der Fluss hat bei allen drei Testproblemen die Form $\mathbf{f}(\bar{u}, \mathbf{x}) = \pi \bar{u}^2 \mathbf{V}_A(\mathbf{x})$, so dass Gleichung (9.3.1), die äquivalent zur Differentialgleichung ist, zu

$$\partial_t u(t, \varphi, \theta) + \pi \frac{\partial}{\partial \varphi} u^2(t, \varphi, \theta) = 0 \text{ auf } T^1 \text{ für alle } \theta \in (0, \pi) \tag{9.3.2}$$

wird. Wir betrachten nur derartige Anfangswerte, so dass die Testprobleme die Voraussetzungen von Korollar 6.4.2 erfüllen und somit äquivalent zu jeweils einem Problem in einer Raumdimension sind (im Gegensatz zur Äquivalenz zu einer Schar von Problemen in 1-D). Denn dann können wir die exakte Lösung entweder direkt angeben oder aber in 1-D hinreichend genau berechnen, um als Vergleichslösung für die Berechnung des L_1 -Fehlers verwendet werden zu können.

Testproblem 3 Gesucht sei eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_g(\pi u^2 \mathbf{V}_A) &= 0 && \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) &= u_0^{\text{II}} && \text{auf } \mathbb{S}^2, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{V}_A und u_0^{II} in Abschnitt 9.2 definiert wurden.

Lösung zu Testproblem 3 Eine Lösung zu diesem Problem kann mithilfe von Korollar 6.4.2 angegeben werden. Nehmen wir nun an, dass $\tilde{u} : T^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine

Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems mit periodischen Randbedingungen

$$\partial_t \tilde{u}(\varphi, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{u}^2(\varphi, t)) = 0 \quad \text{auf } T^1 \times \mathbb{R}^+, \quad (9.3.3)$$

$$\tilde{u}(\varphi, 0) = \tilde{u}_0(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in T^1 \quad (9.3.4)$$

ist, dann ist es leicht, nachzurechnen, dass die Funktion

$$u(\varphi, \theta, t) := \hat{u}_0(\theta) \tilde{u}(\varphi, 2\pi \hat{u}_0(\theta) t) \quad (9.3.5)$$

eine Lösung von Gleichung (9.3.2) mit den Anfangswerten

$$u(\varphi, \theta, 0) = \hat{u}_0(\theta) \tilde{u}(\varphi, 0) = \hat{u}_0(\theta) \tilde{u}_0(\varphi) = u_0^{\text{II}}(\theta, \varphi)$$

ist und somit auch eine Lösung von **Testproblem 3**, wobei hier \tilde{u}_0 und \hat{u}_0 wie bei **Anfangswerte II** definiert sind.

Den zeitlichen Verlauf der numerischen Lösung auf *sphere(6)* haben wir in Abbildung 9.9 geplottet. In den Bildern 9.9(a)-9.9(f) kann man erkennen, dass sich ein Schock mit einer Verdünnungswelle herausbildet, der sich dann in Flussrichtung ausbreitet, so wie man es auch aus dem Euklidischen kennt.

In Tabelle 9.4 sind EOCs zu **Testproblem 3** zu sehen, wobei diese von unten die "1" anzunähern scheinen. Den Ausreißer für $\text{EOC}(h_{\max})$ in *sphere(6)* erklären wir durch die Ungleichmäßigkeit des Gitters, die wir in Unterabschnitt 9.1.1 beschrieben haben. Die exakte Lösung von **Testproblem 3**, die wir für die Berechnung der EOCs benötigen, haben wir approximiert, indem wir das eindimensionale Anfangswertproblem (9.3.3) und (9.3.4) mit periodischen Randbedingungen sehr fein numerisch gelöst⁷ haben, um dann Gleichung (9.3.5) ausnutzen zu können. Dies ist möglich, da für eine Berechnung in einer Raumdimension bedeutend weniger Rechenressourcen benötigt werden als für ein zweidimensionales Problem bei vergleichbarer Gitterfeinheit.

In Abbildung 9.10 sehen wir zwei Seitenansichten des Fehlers $|u - u^h|$ zum Zeitpunkt $t = 1.0$ und können feststellen, dass der Fehler in der Nähe des Schocks besonders groß ist.

⁷Wir haben dabei ein äquidistantes Gitter mit 40.000 Elementen und einen Engquist-Osher-Fluss verwendet.

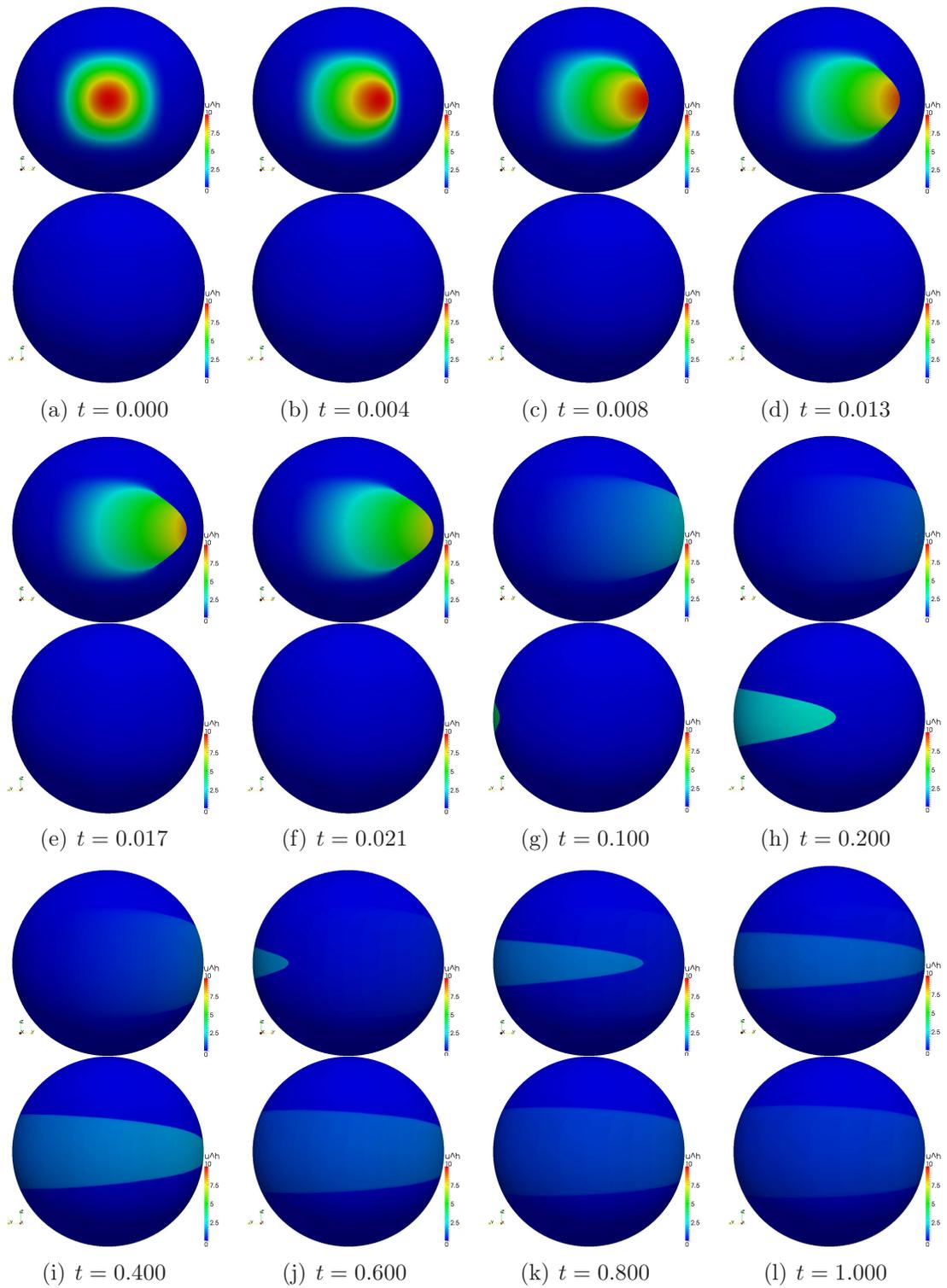
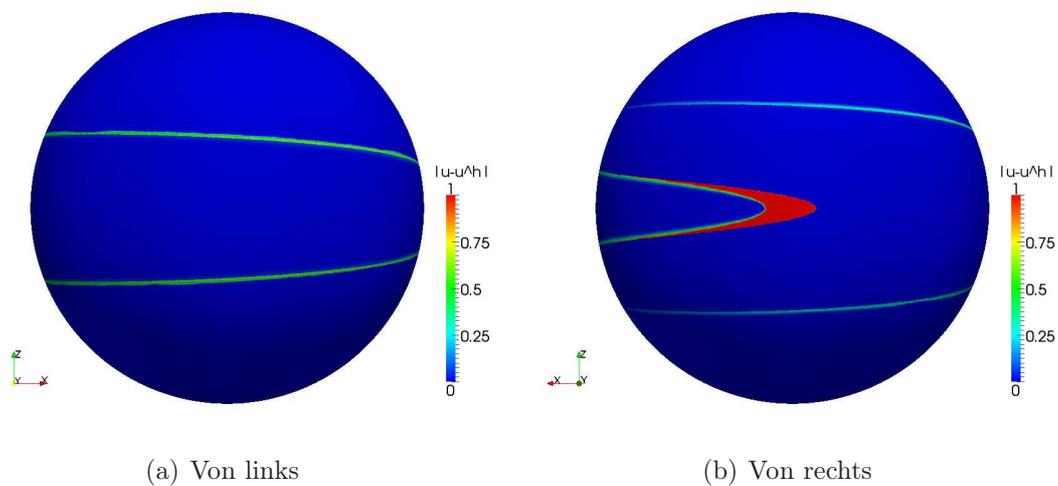


Abbildung 9.9: Zeitlicher Verlauf der numerischen Lösung u^h für **Testproblem 3** auf *sphere(6)*. In jeder der zwölf Grafiken stellt das obere Bild die Vorder- und das untere die Rückansicht dar.

Tabelle 9.4: EOCs für Testproblem 3

<i>sphere</i>	$EOC(h_{max})$	$EOC(\bar{h})$
0	—	—
1	0.34	0.36
2	0.67	0.52
3	0.52	0.63
4	0.73	0.72
5	0.82	0.82
6	1.23	0.89

Abbildung 9.10: Seitenansichten des Fehlers für Testproblem 3 auf *sphere(6)* zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

Testproblem 4 Gesucht sei eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_g(\pi u^2 \mathbf{V}_A) &= 0 && \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) &= u_0^{\text{III}} && \text{auf } \mathbb{S}^2, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{V}_A und u_0^{III} in Abschnitt 9.2 definiert wurden.

Lösung zu Testproblem 4 Um eine Lösung zu diesem Problem zu berechnen, gehen wir analog wie bei **Testproblem 3** vor. Den einzigen Unterschied stellen die Anfangswerte des zugehörigen eindimensionalen Problems mit periodischen Randbedingungen (vgl. (9.3.3) und (9.3.4)) dar.

Den zeitlichen Verlauf der numerischen Lösung auf *sphere(6)* haben wir in Abbildung 9.12 geplottet. In den Bildern 9.12(a)-9.12(c) kann man erkennen, dass sich ein stationärer Schock herausbildet, der im zeitlichen Verlauf schwächer wird. Die exakte Lösung von **Testproblem 4**, die wir für die Berechnung der EOCs benötigen, haben wir analog zu der von **Testproblem 3** approximiert.

In Tabelle 9.5 sind die EOCs zu **Testproblem 4** zu sehen, wobei die Werte für $\text{EOC}(\bar{h})$ sehr nah von unten die Eins annähern. Der Ausreißer für $\text{EOC}(h_{\max})$ bei *sphere(6)* lässt sich wahrscheinlich wieder durch die Ungleichmäßigkeit des Gitters erklären, die wir in Unterabschnitt 9.1.1 beschrieben haben. Abbildung 9.11 zeigt die Rückansicht des Fehlers $|u - u^h|$ zum Zeitpunkt $t = 1.0$ und man sieht, dass der Fehler nur im schmalen Streifen des (stationären) Schocks groß ist.

Tabelle 9.5: EOCs für **Testproblem 4**

<i>sphere</i>	$\text{EOC}(h_{\max})$	$\text{EOC}(\bar{h})$
0	—	—
1	0.65	0.70
2	1.20	0.94
3	0.81	0.98
4	0.99	0.97
5	0.96	0.95
6	1.38	0.99

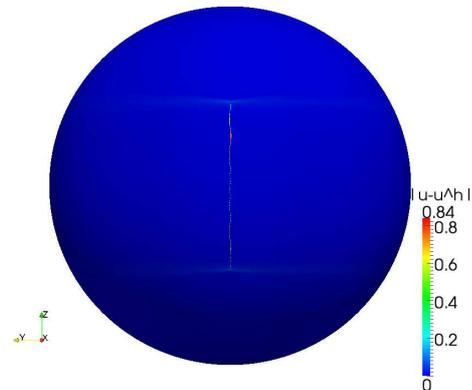


Abbildung 9.11: Rückansicht des Fehlers für **Testproblem 4** auf *sphere(6)* zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

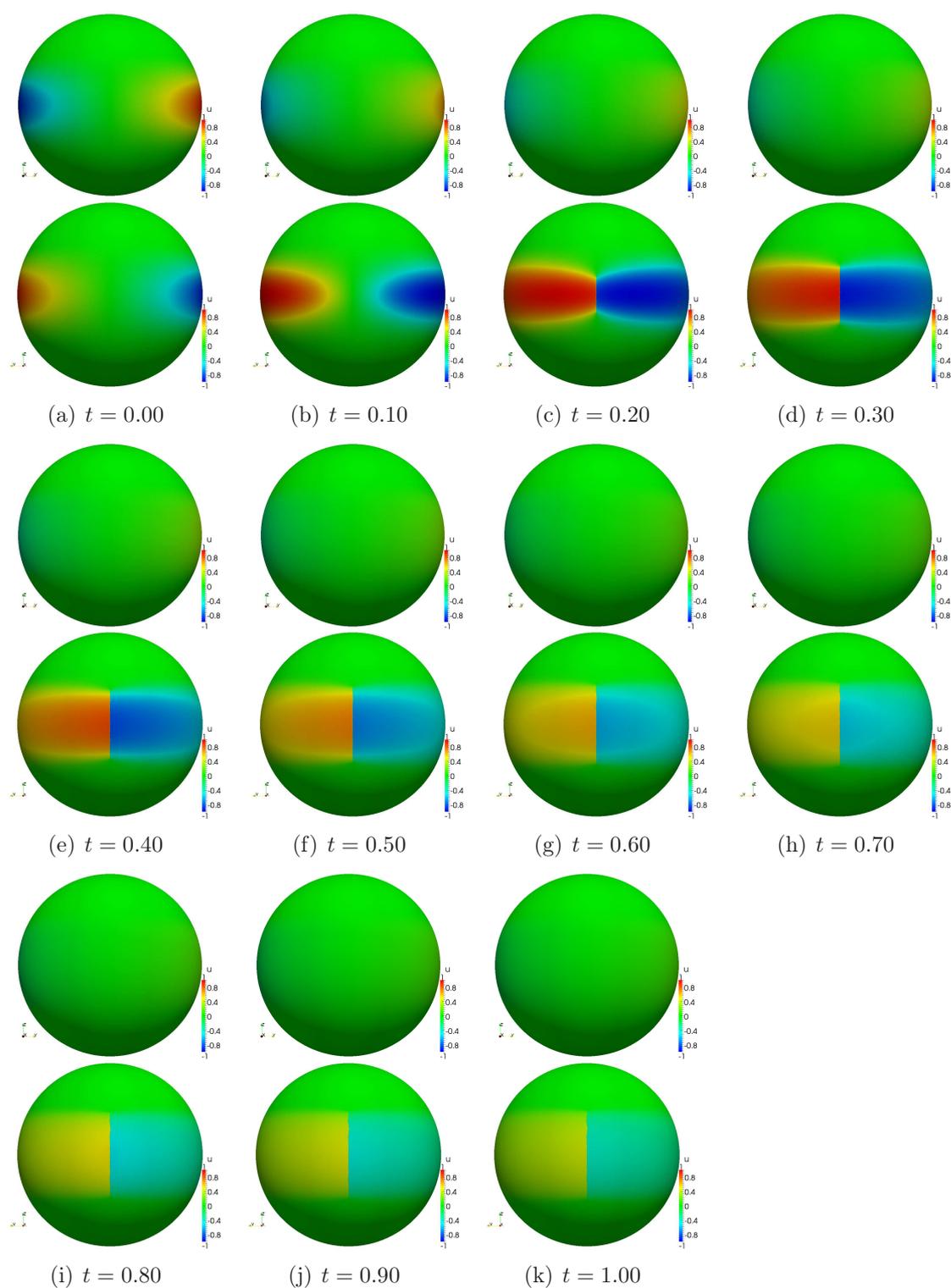


Abbildung 9.12: Zeitlicher Verlauf der numerischen Lösung u^h für **Testproblem 4** auf $sphere(6)$. In jeder der elf Grafiken stellt das obere Bild die Vorder- und das untere die Rückansicht dar.

Testproblem 5 Gesucht sei eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t u + \operatorname{div}_g (\pi u^2 \mathbf{V}_A) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \quad (9.3.6)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0^{\text{IV}} \quad \text{auf } \mathbb{S}^2, \quad (9.3.7)$$

wobei \mathbf{V}_A und u_0^{IV} in Abschnitt 9.2 definiert wurden.

Lösung zu Testproblem 5 Um eine Lösung dieses Problems anzugeben, wollen wir wieder Korollar 6.4.2 anwenden. Demnach reicht es, eine Lösung $\tilde{u} : T^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ des eindimensionalen Anfangswertproblems mit periodischen Randbedingungen

$$\partial_t \tilde{u}(\varphi, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{u}^2(\varphi, t)) = 0 \quad \text{auf } T^1 \times \mathbb{R}^+, \quad (9.3.8)$$

$$\tilde{u}(\varphi, 0) = \mathbb{1}_{\{\varphi < \pi\}}(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in T^1 \quad (9.3.9)$$

zu finden, denn dann ist die Funktion

$$u(\varphi, \theta, t) := \hat{u}_0(\theta) \tilde{u}(\varphi, 2\pi \hat{u}_0(\theta) t) \quad (9.3.10)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (9.3.6) und (9.3.7). Um eine Lösung des Anfangswertproblems (9.3.8) und (9.3.9) zu finden, betrachten wir die Unstetigkeiten an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ in den Anfangsdaten. Die Flussfunktion des eindimensionalen Problems, $\bar{u} \mapsto 1/2 \bar{u}^2$, ist ein Burgers-Fluss. Demnach wird sich an der Stelle $\varphi = 0$ eine Verdünnungswelle ausbilden und die Unstetigkeit bei $\varphi = \pi$ wird sich als Schock nach “rechts” ausbreiten. Die Schockgeschwindigkeit ergibt sich durch die Rankine-Hugoniot Bedingung (siehe z. B. [Krö97, Seite 19]) zu

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Im Zeitintervall $[0, 2\pi]$ interferieren die Verdünnungswelle und der Schock noch nicht. Für diesen Zeitraum ist die Lösung des Anfangswertproblems (9.3.8) und (9.3.9) somit durch

$$\tilde{u}(\varphi, t) = \begin{cases} \varphi/t, & \text{falls } 0 \leq \varphi < t \\ 1, & \text{falls } t \leq \varphi < \pi + t/2 \\ 0, & \text{falls } \pi + t/2 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

gegeben. In Abbildung 9.13 sehen wir \tilde{u} . Wegen $\hat{u}_0 \leq 1$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems (9.3.6) und (9.3.7) somit durch (9.3.10) für alle Zeiten $t \in [0, 1]$ gegeben.

Abbildung 9.15 zeigt die Vorder- und Rückansicht des Fehlers $|u - u^h|$ zum Zeitpunkt $t = 1.0$ und wir können wieder feststellen, dass dieser in der Nähe des Schocks besonderes groß ist.

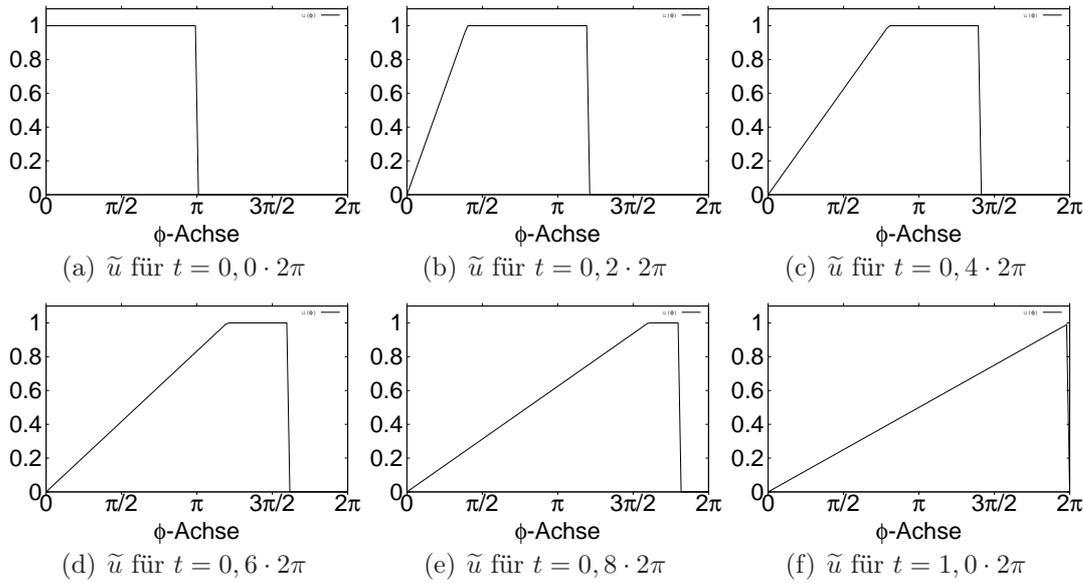


Abbildung 9.13: Zeitliche Entwicklung von \tilde{u} für sechs Zeitpunkte.

In Tabelle 9.6 sind die EOCs zu **Testproblem 5** zu sehen. Die Werte für $\text{EOC}(\bar{h})$ nähern sich von unten der Eins an, wobei die Ungleichmäßigkeit des Gitters wahrscheinlich wieder den Ausreißer für $\text{EOC}(h_{\max})$ in *sphere(6)* verursacht.

Den zeitlichen Verlauf der numerischen Lösung auf *sphere(6)* ist in Abbildung 9.14 geplottet. Man sieht, dass sich die Unstetigkeit bei “ $\varphi = \pi$ ” in Flussrichtung bewegt, und zwar umso schneller, je näher sie am “Äquator” ist. Die andere Unstetigkeit wird sofort stetig und breitet sich als Verdünnungswelle in Flussrichtung aus. Zum Zeitpunkt $t = 1.0$ haben sie sich jeweils eingeholt.

Tabelle 9.6: EOCs für **Testproblem 5**

<i>sphere</i>	$\text{EOC}(h_{\max})$	$\text{EOC}(\bar{h})$
0	—	—
1	0.38	0.40
2	0.84	0.66
3	0.51	0.62
4	0.75	0.73
5	0.82	0.82
6	1.22	0.88

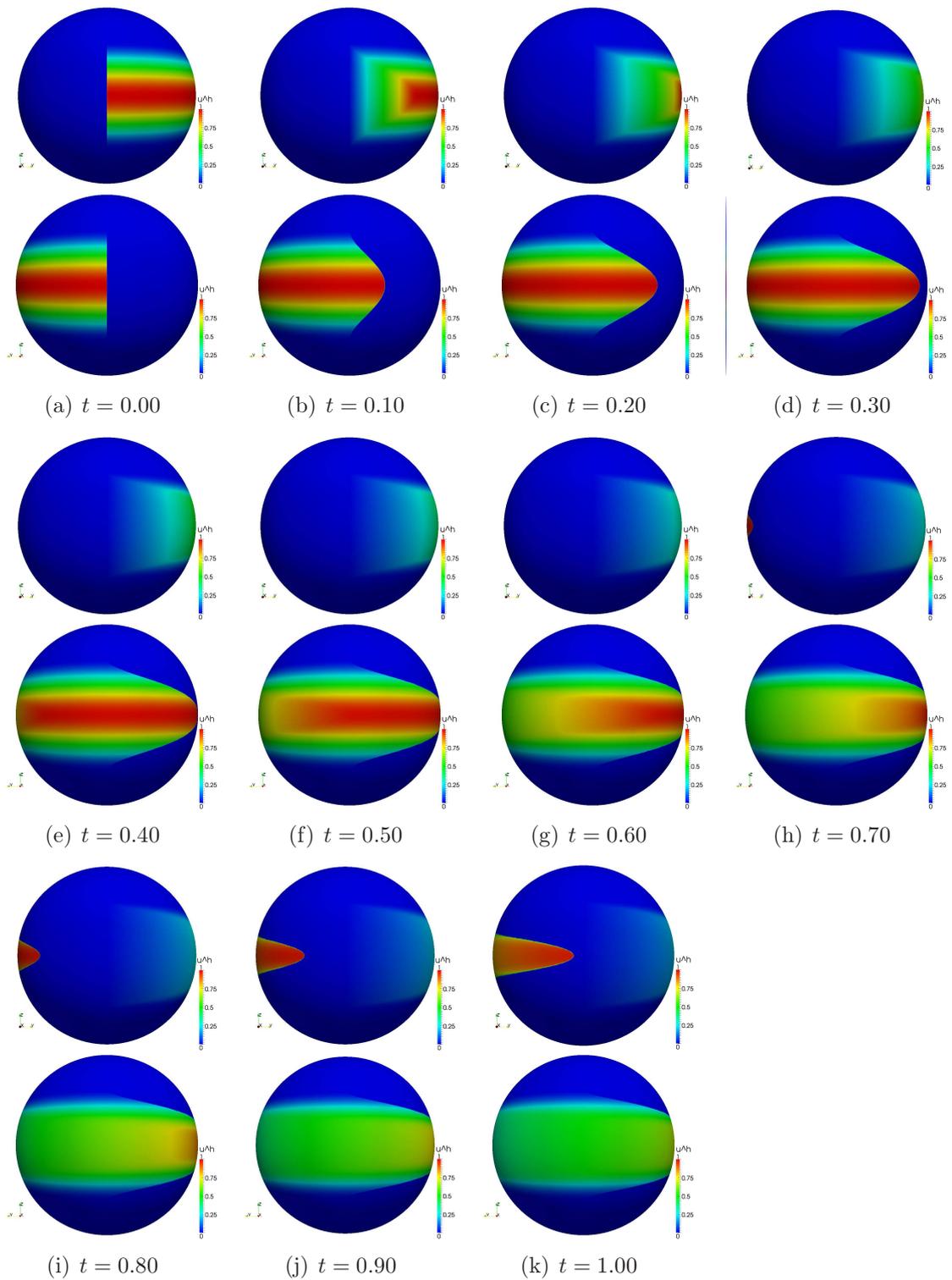


Abbildung 9.14: Zeitlicher Verlauf der numerischen Lösung u^h für **Testproblem 5** auf *sphere(6)*. In jeder der elf Grafiken stellt das obere Bild die Vorder- und das untere die Rückansicht dar.

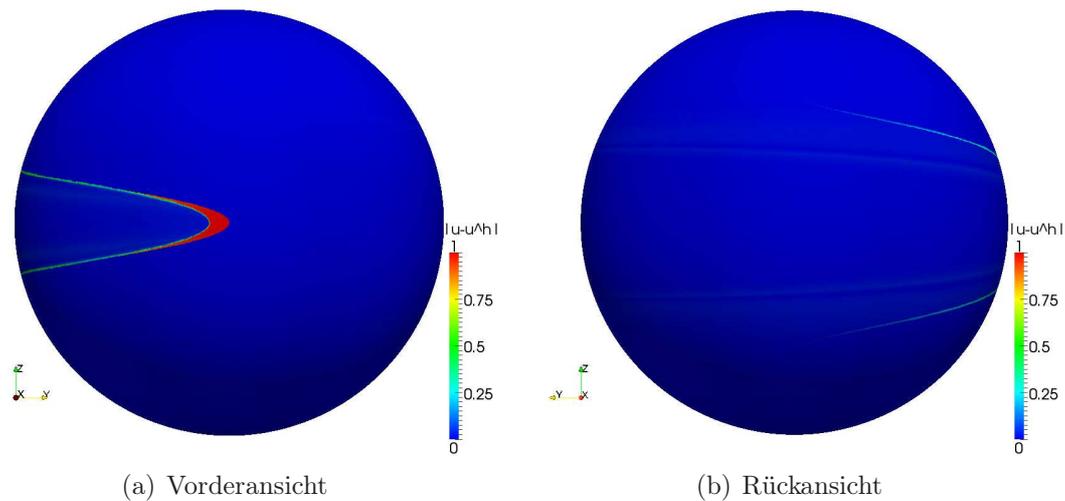


Abbildung 9.15: Vorder- und Rückansicht des Fehlers für **Testproblem 5** auf *sphere(6)* zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

9.3.2 Berechnung der Totalvariation

Nachdem die Implementierung des Finite Volumen Verfahrens im vorangegangenen Unterabschnitt validiert wurde, interessiert uns in diesem Unterabschnitt der zeitliche Verlauf der Totalvariation. Wir wollen numerisch untersuchen, inwiefern sich die theoretischen Ergebnisse für die Totalvariation aus dem Kapitel 4 und für die Totalvariation entlang von Vektorfeldern aus den Kapiteln 5 und 7 auf eine numerische Lösung übertragen. Dazu stellen wir die theoretischen Resultate noch einmal kurz vor, leiten dann jeweils eine Formel zur Berechnung der jeweiligen Totalvariation von stückweise konstanten Funktionen her und präsentieren im Anschluss die Ergebnisse der numerischen Berechnungen.

Die Abschätzungen der Totalvariationen

In Kapitel 4 haben wir eine Abschätzung der Totalvariation von Entropielösungen hergeleitet. Wir konnten zeigen, dass unter den Voraussetzungen von Satz 4.3.2 die Totalvariation einer Entropielösung u im zeitlichen Verlauf endlich bleibt:

$$\text{TV}(u(t)) \leq C_2 \exp(C_A t) \quad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}^+$$

mit Konstanten $C_2, C_A > 0$. Ferner können wir aus Beispiel 4.3.6 ablesen, dass eine TVD⁸-Eigenschaft für Entropielösungen auf Mannigfaltigkeiten keineswegs zu er-

⁸TVD steht für Total Variation Diminishing. Das bedeutet, dass die Totalvariation im zeitlichen Verlauf nicht anwächst.

warten ist.

Für die Totalvariation entlang von Vektorfeldern haben wir in Kapitel 5 eine Abschätzung bewiesen. Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4.1 gilt für ein Vektorfeld \mathbf{X} , dass

$$TV_{\mathbf{X}}(u(t)) \leq TV_{\mathbf{X}}(u(0)), \tag{9.3.11}$$

falls der zugehörige Fluss \mathbf{f} divergenzfrei ist und die Lie-Klammer von $\partial_u \mathbf{f}$ und \mathbf{X} verschwindet, das heißt $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0$ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$. In Kapitel 7 haben wir gezeigt, dass auf einer Sphäre die Bedingung " $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = 0$ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}$ " äquivalent dazu ist, dass es eine Funktion $C : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathbf{X}(C(\bar{u}, \cdot)) = 0$ und

$$\partial_u \mathbf{f}(\bar{u}, \cdot) = C(\bar{u}, \cdot) \mathbf{X} \quad \text{für alle } \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

Totalvariationen von stückweise konstanten Funktionen

Das verwendete Finite Volumen Verfahren ist ein Verfahren erster Ordnung und basiert somit auf stückweise konstanten Funktionen bezüglich einer Triangulierung \mathcal{T}^h . Um die Totalvariation (siehe Definition 4.0.4) und die Totalvariation entlang eines Vektorfelds (siehe Definition 5.2.1) von stückweise konstanten Funktionen berechnen zu können, leiten wir in den folgenden zwei Lemmata Formeln dafür her.

Lemma 9.3.2. *Sei \mathcal{T}^h eine Triangulierung (siehe Definition 8.1.2) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und $u^h \in L^1(M)$ stückweise konstant bezüglich der Triangulierung \mathcal{T}^h , das heißt für jedes $K \in \mathcal{T}^h$ gibt es ein $u_K^h \in \mathbb{R}$ mit*

$$u^h(x) = u_K^h$$

für alle $x \in K$. Dann berechnet sich die Totalvariation von u^h zu

$$TV(u^h) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} |u_K^h - u_{K_e}^h| |e|, \tag{9.3.12}$$

wobei K_e das eindeutige Polyeder bezeichnet, das die Kante e mit K teilt.

Beweis: Wir setzen u^h in die Definition ein, nutzen aus, dass u^h stückweise konstant ist, und wenden den Satz von Gauß an. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{TV}(u^h) &:= \sup_{\substack{\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M) \\ \sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1}} \int_M u^h \operatorname{div}_g(\mathbf{X}) dv_g \\ &= \sup_{\substack{\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M) \\ \sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1}} \sum_{K \in \mathcal{T}^h} u_K^h \int_K \operatorname{div}_g(\mathbf{X}) dv_g \\ &= \sup_{\substack{\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M) \\ \sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1}} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} u_K^h \int_e \langle \mathbf{X}, \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{n}_{e,K}$ das äußere Normalenfeld entlang $e \in \partial K$ bezeichnet. Nutzen wir aus, dass $\mathbf{n}_{e,K} = -\mathbf{n}_{e,K_e}$, dann ist

$$\text{TV}(u^h) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M) \\ \sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1}} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} (u_K^h - u_{K_e}^h) \int_e \langle \mathbf{X}, \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e.$$

Um zu überlegen, welchen Wert das Supremum annimmt, lassen wir für einen Moment die Einschränkung, dass \mathbf{X} glatt sein muss, weg. Das heißt

$$\begin{aligned} \text{TV}(u^h) &\leq \frac{1}{2} \sup_{\sup_M |\mathbf{X}|_g \leq 1} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} (u_K^h - u_{K_e}^h) \int_e \langle \mathbf{X}, \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g dv_e \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} (u_K^h - u_{K_e}^h) \int_e \operatorname{sgn}(u_K^h - u_{K_e}^h) dv_e \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} |u_K^h - u_{K_e}^h| |e|. \end{aligned}$$

Bei der Supremumbildung sind von \mathbf{X} also ausschließlich die Werte auf den Kanten e ausschlaggebend und es wird maximal, wenn entweder $\mathbf{X} = \mathbf{n}_{e,K}$ oder $\mathbf{X} = -\mathbf{n}_{e,K}$, je nachdem, ob $\operatorname{sgn}(u_K^h - u_{K_e}^h) = 1$ oder $\operatorname{sgn}(u_K^h - u_{K_e}^h) = -1$ ist. Im Grenzprozess können auch glatte Vektorfelder $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M)$ diese Konfiguration annähern und es gilt folglich

$$\text{TV}(u^h) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} |u_K^h - u_{K_e}^h| |e|.$$

□

Analog erhält man folgendes Lemma, das eine Formel für die Berechnung der Totalvariation entlang eines Vektorfeldes angibt.

Lemma 9.3.3. *Sei \mathcal{T}^h eine Triangulierung (siehe Definition 8.1.2) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und $u^h \in L^1(M)$ stückweise konstant bezüglich der Triangulierung \mathcal{T}^h . Dann berechnet sich die Totalvariation von u^h entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{X} \in \mathcal{T}(M)$ zu*

$$\mathrm{TV}_{\mathbf{X}}(u^h) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}^h \\ e \in \partial K}} |u_K^h - u_{K_e}^h| \int_e |\langle \mathbf{X}, \mathbf{n}_{e,K} \rangle_g| dv_e,$$

wobei wir die Notationen aus Lemma 9.3.2 verwenden.

Wir wollen später den zeitlichen Verlauf der Totalvariation der diskreten Lösung betrachten. Dabei finden die oben hergeleiteten Formeln Anwendung.

Auswirkung einer Projektion auf die Totalvariation Da die Anfangswerte des Finite Volumen Verfahrens gemäß Gleichung (8.1.11) auf den Raum der stückweise konstanten Funktionen projiziert werden, ist es wichtig, zu verstehen, wie sich diese Projektion auf die Totalvariation auswirken kann. Die folgende Bemerkung und das nächste Beispiel erläutern diese Problematik.

Bemerkung 9.3.4. *Projiziert man eine glatte Funktion durch Mittelwertbildung auf den Raum stückweise konstanter Funktionen bezüglich einer Triangulierung \mathcal{T}^h , so kann dies die Totalvariation verändern. Auch im Grenzwert für $h \rightarrow 0$ ist Gleichheit im Allgemeinen nicht zu erwarten. Das bedeutet, dass die Totalvariation der diskreten Lösung im Allgemeinen unter Gitterverfeinerung nicht gegen die Totalvariation der exakten Lösung konvergiert. Schon die Projektion der Anfangswerte durch Mittelwertbildung kann eine Veränderung der Totalvariation bewirken. Das folgende Beispiel im \mathbb{R}^2 illustriert diesen Sachverhalt.*

Beispiel 9.3.5. *Sei $\Omega := (0, 1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y) := x + y$. Wir wollen eine Triangulierung mit Quadraten als Elemente einführen. Sei dazu $N \in \mathbb{N}$, dann machen wir folgende Definitionen:*

$$\begin{aligned} h &:= \frac{1}{N}, \\ I_i^h &:= (ih, (i+1)h) \text{ für } i = 0, \dots, N-1 \\ I_{ij}^h &:= I_i^h \times I_j^h \subseteq (0, 1)^2 \text{ für } i, j = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

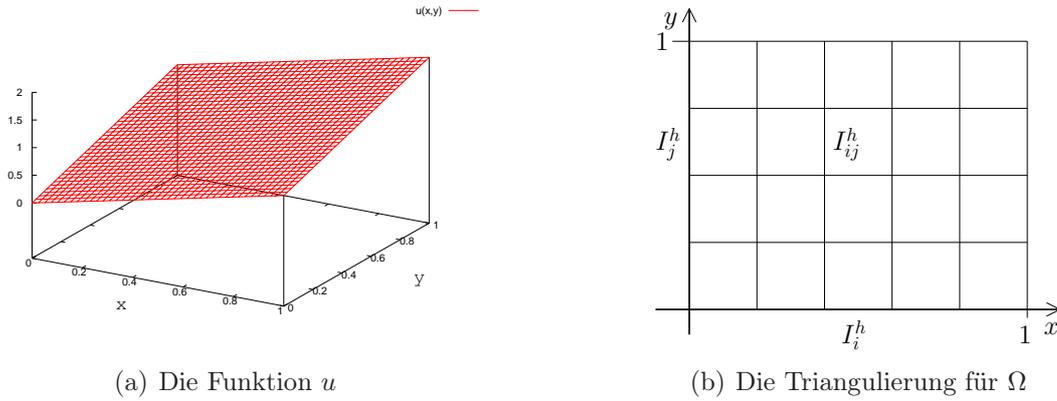
(a) Die Funktion u (b) Die Triangulierung für Ω

Abbildung 9.16: Im linken Bild sehen wir den Graph der Funktion u abgebildet, im rechten Bild die Triangulierung der Menge Ω .

Der Mittelwert u_{ij}^h von u auf dem Quadrat I_{ij}^h berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^h &:= \frac{1}{|I_{ij}^h|} \int_{I_{ij}^h} u \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} x + y \, dx dy \\
 &= \frac{1}{h^2} \left(\int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} x \, dx dy + \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} y \, dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_{ih}^{(i+1)h} x \, dx + \int_{jh}^{(j+1)h} y \, dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{2h} \left((i+1)^2 h^2 - i^2 h^2 + (j+1)^2 h^2 - j^2 h^2 \right) \\
 &= \frac{h}{2} \left(i^2 + 2i + 1 - i^2 + j^2 + 2j + 1 - j^2 \right) \\
 &= (i + j + 1) h = u\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, \left(j + \frac{1}{2}\right)h\right).
 \end{aligned}$$

Die Funktion $u^h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u^h(x) := u_{ij}^h$, falls $x \in I_{ij}^h$, ist somit die Projektion von u auf den Raum der stückweise konstanten Funktionen bezüglich der Triangulierung $\mathcal{T}^h := \{I_{ij}^h \mid i, j = 0, \dots, N-1\}$. Die Totalvariation von u berechnet sich zu

$$\text{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| = \sqrt{2},$$

die Totalvariation von u^h berechnet sich mit Formel (9.3.12) hingegen zu

$$\begin{aligned}
 \text{TV}(u^h) &= \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-2} \underbrace{|u_{i+1j}^h - u_{ij}^h|}_{=h} h + \underbrace{|u_{ij+1}^h - u_{ij}^h|}_{=h} h \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{N-2} \underbrace{|u_{N-1j+1}^h - u_{N-1j}^h|}_{=h} h + \sum_{i=0}^{N-2} \underbrace{|u_{i+1N-1}^h - u_{iN-1}^h|}_{=h} h \\
 &= 2h^2 \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-2} 1 + 2(N-1)h^2 \\
 &= 2h^2(N-1)(N-1) + 2(h-h^2) \\
 &= 2(1-h)(1-h) + 2h - 2h^2 \\
 &= 2 - 4h + 2h^2 + 2h - 2h^2 \\
 &= 2 - 2h.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$\text{TV}(u) = \sqrt{2} \neq 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \text{TV}(u^h).$$

Totalvariationen der numerisch berechneten Lösungen

Wir wollen im Folgenden die zeitliche Entwicklung der Totalvariationen von numerischen Lösungen für einige Testprobleme angeben.

Zunächst aber sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass die Totalvariation $\text{TV}(u^h)$ einer Näherungslösung u^h , die durch das Finite Volumen Verfahren (8.1.10) und (8.1.11) für eine Triangulierung \mathcal{T}^h definiert ist, im Allgemeinen nicht gegen die Totalvariation der exakten Lösung konvergiert, falls die Gitterfeinheit h gegen 0 konvergiert. Dies wird schon durch Beispiel 9.3.5 deutlich gemacht, denn der Schluss, den man daraus ziehen kann, ist, dass im Allgemeinen nicht einmal zum Zeitpunkt $t = 0$ die Totalvariation der numerischen Lösung gegen die Totalvariation der Anfangsdaten konvergiert.

Trotzdem werden wir ein Beispiel sehen, in dem wir zumindest eine Konvergenz der Totalvariation der numerischen Lösung vermuten können. Andererseits werden die Testprobleme zeigen, dass das numerische Verfahren im Allgemeinen keineswegs TVD ist.

Weiter müssen wir feststellen, dass die Voraussetzungen, damit Abschätzung (9.3.11) gilt, in unseren Beispielen in keinem uns ersichtlichen Zusammenhang mit dem Verhalten der Totalvariation der numerischen Lösung entlang von Vektorfeldern stehen.

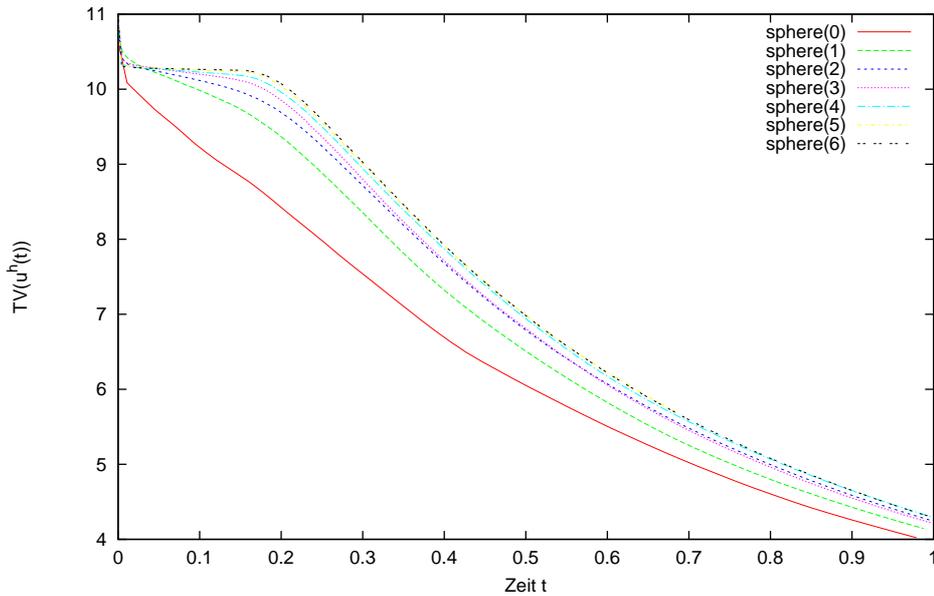


Abbildung 9.17: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für **Testproblem 4** auf den verschiedenen Gittern.

In Abbildung 9.17 sehen wir die zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für **Testproblem 4** aus Unterabschnitt 9.3.1 auf den verschiedenen Gittern. Es hat den Anschein, als ob die Kurven konvergieren, wenn die Gitter feiner werden. Dieses ist jedoch das einzige Testproblem aus dem vorigen Unterabschnitt, bei dem wir eine Konvergenz der Totalvariation vermuten können. Bei allen anderen Testproblemen ist gar nicht oder nicht so deutlich auf eine Konvergenz zu schließen (vgl. Abbildungen 9.18, 9.19, 9.20 und 9.21). Betrachtet man die EOCs für die verschiedenen Testprobleme, dann fällt auf, dass diese nur bei **Testproblem 4** sehr dicht an die Eins herankommen (vgl. Tabelle 9.5). Ein Zusammenhang liegt also nahe. Auch eine TVD-Eigenschaft scheint in diesem speziellen Fall erfüllt zu sein, denn für alle Gitter nimmt $\text{TV}(u^h)$ monoton in der Zeit ab.

Nun wollen wir ein Testproblem betrachten, bei dem der Fluss \mathbf{f} eine Scherung verursacht. Dies war auch schon bei dem Fluss aus Beispiel 4.3.6 der Fall. Betrachtet wird ein linearer Fluss, dem das Vektorfeld \mathbf{V}_B zugrunde liegt.

Testproblem 6 Gesucht sei eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_g(2\pi u \mathbf{V}_B) &= 0 && \text{auf } \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) &= u_0^{\text{III}} && \text{auf } \mathbb{S}^2, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{V}_B und u_0^{III} in Abschnitt 9.2 definiert wurden.

Analog zu Beispiel 4.3.6 würden wir auch hier erwarten, dass die Totalvariation der exakten Lösung im Verlauf der Zeit steigt. In Abbildung 9.22 sehen wir, dass es Zeitintervalle gibt, in denen die Totalvariation der numerischen Lösungen ansteigt. Daraus können wir folgern, dass im Allgemeinen keine TVD-Eigenschaft für das Finite Volumen Verfahren aus Kapitel 8 vorliegt; auch nicht, wenn, wie in diesem Falle, der Fluss \mathbf{f} divergenzfrei ist.

Schließlich möchten wir noch den Verlauf der Totalvariation der numerischen Lösung entlang eines Vektorfeldes, das die Voraussetzungen für Abschätzung (9.3.11) erfüllt, betrachten. Dazu wählen wir **Testproblem 6** und betrachten die Totalvariation entlang des Vektorfeldes $\mathbf{X} = \mathbf{V}_B$. Somit sind die Voraussetzungen für (9.3.11) erfüllt. Abbildung 9.23 macht jedoch deutlich, dass die Totalvariation der numerischen Lösung entlang des Vektorfeldes \mathbf{V}_B trotzdem ansteigen kann.

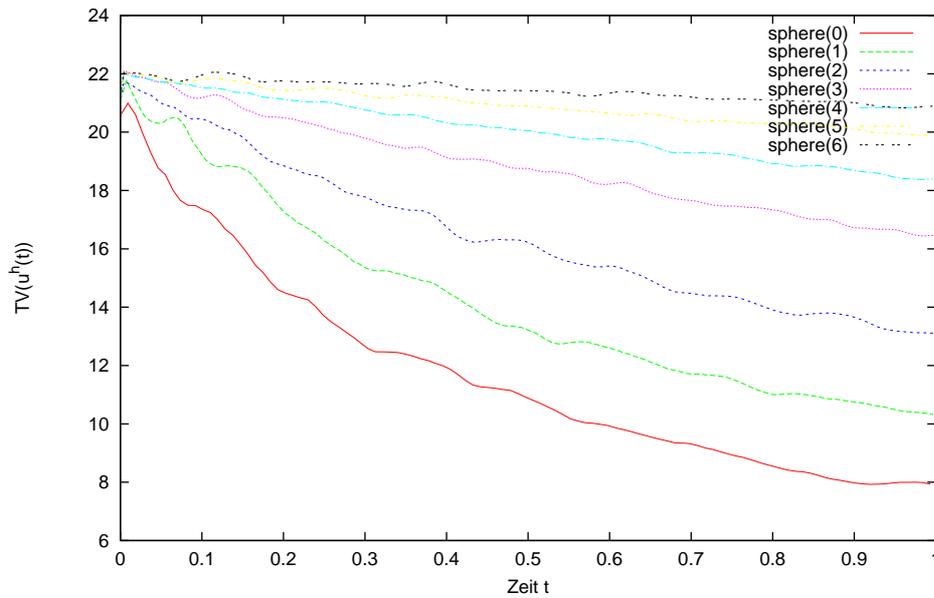


Abbildung 9.18: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für **Testproblem 1** auf den verschiedenen Gittern.

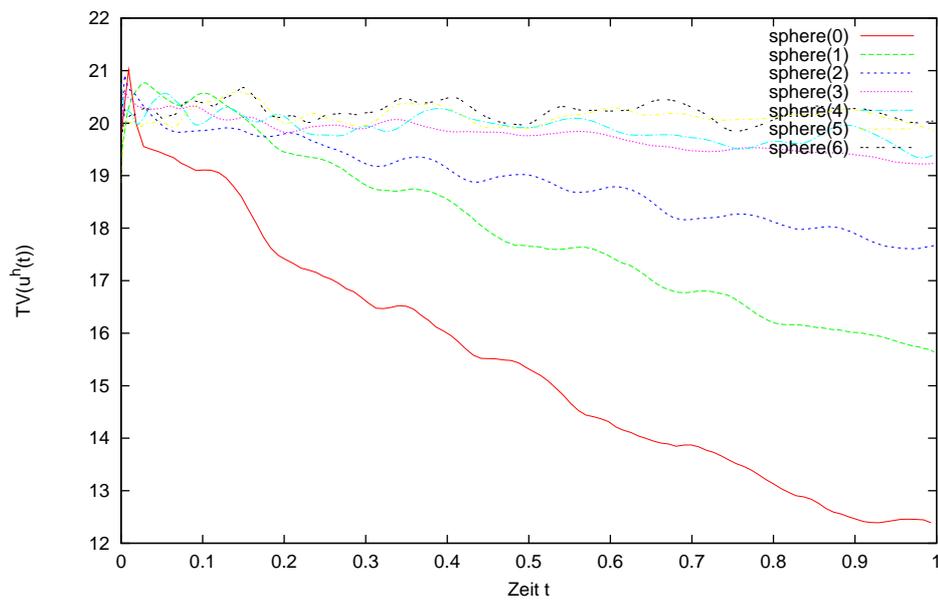


Abbildung 9.19: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für Testproblem 2 auf den verschiedenen Gittern.

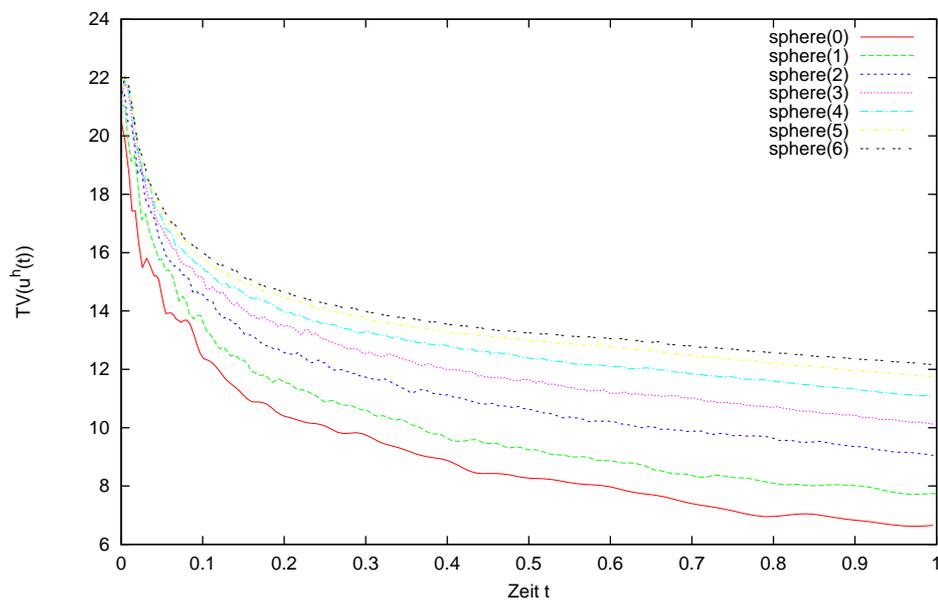


Abbildung 9.20: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für Testproblem 3 auf den verschiedenen Gittern.

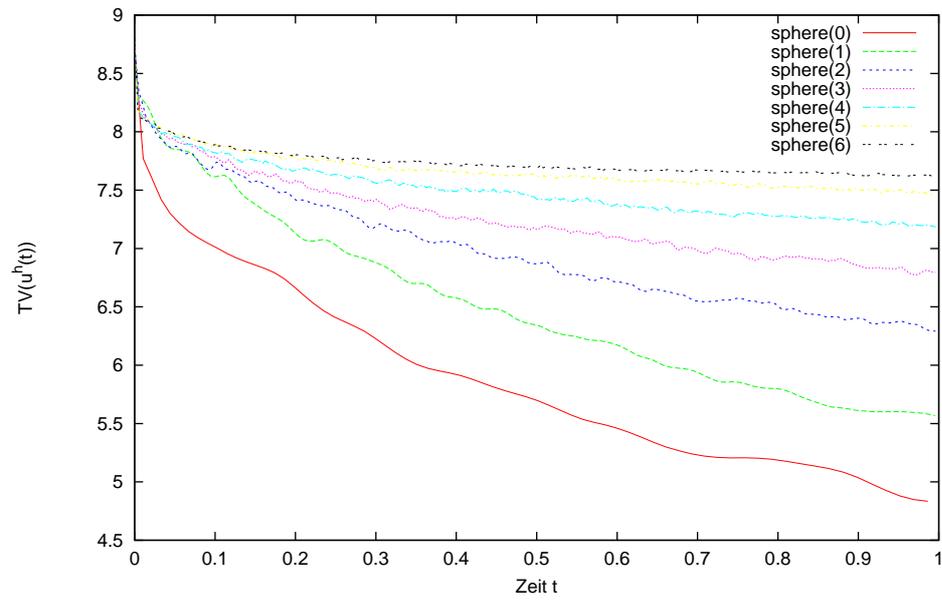


Abbildung 9.21: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für Testproblem 5 auf den verschiedenen Gittern.

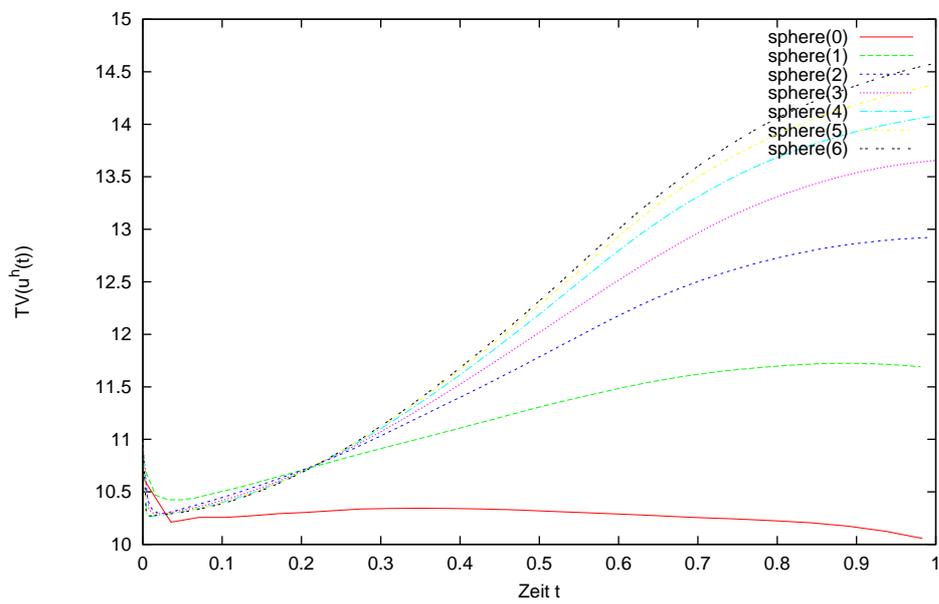


Abbildung 9.22: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h für Testproblem 6 auf den verschiedenen Gittern.

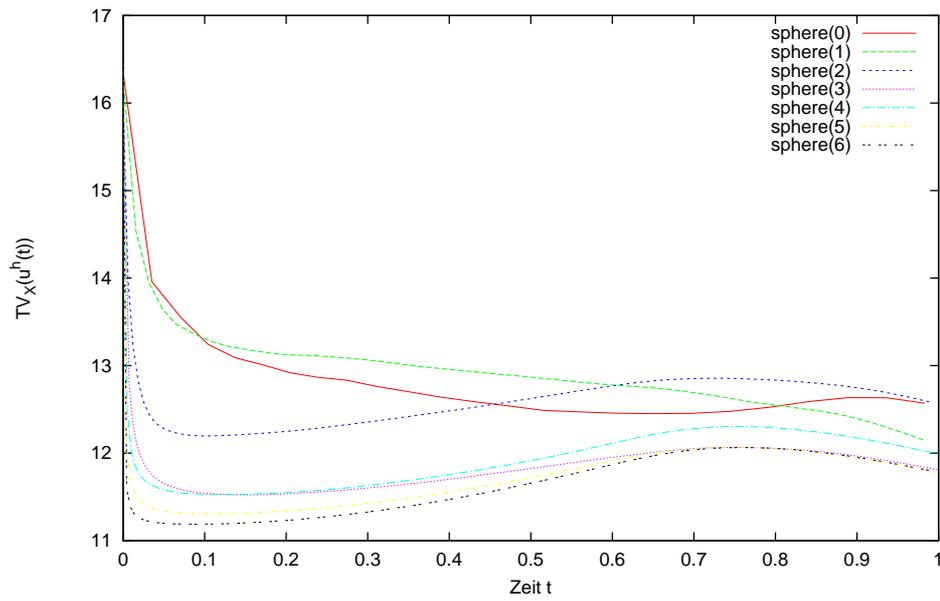


Abbildung 9.23: Zeitliche Entwicklung der Totalvariation von u^h entlang des Vektorfeldes $\mathbf{X} = \mathbf{V}_B$ für **Testproblem 6** auf den verschiedenen Gittern.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben uns in dieser Arbeit ausführlich mit skalaren Erhaltungsgleichungen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschäftigt. Dazu notwendig war eine intensive Einführung in die differentialgeometrischen Grundlagen.

Auf diesen Grundlagen und auf der Theorie über skalare Erhaltungsgleichungen im \mathbb{R}^n aufbauend konnten wir einen Lösungsbegriff, den der Entropielösung, entwickeln, der auch den Fall nicht divergenzfreier Flüsse miteinschließt.

Es ist uns gelungen, die Existenz von Entropielösungen durch eine gleichmäßige Abschätzung der Totalvariation zu beweisen für den Fall, dass die Mannigfaltigkeit zweidimensional ist. Beim Beweis einer solchen Abschätzung durch Ben-Artzi und LeFloch [BAL07] konnten bis heute nicht alle Zweifel an der Richtigkeit des Beweises beseitigt werden, was die Bedeutsamkeit unseres Ergebnisses unterstreicht. Auf der Basis unserer Resultate kann die Totalvariation durch eine Konstante, die von der Zeit abhängt, abgeschätzt werden. Um sicher zu gehen, dass die Entropielösung im Allgemeinen in der Tat keine TVD-Eigenschaft¹ erfüllt, wurde ein Beispiel konstruiert und vorgestellt, bei dem sich die Totalvariation im zeitlichen Verlauf erhöht. Das Beispiel macht deutlich, dass dieses Phänomen schon aus der Ortsabhängigkeit des Flusses und nicht etwa erst aus einer fehlenden Divergenzfreiheit oder etwa der Geometrie der Mannigfaltigkeit hervorgerufen wird.

Ausgehend von dieser Tatsache haben wir die Ideen von Amorim et al. [ABAL05], eine Totalvariation entlang von Vektorfeldern einzuführen und Abschätzungen dazu herzuleiten, ausführlich dargestellt.

Da die 2-Sphäre ein wichtiger Spezialfall, nicht nur innerhalb unserer Theorie, sondern auch von geophysikalischen Anwendungen, ist, sind wir darauf genauer eingegangen und haben im Hinblick auf die Berechnung der experimentellen Konvergenzordnungen eine Klasse von Anfangswertproblemen entwickelt, die äquivalent zu

¹TVD steht für Total Variation Diminishing, das heißt die Totalvariation wächst im zeitlichen Verlauf nicht an.

eindimensionalen Problemen mit periodischen Randdaten sind.

Um numerische Berechnungen durchzuführen, haben wir das Finite Volumen Verfahren und dessen Konvergenzbeweis von Amorim et al. [ABAL05] eingeführt und detailliert dargestellt. Dazu wurde ein neuer Beweis der diskreten Entropieungleichung geliefert, da dieser in der Literatur noch fehlte. Das Konzept von Lax-Friedrichs- und Engquist-Osher-Flüssen wurde auf den vorliegenden Hintergrund übertragen und es wurde gezeigt, dass beide die Voraussetzung für die Konvergenz des numerischen Verfahrens erfüllen.

Schließlich konnten wir ein Finite Volumen Verfahren implementieren, bei dem wir als numerische Flüsse sowohl den Lax-Friedrichs- als auch den Engquist-Osher-Fluss verwendet haben, die wir zuvor als sinnvoll gerechtfertigt hatten. Durch die Kenntnis von Testproblemen, die äquivalent zu eindimensionalen Gleichungen sind, konnten wir Beispielrechnungen auf der 2-Sphäre durchführen und somit die experimentellen Konvergenzordnungen des Verfahrens für einige Testprobleme bestimmen. Da die Abschätzung der Totalvariation von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit ist, sind wir zum Schluss auf die Totalvariation der Näherungslösungen eingegangen. Diese sind stückweise konstant, deswegen wurde eine Formel zur Berechnung der Totalvariation von stückweise konstanten Funktionen hergeleitet. Bei der Erforschung, wie sich die Projektion einer stetigen Funktion auf den Raum stückweise konstanter Funktionen bezüglich einer Triangulierung auf die Totalvariation auswirkt, haben wir herausgefunden, dass diese, falls die Feinheit der Triangulierung gegen Null geht, im Allgemeinen nicht gegen die Totalvariation der ursprünglichen Funktion konvergiert. Dies würden wir bloß im Eindimensionalen so erwarten. Die Interpretation dieser Erkenntnis ist, dass wir bisher keine gesicherten Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Totalvariation der numerischen Lösung und derjenigen der exakten Lösung treffen können, da die Anfangswerte des Finite Volumen Verfahrens durch eine solche Projektion entstehen.

Als interessante Erweiterung für die Zukunft kommt der Beweis der Totalvariationsabschätzung für mehr als zwei Dimensionen in Frage, denn bei Anwendungen aus der Relativitätstheorie liegen gewöhnlicherweise vierdimensionale Raumzeiten vor.

Eine andere Erweiterung könnte darin bestehen, die Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit zu lockern. So könnte man zum Beispiel Mannigfaltigkeiten, die nicht kompakt sind, oder solche mit Rand betrachten.

Da skalare Erhaltungsgleichungen nur ein Modellproblem sind, sollten stets Systeme von Erhaltungsgleichungen im Blick behalten werden. Hierbei wird in der Forschung ein starker Schwerpunkt auf die Flachwassergleichungen auf der Sphäre gelegt, da diese einerseits sehr nah an der geophysikalischen Anwendung liegen, andererseits allgemeinere Betrachtungen von Systemen oft mit enormen Schwierigkeiten verbun-

den sind.

Abschließend sei als Erweiterung die Betrachtung zeitabhängiger Mannigfaltigkeiten genannt, möglicherweise mit einer Kopplung der zeitlichen Entwicklung der Mannigfaltigkeit und der Erhaltungsgleichung.

Anhang A

Hilfssätze

Lemma A.0.6 (diskretes Lemma von Gronwall). Seien $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ nichtnegative Folgen in den reellen Zahlen mit $w_0 \leq a_0$ und

$$w_n \leq a_n + b \sum_{j=0}^{n-1} w_j, \quad n \geq 1$$

für eine nichtnegative Konstante $b \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$w_n \leq a_n \exp(nb).$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir z_n sukzessive durch

$$\begin{aligned} z_0 &:= a_0, \\ z_n &:= a_n + b \sum_{j=0}^{n-1} z_j, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Damit gilt $z_n - z_{n-1} = a_n - a_{n-1} + bz_{n-1}$ für $n \geq 1$ oder äquivalent dazu, mit $\eta_{n-1} := a_n - a_{n-1}$, auch $z_n = \eta_{n-1} + (1+b)z_{n-1}$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$z_n \leq \left(z_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \right) \exp(nb). \quad (\text{A.0.1})$$

Als Induktionsanfang betrachten wir (A.0.1) für $n = 0$, d.h. $z_0 \leq z_0$, was trivialerweise erfüllt ist. Wenn wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, dass (A.0.1) für alle $n \leq N$ gilt, dann folgt daraus mit $0 \leq 1 \leq 1+b \leq \exp(b) \leq \exp((n+1)b)$,

dass

$$\begin{aligned}
z_{N+1} &= \eta_N + (1+b)z_N \\
&\leq \eta_N + (1+b) \left(z_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j \right) \exp(Nb) \\
&\leq \eta_N \exp((N+1)b) + \exp(b) \left(z_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j \right) \exp(Nb) \\
&\leq \eta_N \exp((N+1)b) + \left(z_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j \right) \exp((N+1)b) \\
&= \left(z_0 + \sum_{j=0}^N \eta_j \right) \exp((N+1)b).
\end{aligned}$$

Somit gilt (A.0.1) für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Auflösen der Teleskopsumme $\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} - a_j = a_n - a_0$ in (A.0.1) und mit $z_0 = a_0$ erhalten wir

$$z_n \leq \left(z_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \right) \exp(nb) = a_n \exp(nb). \quad (\text{A.0.2})$$

Mit Induktion folgt sofort, dass $w_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und deshalb folgt aus (A.0.2) die Behauptung. \square

Definition A.0.7 (Konvexitätsmodul, konvexe Hülle). Sei $U \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und sei $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$ eine Konvexkombination von $v \in \mathbb{R}$, das heißt $v_j \in \mathbb{R}$, $a_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^q a_j = 1$. Das Konvexitätsmodul α von U bezüglich der konvexen Hülle

$$\text{Co}(v_1, \dots, v_q) := \left\{ \sum_{j=1}^q b_j v_j \mid b_j \in [0, 1], j = 1, \dots, q, \sum_{j=1}^q b_j = 1 \right\}$$

ist definiert durch

$$\alpha := \inf \{ U''(w) \mid w \in \text{Co}(v_1, \dots, v_q) \}.$$

Lemma A.0.8. Sei $U \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und sei $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$ eine Konvexkombination von $v \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$U(v) + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^q a_j |v_j - v|^2 \leq \sum_{j=1}^q a_j U(v_j),$$

wobei α das Konvexitätsmodul (vgl. Definition A.0.7) bezeichnet.

Beweis: Nach Taylorentwicklung finden wir für jedes $j \in \{1, \dots, q\}$ ein $\xi_j \in \text{Co}(v_1, \dots, v_q)$, so dass jeweils

$$U(v_j) = U(v) + (v_j - v)U'(v) + \frac{|v_j - v|^2}{2}U''(\xi_j).$$

Multiplikation mit a_j und Summation über $j = 1, \dots, q$ liefert

$$\sum_{j=1}^q a_j U(v_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^q a_j U(v)}_{=U(v)} + \underbrace{\sum_{j=1}^q a_j (v_j - v)U'(v)}_{=0} + \sum_{j=1}^q a_j \frac{|v_j - v|^2}{2} U''(\xi_j).$$

Wenn wir ausnutzen, dass $v = \sum_{j=1}^q a_j v_j$ und $\sum_{j=1}^q a_j = 1$, erhalten wir

$$U(v) + \sum_{j=1}^q a_j \frac{|v_j - v|^2}{2} U''(\xi_j) = \sum_{j=1}^q a_j U(v_j).$$

Daraus folgt

$$U(v) + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^q a_j |v_j - v|^2 \leq \sum_{j=1}^q a_j U(v_j).$$

□

Lemma A.0.9 (Jensensche Ungleichung, [Jen06]). Für eine konvexe Funktion $U \in C^0(\mathbb{R})$, positive λ_i mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$U\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i U(x_i). \quad (\text{A.0.3})$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über n . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $n = 2$ entspricht (A.0.3) gerade der Definition einer konvexen Funktion. Angenommen (A.0.3) gelte für ein $n \geq 2$. Seien nun λ_i positiv mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n+1$. Wir setzen

$$\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad \text{und} \quad x := \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i.$$

Damit gilt

$$\lambda + \lambda_{n+1} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Nach der Definition der Konvexität und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} U\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &\leq \lambda U(x) + \lambda_{n+1} U(x_{n+1}) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} U(x_i) + \lambda_{n+1} U(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i U(x_i). \end{aligned}$$

□

Anhang B

Diskretisierungsfehler

Beweis von Lemma 8.3.3: Wir wollen zuerst (8.3.5) herleiten. Sei dazu $\bar{t} \in [t_n, t_{n+1}]$ und $\bar{x} \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 & \left| \partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \widehat{\partial_t \phi_K}^n \right| = \left| \partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{1}{\tau} \left(\sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} (\phi_e^n - \phi_e^{n-1}) \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \left[\partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{1}{\tau^2 |e|} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \phi(x, t) dv_e(x) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_e \phi(x, t) dv_e(x) dt \right) \right] \right| \\
 &= \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{1}{\tau^2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(x, t) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \phi(x, t) dt \right) \right] dv_e(x) \right| \\
 &= \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{1}{\tau^2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \phi(x, t + \tau) - \phi(x, t) dt \right) \right] dv_e(x) \right|
 \end{aligned}$$

Nach Taylorentwicklung und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \phi(x, t + \tau) - \phi(x, t) dt \\
 &= \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \phi(x, t) + \tau \partial_t \phi(x, t) + \frac{\tau^2}{2} \partial_t^2 \phi(x, s_2(x, t)) - \phi(x, t) dt \\
 &= \partial_t \phi(x, s_1(x)) + \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t^2 \phi(x, s_2(x, t)) dt
 \end{aligned}$$

mit $t_{n-1} \leq s_1(x) \leq t_n$ und $t_{n-1} \leq s_2(x, t) \leq t_{n+1}$ für $x \in K$ und $t_{n-1} \leq t \leq t_n$. Somit

ist

$$\begin{aligned}
\left| \partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \widehat{\partial_t \phi_K}^n \right| &= \left| \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \partial_t \phi(x, s_1(x)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t^2 \phi(x, s_2(x, t)) dt \right] dv_e(x) \right| \\
&\leq \sum_{e \in \partial K} \frac{|e|}{p_K} \frac{1}{|e|} \int_e |\partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \partial_t \phi(x, s_1(x))| dv_e(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \tau \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])}.
\end{aligned}$$

Mit Taylorentwicklung und Lemma 2.10.15 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|e|} \int_e |\partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \partial_t \phi(x, s_1(x))| dv_e(x) \\
&= \frac{1}{|e|} \int_e |\partial_t \phi(\bar{x}, s_1(x)) + (\bar{t} - s_1(x)) \partial_t^2 \phi(\bar{x}, s_3(x)) - \partial_t \phi(x, s_1(x))| dv_e(x) \\
&\leq \frac{1}{|e|} \int_e \|\nabla_g \partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])} \underbrace{d_g(\bar{x}, x)}_{\leq h_K} dv_e(x) + 2\tau \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])} \\
&\leq h_K \|\nabla_g \partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])} + 2\tau \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])},
\end{aligned}$$

wobei $t_{n-1} \leq s_3(x) \leq t_{n+1}$. Insgesamt gilt somit

$$\left| \partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) - \widehat{\partial_t \phi_K}^n \right| \leq h_K \|\nabla_g \partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])} + 3\tau \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(K \times [t_{n-1}, t_{n+1}])},$$

womit (8.3.5) bewiesen ist.

Um Gleichung (8.3.6) zu beweisen, berechnen wir mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\left| \phi_e^n - \widehat{\phi_K}^n \right| &= \left| \frac{1}{\tau |e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \phi(x, t) dv_e dt - \sum_{e' \in \partial K} \frac{|e'|}{p_K} \frac{1}{\tau |e'|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{e'} \phi(x, t) dv_{e'} dt \right| \\
&= \left| \phi(x_e, t_e) - \sum_{e' \in \partial K} \frac{|e'|}{p_K} \phi(x_{e'}, t_{e'}) \right| \\
&\leq \sum_{e' \in \partial K} \frac{|e'|}{p_K} |\phi(x_e, t_e) - \phi(x_{e'}, t_{e'})|,
\end{aligned}$$

wobei $(x_e, t_e) \in e \times [t_n, t_{n+1}]$ und $(x_{e'}, t_{e'}) \in e' \times [t_n, t_{n+1}]$. Analog zur Rechnung im Beweis von (8.3.5) erhalten wir mit Taylorentwicklung und Lemma 2.10.15, dass

$$\left| \phi_e^n - \widehat{\phi_K}^n \right| \leq h_K \|\nabla_g \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])} + \tau \|\partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])}.$$

Abschätzung (8.3.7) folgt aus dem Mittelwertsatz und Lemma 2.10.15:

$$\begin{aligned}
|\phi_e^n - \phi_K^n| &= \left| \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{|e|} \int_e \phi(x, t) dv_e - \frac{1}{|K|} \int_K \phi(x, t) dv_M dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(x_e, t) - \phi(x_K, t) dt \right| \\
&\leq h_K \|\nabla_g \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])},
\end{aligned}$$

wobei $x_e \in e$ und $x_K \in K$.

Abschätzung (8.3.8) erhalten wir aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned}
|\phi_K^{n+1} - \phi_K^n| &= \left| \frac{1}{|K|} \int_K \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(x, t) dt - \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(x, t) dt dv_g \right| \\
&\leq \frac{1}{|K|} \int_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \frac{\phi(x, t + \tau) - \phi(x, t)}{\tau} \right| dt dv_g \\
&\leq \frac{1}{|K|} \int_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])} dt dv_g \\
&\leq \tau \|\partial_t \phi\|_{L^\infty(K \times [t_n, t_{n+1}])}.
\end{aligned}$$

□

Anhang C

Der Datenträger

Der vorliegenden Diplomarbeit ist ein Datenträger beigelegt. Darauf ist die im Rahmen dieser Diplomarbeit entstandene Software sowie ein Video enthalten.

C.1 Inhalt des Datenträgers

Wir wollen nun den Inhalt des Datenträgers angeben. Darauf befinden sich die folgenden Ordner:

`tarballs/` Enthält alle Module, die zur Installation benötigt werden. Die Installation wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

`macrogrids/` Enthält ein Archiv, in dem die Macrogriddateien der *sphere(·)*-Gitter aus Unterabschnitt 9.1.1 vorliegen. Sie sind nötig, um numerische Lösungen zu den Testprobleme aus Abschnitt 9.3 zu berechnen.

Des Weiteren ist auf dem Datenträger die Datei `config.opts` zu finden, die Konfigurationsparameter für die DUNE-Module enthält. Die Datei `TP4sphere6.avi` ist ein Video, auf dem die zeitliche Entwicklung der numerischen Lösung für **Testproblem 4** auf *sphere(6)* zu sehen ist.

C.1.1 Versionsnummern und Quellen

Das Verzeichnis `tarballs/` enthält folgende Archive, die zum Ausführen des Programms benötigt werden.

`dune-common-1.3svn.tar.gz`, DUNE-COMMON, v1.3 unstable (trunk), revision 5505 vom 14. April 2009,

`dune-grid-1.3svn.tar.gz`, DUNE-GRID, v1.3 unstable (trunk), revision 5059 vom 21. April 2009,

`dune-psg-0.3.tar.gz`, DUNE-PSG, v0.3 unstable (trunk), revision 357 vom 19. April 2009,

`psg-0.3.tar.gz`, psg, v0.3,

`ParMetis-3.1.1.tar.gz`, ParMetis, v3.1.1.

Die Module DUNE-COMMON und DUNE-GRID sind Kernmodule des DUNE-Projekts, welches schon in Unterabschnitt 9.1.1 beschrieben wurde.

Sowohl psg als auch DUNE-PSG wurden von Martin Nolte in der Abteilung für angewandte Mathematik an der Albert-Ludwigs Universität Freiburg entwickelt. Das Programm ParMetis kann in der Version 3.1.1 von der Internetseite

<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/parmetis/download> ¹

heruntergeladen werden.

C.2 Installation der Software

Entpacken Sie bitte die Archive im Verzeichnis `tarballs/` des Datenträgers alle in ein Verzeichnis auf Ihre Festplatte. Dieses Verzeichnis bezeichnen wir im Folgenden mit `$DIR`. Sie müssen also bei den folgenden Anweisungen stets `$DIR` durch das Verzeichnis auf Ihrer Festplatte ersetzen, in das Sie die Archive entpackt haben. Zunächst ist es notwendig, dass die externe Software, das heißt ParMetis und psg, installiert wird.

C.2.1 Installation von ParMetis und psg

Da ParMetis von psg benötigt wird, installieren Sie bitte zuerst ParMetis. Eine Anleitung dazu finden Sie in der Datei `$DIR/ParMetis-3.1.1/INSTALL`. Danach installieren Sie bitte psg. Wechseln Sie dazu in das Verzeichnis `$DIR/psg-0.3` und geben Sie die Befehle

```
> ./configure -with-parmetis=$DIR/ParMetis-3.1.1
> make
```

ein.

¹Der Download der hier verwendete Version fand am 5. November 2009 statt.

C.2.2 Installation der DUNE-Module

Zur Konfiguration der DUNE-Module finden Sie auf dem Datenträger im Verzeichnis `software` die Datei `config.opts`. Kopieren Sie diese Datei in das Verzeichnis `$DIR`. In der Datei `config.opts` müssen Sie noch an den zwei entsprechenden Stellen angeben, in welchen Verzeichnissen sich die externen Module ParMetis und psg befinden. Haben Sie dies erledigt, so können Sie im Verzeichnis `$DIR` mit dem Aufruf

```
> ./dune-common-1.3svn/bin/dunecontrol --opts=config.opts all
```

die Konfiguration der DUNE-Module ausführen lassen. Damit ist die Installation abgeschlossen.

C.3 Lösen der Testprobleme mit der Software

Um die Testberechnungen, die in Kapitel 9 gemacht wurden, von der mitgelieferten Software ausführen lassen zu können, benötigen Sie, nachdem die Installation gemäß Unterabschnitt C.2 erfolgreich abgeschlossen wurde, noch die MacroGitter-Dateien für die Gitter `sphere(0)` bis `sphere(6)` (vgl. Unterabschnitt 9.1.1). Dazu entpacken Sie bitte das Archiv `macrogrids/macrogrids.tar.gz` vom Datenträger nach `$DIR/fvsphere-0.1/`.

Das eigentliche Programm, das die Berechnungen ausführt, finden Sie im Ordner `$DIR/fvsphere-0.1/firstorder` unter dem Dateinamen `firstorder`. Da die Parametereingaben des Programms nicht an die Bezeichnungen in dieser Diplomarbeit angepasst sind, ist im Ordner `$DIR/fvsphere-0.1/testproblems` das Programm `testproblems` zu finden, was die Bezeichnungen in dieser Diplomarbeit als Parameter annimmt und dann automatisch das Programm `firstorder` mit den entsprechenden Parametern ausführt. Dabei gibt der erste Parameter die Nummer des Testproblems gemäß Abschnitt 9.3 an und der zweite Parameter die Nummer des `sphere(·)`-Gitters (vgl. dazu Unterabschnitt 9.1.1), auf dem Sie rechnen lassen wollen. Um Ordnung zu wahren, werden automatisch entsprechende Verzeichnisse angelegt und die Ausgabe darin abgelegt.

Wollen Sie also zum Beispiel **Testproblem 1** auf dem Gitter `sphere(2)` rechnen, so lautet der Aufruf dazu im Verzeichnis `$DIR/fvsphere-0.1/testproblems`

```
> ./testproblems 1 2
```

Es werden die Verzeichnisse `$DIR/fvsphere-0.1/testproblems/TP1/sphere2` er-

stellt, in die auch die Ausgabedateien abgelegt werden. Diese können Sie dann mit dem Programm Paraview auslesen und sich die Ergebnisse anzeigen lassen.

Mit einem optionalen dritten Parameter können Sie angeben, mit wie vielen parallelen Prozessen Sie arbeiten möchten. Falls kein dritter Parameter eingegeben wird, so wird mit der jeweils maximalen, implementierten Anzahl gerechnet.

Literaturverzeichnis

- [ABAL05] AMORIM, P., M. BEN-ARTZI und P. G. LEFLOCH: *Hyperbolic conservation laws on manifolds: total variation estimates and the finite volume method*. *Methods Appl. Anal.*, 12(3):291–323, 2005.
- [ALO08] AMORIM, P., P. G. LEFLOCH und B. OKUTMUSTUR: *Finite volume schemes on Lorentzian manifolds*. *Commun. Math. Sci.*, 6(4):1059–1086, 2008.
- [AMR88] ABRAHAM, R., J. E. MARSDEN und T. RATIU: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Band 75 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Zweite Auflage, 1988.
- [Aub82] AUBIN, T.: *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Band 252 der Reihe *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [BAFL09] BEN-ARTZI, M., J. FALCOVITZ und P. G. LEFLOCH: *Hyperbolic conservation laws on the sphere. A geometry-compatible finite volume scheme*. *J. Comput. Phys.*, 228(16):5650–5668, 2009.
- [BAL07] BEN-ARTZI, M. und P. G. LEFLOCH: *Well-posedness theory for geometry-compatible hyperbolic conservation laws on manifolds*. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24(6):989–1008, 2007.
- [BBD⁺08a] BASTIAN, P., M. BLATT, A. DEDNER, C. ENGWER, R. KLÖFKORN, R. KORNHUBER, M. OHLBERGER und O. SANDER: *A generic grid interface for parallel and adaptive scientific computing. II: Implementation and tests in DUNE*. *Computing*, 82(2-3):121–138, 2008.
- [BBD⁺08b] BASTIAN, P., M. BLATT, A. DEDNER, C. ENGWER, R. KLÖFKORN, M. OHLBERGER und O. SANDER: *A generic grid interface for parallel and adaptive scientific computing. I: Abstract framework*. *Computing*, 82(2-3):103–119, 2008.

- [BLSS04] BARNES, A. P., P. G. LEFLOCH, B. G. SCHMIDT und J. M. STEWART: *The Glimm scheme for perfect fluids on plane-symmetric Gowdy spacetimes*. Classical and Quantum Gravity, 21:5043–5074, November 2004.
- [CFL28] COURANT, R., K. O. FRIEDRICHS und H. LEWY: *Über die partiellen differenzialgleichungen der mathematischen Physik*. Math. Annalen, 100:32–74, 1928.
- [CHL08] CALHOUN, D., C. HELZEL und R.J. LEVEQUE: *A finite volume grid for solving hyperbolic problems on the sphere*. Benzoni-Gavage, Sylvie (ed.) et al., Hyperbolic problems. Theory, numerics and applications. Proceedings of the 11th international conference on hyperbolic problems, Ecole Normale Supérieure, Lyon, France, July 17–21, 2006. Berlin: Springer. 355-362 (2008)., 2008.
- [CP96] CHO, J. Y.-K. und L. M. POLVANI: *The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere*. Phys. Fluids, 8(6):1531–1552, 1996.
- [dC92] CARMO, M. P. DO: *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [DiP85] DIPERNA, R. J.: *Measure-valued solutions to conservation laws*. Arch. Rational Mech. Anal., 88(3):223–270, 1985.
- [DLSS05] DUEZ, M.D., Y.T. LIU, S.L. SHAPIRO und B.C. STEPHENS: *Numerical relativistic magnetohydrodynamics in dynamical spacetimes: Numerical methods and tests*. Phys. Rev. D, 72:1–21, 2005.
- [dun] *DUNE - Distributed and Unified Numerics Environment*. <http://www.dune-project.org/>.
- [Eva98] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*, Band 19 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Fon03] FONT, J. A.: *Numerical Hydrodynamics in General Relativity*. Living Reviews in Relativity, 6(4), 2003.
- [Fon08] FONT, J. A.: *Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity*. Living Reviews in Relativity, 11(7), 2008.

- [Gie09] GIESSELMANN, J.: *A convergence result for finite volume schemes on Riemannian manifolds*. ESAIM, Math. Model. Numer. Anal., 43(5):929–955, 2009.
- [Gil00] GILMAN, P. A.: *Magnetohydrodynamic “Shallow Water” Equations for the Solar Tachocline*. Astrophys. J., 544:L79–L82, November 2000.
- [Gir00] GIRALDO, F. X.: *Lagrange-Galerkin methods on spherical geodesic grids: the shallow water equations*. J. Comput. Phys., 160(1):336–368, 2000.
- [Gir01] GIRALDO, F. X.: *A spectral element shallow water model on spherical geodesic grids*. Int. J. Numer. Methods Fluids, 35(8):869–901, 2001.
- [gms] *Gmsh - Projekthomepage*. <http://www.geuz.org/gmsh/>.
- [Heb99] HEBEY, E.: *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, Band 5 der Reihe *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [Jen06] JENSEN, J. L. W. V.: *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta Math., 30:175–193, 1906.
- [Krö97] KRÖNER, D.: *Numerical schemes for conservation laws*. Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [Kru70] KRUŽKOV, S. N.: *First order quasilinear equations with several independent variables*. Mat. Sb. (N.S.), 81 (123):228–255, 1970.
- [Lee03] LEE, J. M.: *Introduction to smooth manifolds*, Band 218 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [LNO09] LEFLOCH, P. G., W. NEVES und W. OKUTMUSTUR: *Hyperbolic conservation laws on manifolds. Error estimate for finite volume schemes*. Acta Math. Sinica, 25(7):1041–1066, 2009. (siehe auch arXiv:0807.4640).
- [LO08] LEFLOCH, P. G. und B. OKUTMUSTUR: *Hyperbolic conservation laws on manifolds with limited regularity*. C.R.MATH.ACAD.SC.PARIS, 346:539, 2008.
- [MM03] MARTÍ, J. M. und E. MÜLLER: *Numerical Hydrodynamics in Special Relativity*. Living Reviews in Relativity, 6(7), 2003.

- [NK05] NOLTE, M. und D. KRÖNER: *Well-Balanced Schemes for the Initial Boundary Value Problem for 1D Scaler Conservation Laws*. Preprint, 2005. (siehe auch arXiv:math/0608567v1).
- [Pan97] PANOV, E. Y.: *On the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation on a manifold*. *Differ. Uravn.*, 33(2):257–266, 287, 1997.
- [par] *ParaView - Projekthomepage*. <http://www.paraview.org/>.
- [PFI⁺98] PONS, J.A., J.A. FONT, J.M. IBÁÑEZ, J.M. MARTÍ und J.A. MIRALLES: *General Relativistic Hydrodynamics with Special Relativistic Riemann Solvers*. *Astron. Astrophys.*, 339:638–642, 1998.
- [RBL04] ROSSMANITH, J. A., D. S. BALE und R. J. LEVEQUE: *A wave propagation algorithm for hyperbolic systems on curved manifolds*. *J. Comput. Phys.*, 199(2):631–662, 2004.
- [SBG01] SCHECTER, D. A., J. F. BOYD und P. A. GILMAN: *“Shallow-Water” Magnetohydrodynamic Waves in the Solar Tachocline*. *Astrophys. J.*, 551:L185–L188, April 2001.
- [SS05] SHIBATA, M. und Y. SEKIGUCHI: *Magnetohydrodynamics in full general relativity: Formulation and tests*. *Phys. Rev. D*, 72:1–24, 2005.
- [Tay96] TAYLOR, M. E.: *Partial Differential Equations I*, Band 115 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory.
- [TNCY00] TSUKAHARA, Y., N. NAKASO, H. CHO und K. YAMANAKA: *Observation of diffractionfree propagation of surface acoustic waves around a homogeneous isotropic solid sphere*. *Appl. Phys. Lett.*, 77(18):2926–2928, 2000.
- [VOS83] VAN OOSTEROM, A. und J. STRACKEE: *The Solid Angle of a Plane Triangle*. *IEEE Trans. Biom. Eng.*, BME-30, Issue: 2:125–126, 1983.
- [Vre94] VREUGDENHIL, C. B.: *Numerical methods for shallow-water flow*, Band 13 der Reihe *Water science and technology library*. 1994.
- [Wal93] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, Fünfte Auflage, 1993. Eine Einführung.

- [WDH⁺92] WILLIAMSON, D. L., J. B. DRAKE, J. J. HACK, R. JAKOB und P. N. SWARZTRAUBER: *A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry*. J. Comput. Phys., 102(1):211–224, 1992.
- [Whi36] WHITNEY, H.: *Differentiable manifolds*. Ann. of Math. (2), 37(3):645–680, 1936.
- [Whi44a] WHITNEY, H.: *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*. Ann. of Math. (2), 45:220–246, 1944.
- [Whi44b] WHITNEY, H.: *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space*. Ann. of Math. (2), 45:247–293, 1944.