



ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für angewandte Mathematik

**Ein balanciertes Verfahren zur numerischen Lösung von
Anfangsrandwertproblemen für skalare Erhaltungsgleichungen
mit Quellterm in 1D**

Corrected Version

— Diplomarbeit —

vorgelegt von
Martin Nolte
bei Prof. Dr. D. Kröner

Freiburg im Breisgau, im Juni 2005

Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. D. Kröner für die Vergabe dieses interessanten Themas und die hervorragende Betreuung während der letzten Monate. Auch möchte ich mich bei allen Mitarbeitern der Abteilung für angewandte Mathematik, insbesondere bei Herrn Dr. M. Ohlberger, bedanken, die stets offen und hilfsbereit bei Fragen meinerseits waren. Ferner danke ich meiner Familie und nicht zuletzt meiner Freundin Christina Schweizer für ihre moralische Unterstützung.

Martin Nolte, im Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Entropielösung	3
2.1	Der Lösungsbegriff von Bardos, Le Roux und Nedelec	4
2.2	Der Lösungsbegriff von Otto	4
2.3	Die Entropielösung	5
3	Die Entropieprozesslösung	7
3.1	Semi-Kruřkov-Entropiepaare	8
3.2	Eindeutigkeit der Entropieprozesslösung	11
4	Das Engquist-Osher Verfahren	19
4.1	Beschränktheit des Engquist-Osher Verfahrens	19
4.2	Die Zellentropieungleichung	21
5	Das balancierte Verfahren	25
5.1	Motivation des Verfahrens	25
5.2	Diskretisierung	26
5.3	Die diskreten Gleichgewichtszustände	29
5.4	Beschränktheit der numerischen Lösung	30
6	Konvergenz des Verfahrens	35
7	Numerische Experimente	45
7.1	Vergleich mit dem Standard-Verfahren	45
7.2	Das Gleichgewicht $\bar{u} \equiv 0$	47
A	Grundlagen	51
A.1	Der essentielle Grenzwert	51
A.2	Konvexe Funktionen und Jensensche Ungleichung	53
A.3	Allgemeine Aussagen	55

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Modellierung physikalischer Phänomene durch Erhaltungsgleichungen treten häufig zusätzlich Quellterme auf. Ein Beispiel dafür sind die Saint-Venant Gleichungen, die den Fluss in flachen Gewässern beschreiben. In einer Raumdimension gilt für die Höhe des Wassers $h(x, t)$ über dem Grund und die Geschwindigkeit des Wassers $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x (h u) &= 0, \\ \partial_t (h u) + \partial_x \left(h u^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) + g h H'(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei beschreibt H den Grund des Gewässers und g die (konstante) Gravitation.

In der Realität streben solche Systeme gegen ein Gleichgewicht. Motiviert durch die Saint-Venant Gleichungen betrachten Greenberg und Le Roux in [8] skalare Gleichungen, die der zweiten Gleichung des Saint-Venant Systems (1.1) ähnlich sind. Sie konstruieren durch das Lösen von Riemann-Problemen ein Verfahren, das das Gleichgewicht der Differentialgleichung besser approximiert als Standard-Ansätze. Diese Verfahren werden auch als balanciert (engl.: well-balanced) bezeichnet.

Botchorishvili, Perthame und Vasseur haben in [4] das Verfahren von Greenberg und Le Roux auf beliebige numerische Flüsse verallgemeinert und dann für den Fall des Engquist-Osher Flusses Konvergenz gegen die Entropie-Lösung gezeigt. Interessant ist, dass sie dabei nicht mit Funktionen beschränkter Variation, sondern mit beliebigen beschränkten Funktionen arbeiten.

Beide Arbeiten beweisen die Konvergenz für das Anfangswertproblem. Da bei der Implementation numerischer Verfahren mit kleinen Zellen nur in beschränkten Gebieten gerechnet werden kann, muss eine Interaktion der Daten am Rand dieses Gebietes aufwendig vermieden werden. Daher ist es interessant, das Anfangsrandwertproblem lösen zu können.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Anfangsrandwertproblem für eine skalare Erhaltungsgleichung mit Quellterm zu untersuchen. Dazu betrachten wir ein offenes, beschränktes Intervall $\Omega :=]x_l, x_r[\subset \mathbb{R}$. Zu $T > 0$ sei $\Omega_T := \Omega \times]0, T[$. Zu gegebenen Funktionen

$$u_0 \in L^\infty(\Omega) \quad \text{und} \quad u_l, u_r \in L^\infty(]0, T[). \tag{1.2}$$

betrachten wir das folgende Problem:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) + z'(x) b(u) &= 0 && \text{in } \Omega_T, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ u(x_l, \cdot) &= u_l && \text{auf }]0, T[, \text{ falls } f'(u) > 0, \\ u(x_r, \cdot) &= u_r && \text{auf }]0, T[, \text{ falls } f'(u) < 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dabei sei die Flussfunktion $f \in C^1(\mathbb{R})$. Für den Quellterm fordern wir $z \in H^{1,\infty}(\Omega)$ und $b \in C^1(\mathbb{R})$.

In Kapitel 2 und Kapitel 3 soll es zunächst darum gehen, den Begriff der Entropielösung für dieses Problem zu definieren und ihre Eindeutigkeit zu zeigen.

In Kapitel 4 werden wir uns dann allgemein mit dem Engquist-Osher Verfahren beschäftigen, bevor wir in Kapitel 5 das balancierte Verfahren aus [4] untersuchen wollen. In Kapitel 6 werden wir dann zeigen, dass dieses Verfahren gegen die Entropielösung konvergiert.

Zuletzt werden wir in Kapitel 7 einige numerische Experimente machen, um die Stärken und Schwächen des Verfahrens kennenzulernen.

Kapitel 2

Die Entropielösung

Von der Methode der Charakteristiken ist bekannt, dass selbst bei beliebig glatten Anfangs- und Randdaten keine klassische Lösung von (1.3) existieren muss. Daher sucht man nach schwachen Lösungen von (1.3), die folgendermaßen definiert sind:

Definition 2.1

Die Funktion $u \in L^\infty(\Omega_T)$ heißt schwache Lösung der Differentialgleichung in (1.3), falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ gilt:

$$\int_0^T \int_\Omega u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) + f(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) - z'(x) b(u(x, t)) \varphi(x, t) \, dx \, dt = 0. \quad (2.1)$$

Da die schwache Lösung nicht eindeutig bestimmt ist (vgl. z.B. [9]), suchen wir diejenige schwache Lösung, die zu unseren Anfangs- und Randdaten durch die regularisierten Anfangsrandwertprobleme

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon + \partial_x f(u_\epsilon) + z'(x) b(u_\epsilon) &= \epsilon u_\epsilon'' && \text{in } \Omega_T, \\ u_\epsilon(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ u_\epsilon(x_l, \cdot) &= u_l && \text{auf }]0, T[, \\ u_\epsilon(x_r, \cdot) &= u_r && \text{auf }]0, T[\end{aligned} \quad (2.2)$$

approximiert wird.

Aus der Theorie der Anfangswertprobleme für skalare Erhaltungsgleichungen ist bekannt, dass sich diese Lösung mit Hilfe von Entropiepaaren beschreiben lässt (vgl. [9]). Diese sind folgendermaßen definiert:

Definition 2.2 (Entropiepaar)

Sei $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und $q \in C^1(\mathbb{R})$. Dann heißt (η, q) Entropiepaar zu (1.3), falls gilt:

$$q' = \eta' f'. \quad (2.3)$$

Dabei wird η als Entropie und q als Entropiefluss bezeichnet.

Unter der Voraussetzung $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap BV(\Omega_T)$ haben Bardos, Le Roux und Nedelec (siehe [3]) die Lösung, die durch die regularisierten Anfangsrandwertprobleme approximiert wird, charakterisiert. Eine Charakterisierung dieser Lösung für das Anfangsrandwertproblem ohne Quellterm, die nur die Voraussetzung $u \in L^\infty(\Omega_T)$ benötigt, wurde von Otto (siehe [12]) mit Hilfe spezieller Entropiepaare, sogenannter Rand-Entropiepaare, bewiesen.

Wir werden uns zunächst beide Lösungsbegriffe ansehen, um dann die Lösung von Otto auf das Problem (1.3) zu erweitern.

2.1 Der Lösungsbegriff von Bardos, Le Roux und Nedelec

In der Arbeit von Bardos, Le Roux und Nedelec (vgl. [3]) wird das Anfangsrandwertproblem für skalare Erhaltungsgleichungen in mehreren Raumdimensionen betrachtet. Daher sind die Ergebnisse für ein zu (1.3) analoges Anfangsrandwertproblem in mehreren Raumdimensionen zu verstehen. Für ein C^1 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit gegebenen Anfangsdaten $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ und Randdaten $u_{\partial\Omega} \in C^2(\partial\Omega \times]0, T[)$ lautet dieses Problem:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} f(u) + B(x, u) &= 0 && \text{in } \Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ u(x, t) &= u_{\partial\Omega} && \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times]0, T[, \text{ falls } \nabla f(u) \cdot \nu < 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $B \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ mit $\|\partial_u B\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})} < \infty$ sind. ν bezeichnet die äußere Normale an Ω .

Zunächst zeigen die Autoren (vgl. [3, Lemma 1]), dass eine Funktion $u \in BV(\Omega \times]0, T[)$ eine Spur $\gamma u \in L^\infty(\partial\Omega \times]0, T[)$ besitzt und dass für $g \in C^1(\mathbb{R})$ fast überall in $]0, T[$ gilt:

$$\gamma[g(u)] = g(\gamma u).$$

Als nächstes wird gezeigt, dass eine Lösung $u \in BV(\Omega_T)$, die durch die regularisierten Anfangsrandwertprobleme approximiert wird, für fast alle $(x, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$ folgende Eigenschaft besitzt:

$$\min_{k \in [\gamma u, u_{\partial\Omega}]} \operatorname{sgn}(\gamma u - u_{\partial\Omega}) (f(\gamma u) - f(k)) \cdot \nu = 0. \quad (2.5)$$

Als letztes zeigen Bardos, Le Roux und Nedelec, dass diese Lösung durch die Annahme der Anfangsdaten (im Sinne der Spur) und die Entropiebedingung

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |u - k| \partial_t \varphi + \operatorname{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \cdot \nabla \varphi - \operatorname{sgn}(u - k) B(x, u) \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \operatorname{sgn}(k) (f(\gamma u) - f(k)) \cdot \nu \varphi \, dx \, dt \geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

eindeutig charakterisiert ist (vgl. [3, Theorem 5]).

2.2 Der Lösungsbegriff von Otto

Die Arbeit von Otto ist in gekürzter Fassung zu finden in [12]. Sie wurde umfassender in [11] wiedergegeben.

Otto betrachtet in dieser Arbeit das Anfangsrandwertproblem (2.4) ohne Quellterm, d.h. mit $B \equiv 0$. Zu diesem Zweck führt er Rand-Entropiepaare (H, Q) mit $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $Q \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ ein, die für alle $w \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllen:

- $(H(\cdot, w), Q(\cdot, w))$ ist ein Entropiepaar,
- $H(w, w) = \partial_1 H(w, w) = Q(w, w) = 0$.

Nach Otto ist dann $u \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)$ Entropielösung des Anfangsrandwertproblems (2.4) ohne Quellterm, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times]0, T[)$, $\varphi \geq 0$ und alle Entropiepaare (η, q) gilt:

$$\int_0^T \int_\Omega \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \geq 0.$$

- Für die Randdaten $u_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega \times]0, T[)$ und alle $\beta \in L^1(\partial\Omega \times]0, T[)$, $\beta \geq 0$ fast überall, und alle Rand-Entropiepaare (H, Q) gilt:

$$\operatorname{ess\,lim}_{s \uparrow 0} \int_0^T \int_{\partial\Omega} Q(u(x + s\nu(x), t), u_{\partial\Omega}(x, t)) \cdot \nu(x) \beta(x, t) \, dx \, dt \geq 0.$$

- Für die Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \downarrow 0} \int_{\Omega} |u(x, t) - u_0(x)| \, dx = 0.$$

In der Arbeit von Otto wird dann gezeigt:

- Falls die Spur $\gamma u \in L^\infty(\partial\Omega \times]0, T[)$ existiert, so stimmt die Entropielösung mit der Lösung von Bardos, Le Roux und Nedelec überein (vgl. [11, Lemma 7.24]).
- Die Entropielösung ist eindeutig bestimmt (vgl. [11, Theorem 7.28]).
- Die Entropielösung wird durch die regularisierten Anfangsrandwertprobleme approximiert (vgl. [11, Theorem 8.20]).
- Die Funktion $u \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)$ ist Lösung des Anfangsrandwertproblems (2.4) ohne Quellterm, genau dann, wenn für alle Rand-Entropiepaare (H, Q) , alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T[)$, $\varphi \geq 0$, gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} H(u, k) \partial_t \varphi + Q(u, k) \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{\Omega} H(u_0(x), k) \varphi(x, 0) \, dx + \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \int_0^T \int_{\partial\Omega} H(u_{\partial\Omega}, k) \varphi \, dx \, dt \geq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei $C := \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega_T)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u_{\partial\Omega}\|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0, T))} \right\}$ ist (vgl. [11, Theorem 7.31]).

2.3 Die Entropielösung

In diesem Abschnitt kehren wir wieder zu unserem eindimensionalen Problem (1.3) zurück, d.h. Ω sei wieder ein beschränktes, offenes Intervall.

Im Lösungsbegriff von Bardos, Le Roux und Nedelec hängt die Randbedingung nicht von der Wahl des Quellterms ab (vgl. (2.5) und (2.6)). Wenn wir also den Begriff der Entropielösung von Otto auf das (eindimensionale) Anfangsrandwertproblem (1.3) erweitern wollen, so müssen wir nur den Quellterm (multipliziert mit der Ableitung der Entropie) hinzufügen.

Weiter fällt auf, dass in Formulierung (2.7) in die zweite Variable der Rand-Entropie und des Rand-Entropieflusses die (beliebige) Konstante k eingesetzt wird. Wir definieren daher Rand-Entropiepaare wie folgt:

Definition 2.3 (Rand-Entropiepaar)

Sei (η, q) ein Entropiepaar zu (1.3). Falls ein $w \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\eta(w) = \eta'(w) = q(w) = 0, \quad (2.8)$$

so heißt (η, q) Rand-Entropiepaar zu (1.3).

Insbesondere gilt für Rand-Entropiepaare die Darstellung

$$q(s) = \int_w^s \eta'(\xi) f'(\xi) \, d\xi \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Hieraus kann man die Existenz beliebig vieler Rand-Entropiepaare ableiten, denn für $w \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto (x - w)^2$ konvex und sowohl Funktion als auch Ableitung verschwinden bei $x = w$. Mit (2.9) existiert ein passender Entropiefluss, der bei $x = w$ verschwindet.

Ist (H, Q) ein Rand-Entropiepaar nach Otto, so ist für jedes $w \in \mathbb{R}$ durch $(H(\cdot, w), Q(\cdot, w))$, ein Rand-Entropiepaar gegeben. Ist umgekehrt (η, q) ein Rand-Entropiepaar mit $\eta(w) = \eta'(w) = q(w) = 0$, so können wir ein Rand-Entropiepaar im Sinne von Otto definieren, indem wir für $u, v \in \mathbb{R}$

$$H(u, v) := \eta(u - (v - w)) \quad \text{und} \quad Q(u, v) := q(u - (v - w))$$

setzen.

Nun passen wir Ottos Begriff der Entropielösung an unsere Gegebenheiten an und definieren:

Definition 2.4 (Entropielösung)

Sei $u \in L^\infty(\Omega_T)$ und sei $C = \|u\|_{L^\infty(\Omega_T)}$. Dann heißt die Funktion u Entropielösung von (1.3), falls für alle Rand-Entropiepaare (η, q) und alle $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[)$, $\varphi \geq 0$, gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi - \eta'(u) z'(x) b(u) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) \, dx + \underset{[-C, C]}{\text{Lip}}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_r, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_l, t) \, dt \geq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bemerkung 2.5

Ist $z' \equiv 0$, so ist $u \in L^\infty(\Omega)$ genau dann Entropielösung von (1.3), wenn sie es auch im Sinne von Otto wäre (vgl. (2.7)).

Wir werden nicht zeigen, dass die so definierte Entropielösung durch die regularisierten Anfangsrandwertprobleme approximiert wird. Die Eindeutigkeit werden wir jedoch im Rahmen der Entropieprozesslösungen zeigen.

Kapitel 3

Die Entropieprozesslösung

Das Konzept der Entropieprozesslösung geht zurück auf Eymard, Gallouët und Herbin [7, Definition 1]. Wie die kinetische Lösung, die Botchorishvili, Perthame und Vasseur in [4, Definition 2.1 und 2.2] verwenden, wird die Lösung in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[\times \mathbb{R})$ gesucht, d.h. die Lösung hängt von einem weiteren Parameter ab. Die Entropieprozesslösung ist jedoch sowohl optisch als auch für den Beweis ihrer Eindeutigkeit enger mit der Entropielösung verwandt.

Auf dem Weg von Otto aufbauend hat Vovelle in [13] die Entropieprozesslösung für ein Anfangsrandwertproblem ohne Quellterm definiert und die Eindeutigkeit der Entropieprozesslösung gezeigt. In diesem Kapitel soll es nun um die Erweiterung von Vovelles Definition und Eindeutigkeitsbeweis auf Anfangsrandwertprobleme mit Quellterm gehen.

Nun definieren wir die Entropieprozesslösung analog zur Definition von Vovelle (vgl. [13, Definition 3]) für Anfangsrandwertprobleme mit Quellterm (vgl. auch (2.10)):

Definition 3.1 (Entropieprozesslösung)

Sei $\mu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$ und sei $C = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)}$. Dann heißt die Funktion μ Entropieprozesslösung von (1.3), falls für alle Rand-Entropiepaare (η, q) und alle $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[)$, $\varphi \geq 0$, gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta(\mu(x, t, \alpha)) \partial_t \varphi(x, t) \, d\alpha \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 q(\mu(x, t, \alpha)) \partial_x \varphi(x, t) \, d\alpha \, dx \, dt \\ & \quad - \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta'(\mu(x, t, \alpha)) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dx \, dt \\ & \quad + \int_\Omega \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) \, dx + \underset{[-C, C]}{\text{Lip}}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_r, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_l, t) \, dt \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Zunächst können wir jede Entropielösung $u \in L^\infty(\Omega_T)$ (vgl. (2.10)) zu einer Entropieprozesslösung machen, indem wir

$$\mu(x, t, \alpha) := u(x, t) \quad \forall (x, t, \alpha) \in \Omega_T \times]0, 1[$$

setzen. Umgekehrt ist jede Entropieprozesslösung $\mu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$ Entropielösung, falls sie nicht von ihrem dritten Argument abhängt, d.h. falls

$$\mu(x, t, \alpha) = \mu(x, t, \beta) \quad \text{für fast alle } (x, t, \alpha, \beta) \in \Omega_T \times]0, 1[^2.$$

In diesem Kapitel wollen wir nun zeigen, dass die Entropieprozesslösung eindeutig ist und nicht von ihrem dritten Argument abhängt. Insbesondere ist dann jede Entropieprozesslösung von (1.3) eine Entropielösung von (1.3). Die Existenz einer Entropieprozesslösung werden wir an dieser Stelle nicht zeigen, da sie sich aus der in Kapitel 6 bewiesenen Konvergenz eines numerischen Verfahrens gegen die Entropieprozesslösung ergibt.

Für den Beweis der Eindeutigkeit ziehen wir uns auf Semi-Kružkov-Entropiepaare zurück, welche in unserem Fall die Rolle der Kružkov-Entropiepaare (im Falle des Anfangswertproblems) einnehmen.

3.1 Semi-Kruřkov-Entropiepaare

Motiviert durch die Signumsfunktion kann man folgende Funktionen definieren:

$$\operatorname{sgn}^+(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}, \quad \operatorname{sgn}^-(s) = \begin{cases} 0 & s \geq 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases}.$$

Es gilt: $\operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}^+(s) + \operatorname{sgn}^-(s)$.

Abkürzend schreiben wir für $s \in \mathbb{R}$:

$$s^+ = \operatorname{sgn}^+(s) s \quad \text{und} \quad s^- = \operatorname{sgn}^-(s) s. \quad (3.2)$$

Damit ist $s^+, s^- \geq 0$ und es gilt:

$$|s| = \operatorname{sgn}(s) s = (\operatorname{sgn}^+(s) + \operatorname{sgn}^-(s)) s = s^+ + s^-.$$

Nun verwenden wir $\operatorname{sgn}^+, \operatorname{sgn}^-$, um die Semi-Kruřkov-Entropiepaare (η_k^+, q_k^+) und (η_k^-, q_k^-) zu definieren:

Definition 3.2 (Semi-Kruřkov-Entropiepaare)

Sei $k \in \mathbb{R}$. Die Paare (η_k^+, q_k^+) und (η_k^-, q_k^-) mit

$$\begin{aligned} \eta_k^+(s) &= (s - k)^+, & q_k^+(s) &= \operatorname{sgn}^+(s - k) (f(s) - f(k)) \\ \eta_k^-(s) &= (s - k)^-, & q_k^-(s) &= \operatorname{sgn}^-(s - k) (f(s) - f(k)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

heiřen *Semi-Kruřkov-Entropiepaare*.

Speziell notieren wir $\tilde{\eta}_k^+(x) := \operatorname{sgn}^+(x - k)$ und $\tilde{\eta}_k^-(x) := \operatorname{sgn}^-(x - k)$.

Eigenschaft 3.3

Sei (η, q) ein *Semi-Kruřkov-Entropiepaar*. Dann gilt für $u \in [-C, C]$:

$$|q(u)| \leq \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \eta(u). \quad (3.4)$$

Beweis

Aufgrund der Stetigkeit der Ableitung ist f auf $[-C, C]$ Lipschitz-stetig. Daher lässt sich für $k \in \mathbb{R}$ abschätzen:

$$|f(u) - f(k)| \leq \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) |u - k|. \quad (3.5)$$

Für $u \geq k$ folgt daraus

$$\pm (f(u) - f(k)) \leq |f(u) - f(k)| \leq \operatorname{Lip}(f) (u - k).$$

Durch Multiplikation mit $\operatorname{sgn}^+(u - k) \geq 0$ ergibt sich:

$$\pm \operatorname{sgn}^+(u - k) (f(u) - f(k)) \leq \operatorname{sgn}^+(u - k) \operatorname{Lip}(f) (u - k). \quad (3.6)$$

Diese Aussage ist für $u < k$ trivial, da dann $\operatorname{sgn}^+(u - k) = 0$ gilt.

Hieraus folgt die Aussage für ein Semi-Kruřkov-Entropiepaar (η_k^+, q_k^+) .

Analog lässt sich die Aussage für ein Semi-Kruřkov-Entropiepaar (η_k^-, q_k^-) zeigen. ■

Desweiteren notieren wir abkürzend für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a \wedge b &:= \max\{a, b\}, \\ a \vee b &:= \min\{a, b\}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Zusammenhänge, die sich leicht durch Fallunterscheidung nachprüfen lassen:

$$\left. \begin{aligned} (a-b)^+ &= (a \wedge b) - b \\ (a-b)^- &= b - (a \vee b) \end{aligned} \right\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sgn}^+(a-b) (f(a) - f(b)) &= f(a \wedge b) - f(b) \\ \operatorname{sgn}^-(a-b) (f(a) - f(b)) &= f(b) - f(a \vee b) \end{aligned} \right\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Außerdem werden wir folgende Funktion benutzen:

$$F(a, b) = \operatorname{sgn}(a-b) (f(a) - f(b)) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Damit erhalten wir folgende Identität:

$$\left. \begin{aligned} 2 [\operatorname{sgn}^+(a-b \wedge c) (f(a) - f(b \wedge c)) + \operatorname{sgn}^-(a-b \vee c) (f(a) - f(b \vee c))] \\ = F(a, b) - F(b, c) + F(a, c) \end{aligned} \right\} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

denn aus (3.8) erhalten wir für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &2 [\operatorname{sgn}^+(a-b \wedge c) (f(a) - f(b \wedge c)) + \operatorname{sgn}^-(a-b \vee c) (f(a) - f(b \vee c))] \\ &= 2 [f(a \wedge b \wedge c) - f(b \wedge c) + f(b \vee c) - f(a \vee b \vee c)] \\ &= 2 [f(a \wedge b \wedge c) - F(b, c) - f(a \vee b \vee c)]. \end{aligned}$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass

$$2 [f(a \wedge b \wedge c) - f(a \vee b \vee c)] = F(a, b) + F(b, c) + F(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

gilt. Da diese Aussage symmetrisch in $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist, genügt es, sie für $a \leq b \leq c$ nachzurechnen.

Das folgende Lemma wird uns ermöglichen, bei Aussagen über die Entropieprozesslösung Semi-Kružkov-Entropiepaare anstelle der glatten Entropiepaare zu verwenden:

Lemma 3.4

Sei μ eine Entropieprozesslösung von (1.3) und sei $C = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega_T \times]0,1])}$. Weiter seien die Semi-Kružkov-Entropiepaare (η_k^+, q_k^+) und (η_k^-, q_k^-) wie in (3.3) definiert.

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle nichtnegativen Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \partial_t \varphi(x, t) d\alpha dx dt + \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 q_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \partial_x \varphi(x, t) d\alpha dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \tilde{\eta}_k^+(\mu(x, t, \alpha)) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) d\alpha dx dt \\ &+ \int_\Omega \eta_k^+(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \int_0^T \eta_k^+(u_r(t)) \varphi(x_r, t) + \eta_k^+(u_l(t)) \varphi(x_l, t) dt \geq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

und

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta_k^-(\mu(x, t, \alpha)) \partial_t \varphi(x, t) d\alpha dx dt + \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 q_k^-(\mu(x, t, \alpha)) \partial_x \varphi(x, t) d\alpha dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \tilde{\eta}_k^-(\mu(x, t, \alpha)) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) d\alpha dx dt \\ &+ \int_\Omega \eta_k^-(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \int_0^T \eta_k^-(u_r(t)) \varphi(x_r, t) + \eta_k^-(u_l(t)) \varphi(x_l, t) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Beweis

Das Polynom $p_{k, \delta}(x) := -\frac{1}{2\delta^3} (x-k)^4 + \frac{1}{\delta^2} (x-k)^3$ hat folgende Eigenschaften:

- $p_{k,\delta}(k) = p'_{k,\delta}(k) = 0$.
- $p_{k,\delta}(k + \delta) = \frac{1}{2} \delta$ und $p'_{k,\delta}(k + \delta) = 1$.
- $p''_{k,\delta}(k) = p''_{k,\delta}(k + \delta) = 0$ und $p''_{k,\delta} \geq 0$ auf $[k, k + \delta]$. Sei nämlich $x \in [k, k + \delta]$. Dann ist $0 \leq \frac{x-k}{\delta} \leq 1$ und deshalb

$$p''_{k,\delta}(x) = -\frac{6}{\delta} \left(\frac{x-k}{\delta} \right)^2 + \frac{6}{\delta} \frac{x-k}{\delta} \geq -\frac{6}{\delta} \frac{x-k}{\delta} + \frac{6}{\delta} \frac{x-k}{\delta} = 0.$$

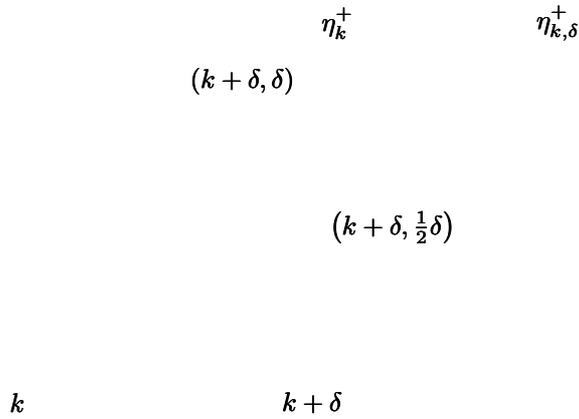


Abbildung 3.1: Skizze der Funktionen $\eta_{k,\delta}^+$ und η_k^+

Mit Hilfe von $p_{k,\delta}$ definieren wir nun die Funktion

$$\eta_{k,\delta}^+(x) := \begin{cases} 0 & x \leq k \\ p_{k,\delta}(x) & k \leq x \leq k + \delta \\ (x-k) - \frac{1}{2} \delta & x \geq k + \delta \end{cases} .$$

Nach obigen Überlegungen ist $\eta_{k,\delta}^+ \in C^2(\mathbb{R})$ konvex. Mit

$$q_{k,\delta}^+(x) := \int_k^x \eta_{k,\delta}^+(\xi) f'(\xi) d\xi$$

ist $(\eta_{k,\delta}^+, q_{k,\delta}^+)$ ein Rand-Entropiepaar.

Ferner gilt für die Approximation $\eta_{k,\delta}^+$ an η_k^+ :

- $|\eta_{k,\delta}^+(x) - \eta_k^+(x)| \leq \delta \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $|\eta_{k,\delta}^+'(x) - \tilde{\eta}_k^+(x)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $|q_{k,\delta}^+(x) - q_k^+(x)| \leq \delta \|f'\|_{L^\infty([k, k+\delta])} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Um den letzten Punkt einzusehen, stellen wir zunächst fest:

$$\operatorname{sgn}^+(\xi - k) = \operatorname{sgn}^+(x - k) \quad \forall \xi \in [k, x].$$

Daraus folgt dann

$$q_k^+(x) = \operatorname{sgn}^+(x - k) (f(x) - f(k)) = \int_k^x \operatorname{sgn}^+(\xi - k) f'(\xi) d\xi.$$

Also können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| q_{k,\delta}^+(x) - q_k^+(x) \right| &\leq \int_{[k,x]} \left| \eta_{k,\delta}^{+\prime}(\xi) - \operatorname{sgn}^+(\xi - k) \right| |f'(\xi)| d\xi \\ &\leq \|f'\|_{L^\infty([k,k+\delta])} \int_{[k,k+\delta]} \left| \eta_{k,\delta}^{+\prime}(\xi) - \operatorname{sgn}^+(\xi - k) \right| d\xi \\ &\leq \delta \|f'\|_{L^\infty([k,k+\delta])}. \end{aligned}$$

Für $\delta \rightarrow 0$ konvergieren also punktweise $\eta_{k,\delta}^+ \rightarrow \eta_k^+$, $\eta_{k,\delta}^{+\prime} \rightarrow \tilde{\eta}_k^+$ und $q_{k,\delta}^+ \rightarrow q_k^+$. Wegen der Beschränktheit der Integranden können wir den Satz über dominierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta_{k,\delta}^+(\mu) \partial_t \varphi + q_{k,\delta}^+(\mu) \partial_x \varphi - \eta_{k,\delta}^{+\prime}(\mu) z' b(\mu) \varphi d\alpha dx dt \\ &+ \int_\Omega \eta_{k,\delta}^+(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta_{k,\delta}^+(u_r(t)) \varphi(x_r, t) + \eta_{k,\delta}^+(u_l(t)) \varphi(x_l, t) dt \\ &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta_k^+(\mu) \partial_t \varphi + q_k^+(\mu) \partial_x \varphi - \tilde{\eta}_k^+(\mu) z' b(\mu) \varphi d\alpha dx dt \\ &+ \int_\Omega \eta_k^+(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta_k^+(u_r(t)) \varphi(x_r, t) + \eta_k^+(u_l(t)) \varphi(x_l, t) dt. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (3.11).

Analoge Glättung von η_k^- ergibt die Aussage (3.12). ■

3.2 Eindeutigkeit der Entropieprozesslösung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Entropieprozesslösung zu (1.3) eindeutig bestimmt ist. Dabei werden wir weitgehend die Argumentation von Vovelle (vgl. [13]) auf das Anfangsrandwertproblem mit Quellterm adaptieren.

Die Idee des folgenden Lemmas geht auf Otto zurück, der eine analoge Aussage für skalare Erhaltungsgleichungen ohne Quellterm in mehreren Raumdimensionen bewiesen hat. Dieses Lemma kann man in [11, Kapitel 2, Lemma 7.34] finden.

Lemma 3.5

Sei $\mu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$ Entropieprozesslösung von (1.3). Dann gilt für alle $v \in L^\infty(]0, T[)$ und für alle $\beta \in L^1(]0, T[)$, $\beta \geq 0$ f.ü.:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}^\pm(\mu(x, t, \alpha) - v(t)) (f(\mu(x, t, \alpha)) - f(v(t))) \beta(t) d\alpha dt \\ &\geq - \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T (u_r(t) - v(t))^\pm \beta(t) dt, \\ &\operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow x_l} \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}^\pm(\mu(x, t, \alpha) - v(t)) (f(\mu(x, t, \alpha)) - f(v(t))) \beta(t) d\alpha dt \\ &\leq \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T (u_l(t) - v(t))^\pm \beta(t) dt. \end{aligned}$$

Insbesondere existieren die essentiellen Grenzwerte.

Beweis

Sei $w \in \mathbb{Q}$ fest und sei $\beta \in C_0^\infty(]0, T[)$, $\beta \geq 0$, und $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \geq 0$. Dann folgt mit Lemma 3.4:

$$\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta_w^+(\mu) \beta'(t) \psi(x) + q_w^+(\mu) \beta(t) \psi'(x) - \tilde{\eta}_w^+(\mu) z'(x) b(\mu) \beta(t) \psi(x) d\alpha dx dt \geq 0.$$

Dies liefert:

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt \psi'(x) dx \\ & \leq \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta_w^+(\mu) \beta'(t) \psi(x) - \tilde{\eta}_w^+(\mu) z'(x) b(\mu) \beta(t) \psi(x) d\alpha dx dt \\ & \leq C \int_\Omega \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei die Konstante C von μ, z', b, β, w, T abhängt.

Durch partielle Integration auf der rechten Seite und Lemma A.9 erhält man eine Nullmenge E' , sodass die Abbildung

$$x \mapsto \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt - Cx \quad (x \in \Omega) \quad (3.14)$$

in $\Omega \setminus E'$ monoton fallend ist.

Andererseits existiert eine Nullmenge E'' , die nur von μ und w abhängt, sodass für alle $x \in \Omega \setminus E''$

$$\int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt \leq \int_0^T \int_0^1 |q_w^+(\mu)| \beta(t) d\alpha dt \leq \|q_w^+(\mu)\|_{L^\infty(\Omega_T \times]0,1])} \int_0^T \beta(t) dt$$

ist, d.h. die Funktion (3.14) ist auf $\Omega \setminus (E' \cup E'')$ monoton und beschränkt. Daher existiert

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt = \lim_{\substack{x \uparrow x_r \\ x \notin E' \cup E''}} \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt. \quad (3.15)$$

Für $\psi \in C_0^\infty(]x_l, x_r])$ können wir mit Lemma 3.4 analog zu (3.13) folgende Ungleichung ableiten:

$$- \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt \psi'(x) dx \leq C \int_\Omega \psi(x) dx + \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta_w^+(u_r(t)) \beta(t) dt \psi(x_r). \quad (3.16)$$

Durch Faltung mit einem nichtnegativen Glättungskern können wir zeigen, dass (3.16) auch für die Testfunktion $\psi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} (x - (x_r - \epsilon))^+$, $\epsilon > 0$, gilt. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} - \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt & = - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x_r - \epsilon}^{x_r} \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt dx \\ & \leq \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta_w^+(u_r(t)) \beta(t) dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Für $\beta \in L^1(]0, T[)$, $\beta \geq 0$ f.ü., können wir durch Faltung mit einem nichtnegativen Glättungskern eine Folge $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(]0, T[)$, $\beta_n \geq 0$, konstruieren mit $\beta_n \rightarrow \beta$ in $L^1(]0, T[)$. Aus (3.17) können wir nun die Existenz von Nullmengen E_n folgern, sodass gilt:

$$\lim_{\substack{x \uparrow x_r \\ x \notin E_n}} \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta_n(t) d\alpha dt \leq \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta_w^+(u_r(t)) \beta_n(t) dt.$$

Dann ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ eine Nullmenge und mit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir aufgrund der Beschränktheit von $q_k^+(\mu)$:

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 q_w^+(\mu) \beta(t) d\alpha dt \geq - \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta_w^+(u_r(t)) \beta(t) dt. \quad (3.18)$$

Für eine Elementarfunktion $v \in L^\infty]0, T[$, die nur endlich viele Werte $w_i \in \mathbb{Q}$ annimmt, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^N w_i 1_{A_i}, \quad \left((A_i)_{i=1, \dots, N} \text{ paarweise disjunkt} \right),$$

und eine Testfunktion $\beta \in L^1]0, T[$ setzen wir $\beta_i := 1_{A_i} \beta$. Nach Einsetzen von w_i und β_i in (3.18) und Summation über i erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}^\pm (\mu(x, t, \alpha) - v(t)) (f(\mu(x, t, \alpha)) - f(v(t))) \beta(t) \, d\alpha \, dt \\ & \geq - \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \int_0^T (u_r(t) - v(t))^+ \beta(t) \, dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da jede L^1 -Funktion v Grenzwert solcher Elementarfunktionen ist (und $L^\infty]0, T[\subset L^1]0, T[$ ist) folgt (3.19) auch für $v \in L^\infty]0, T[$.

Für die Semi-Kružkov-Entropiepaare (η_k^-, q_k^-) und die Grenzwerte $x \downarrow x_l$ gehen wir analog vor. \blacksquare

Ebenfalls auf Otto geht das folgende Lemma zurück, welches die Annahme der Anfangsdaten bei $t = 0$ zeigt. Man kann es in [11, Kapitel 2, Lemma 7.41] finden. In beiden Fällen wird allerdings der Quellterm nicht betrachtet.

Lemma 3.6

Sei $\mu \in L^\infty (\Omega_T \times]0, 1[)$ eine Entropieprozesslösung von (1.3). Dann gilt für alle $\beta \in L^1(\Omega)$, $\beta \geq 0$ f.ü.:

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \downarrow 0} \int_\Omega \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - u_0(x)| \, d\alpha \, dx = 0.$$

Beweis

Wir gehen analog zu Lemma 3.5 vor. Sei zunächst $w \in \mathbb{Q}$ und $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$. Durch Faltung mit einem nichtnegativen Glättungskern zeigen wir, dass (3.11) und (3.12) auch für die Testfunktionen

$$(x, t) \mapsto \left[1 - \frac{1}{\epsilon} t \right] 1_{[0, \epsilon]}(t) \beta(x), \quad \epsilon > 0,$$

gelten. Durch Addition der beiden resultierenden Ungleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \int_\Omega \int_0^1 -|\mu(x, t, \alpha) - w| \beta(x) + F(\mu(x, t, \alpha), w) (\epsilon - t) \beta'(x) \\ & - \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - w) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) (\epsilon - t) \beta(x) \, d\alpha \, dx \, dt + \int_\Omega |u_0(x) - w| \beta(x) \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Durch Bildung des Limes Inferior ergibt sich dann:

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{t \downarrow 0} \int_\Omega \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - w| \beta(x) \, d\alpha \, dx \leq \int_\Omega |u_0(x) - w| \beta(x) \, dx. \quad (3.20)$$

Wie in Lemma 3.5 zeigen wir jetzt, dass aus (3.20) für alle $v \in L^\infty(\Omega)$ und alle $\beta \in L^1(\Omega)$, $\beta \geq 0$ f.ü., folgt:

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{t \downarrow 0} \int_\Omega \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - v| \beta(x) \, d\alpha \, dx \leq \int_\Omega |u_0(x) - v| \beta(x) \, dx. \quad (3.21)$$

Setzen wir jetzt in (3.21) die Funktion u_0 für v ein und wählen als Testfunktion $\beta \equiv 1$, so erhalten wir die Behauptung, weil der Integrand der linken Seite von (3.21) nichtnegativ ist. \blacksquare

Folgendes Lemma ist das analoge Resultat zu [13, Lemma 4]:

Lemma 3.7

Sei $\mu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$ Entropieprozesslösung von (1.3). Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times]0, T[)$, $\varphi \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - k| \partial_t \varphi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), k) \partial_x \varphi(x, t) \\
& \quad - \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - k) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dx \, dt \\
& \quad + \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \varphi(x_r, t) \, d\alpha \, dt \\
& \quad - \operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow x_l} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_l(t)) \varphi(x_l, t) \, d\alpha \, dt \\
& \quad - \int_0^T F(u_r(t), k) \varphi(x_r, t) \, dt + \int_0^T F(u_l(t), k) \varphi(x_l, t) \, dt \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

wobei F durch (3.9) gegeben sei.

Beweis

Zu $\epsilon > 0$ sei $\omega_\epsilon(x) := 1 - \frac{1}{\epsilon}(x - (x_r - \epsilon))^+$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(]x_l, x_r] \times]0, T[)$, $\varphi \geq 0$, und $k \in \mathbb{R}$. Nach Faltung mit einem nichtnegativen Glättungskern können wir $(x, t) \mapsto \omega_\epsilon(x) \varphi(x, t)$ als Testfunktion in (3.11) einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \eta_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \omega_\epsilon(x) \partial_t \varphi(x, t) + q_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \omega_\epsilon(x) \partial_x \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \tilde{\eta}_k^+(\mu(x, t, \alpha)) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \omega_\epsilon(x) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& - \frac{1}{\epsilon} \int_{x_r - \epsilon}^{x_r} \int_0^T \int_0^1 q_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx + \underset{[-C, C]}{\operatorname{Lip}}(f) \int_0^T \eta_k^+(u_r(t)) \omega_\epsilon(x_r) \varphi(x_r, t) \, dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \eta_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \partial_t \varphi(x, t) + q_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \partial_x \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \tilde{\eta}_k^+(\mu(x, t, \alpha)) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 q_k^+(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \geq 0,
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass nach Lemma 3.5 der essentielle Grenzwert existiert. Die analoge Aussage bekommen wir für (η_k^-, q_k^-) . Durch Summation dieser beiden Aussagen erhalten wir dann für $\varphi \in C_0^\infty(]x_l, x_r] \times]0, T[)$:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - k| \partial_t \varphi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), k) \partial_x \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - k) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), k) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Aus (3.10) und Lemma 3.5 folgt nun wegen der Stetigkeit von φ :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), k) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \\
& = 2 \left[\operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}^+(\mu(x, t, \alpha) - (k \wedge u_r(t))) (f(\mu(x, t, \alpha)) - f(k \wedge u_r(t))) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}^- (\mu(x, t, \alpha) - (k \vee u_r(t))) (f(\mu(x, t, \alpha)) - f(k \vee u_r(t))) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \Big] \\
& + \int_0^T F(k, u_r(t)) \varphi(x_r, t) \, dt - \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \\
\geq & -2 \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \left[\int_0^T \underbrace{(u_r(t) - (k \wedge u_r(t)))^+}_{=0} \varphi(x_r, t) \, dt + \int_0^T \underbrace{(u_r(t) - (k \vee u_r(t)))^-}_{=0} \varphi(x_r, t) \, dt \right] \\
& + \int_0^T F(k, u_r(t)) \varphi(x_r, t) \, dt - \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \varphi(x_r, t) \, d\alpha \, dt.
\end{aligned}$$

Zu bemerken ist, dass Lemma 3.5 durch Summation der beiden Teilaussagen auch die Existenz des hintersten essentiellen Grenzwertes liefert.

Wegen der Symmetrie von F folgt dann aus (3.23) für $\varphi \in C_0^\infty([x_l, x_r] \times]0, T[)$:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - k| \partial_t \varphi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), k) \partial_x \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - k) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \tag{3.24} \\
& - \int_0^T F(u_r(t), k) \varphi(x_r, t) \, dt + \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \varphi(x_r, t) \, d\alpha \, dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Analog zeigen wir für $\varphi \in C_0^\infty([x_l, x_r[\times]0, T[)$:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - k| \partial_t \varphi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), k) \partial_x \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \\
& \quad - \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - k) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \, d\alpha \, dt \, dx \tag{3.25} \\
& + \int_0^T F(u_l(t), k) \varphi(x_l, t) \, dt - \operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow x_l} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_l(t)) \varphi(x_l, t) \, d\alpha \, dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Zu $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times]0, T[)$, $\varphi \geq 0$ können wir nun zwei Funktionen $\varphi_l \in C_0^\infty([x_l, x_r[\times]0, T[)$ und $\varphi_r \in C_0^\infty([x_l, x_r] \times]0, T[)$ finden, sodass $\varphi = \varphi_l + \varphi_r$. Wählt man in (3.25) nun φ_l und in (3.24) φ_r als Testfunktion, so erhält man durch Addition der beiden Ungleichungen die Behauptung (3.22). ■

Das folgende Lemma wird uns ermöglichen, die Eindeutigkeit der Entropieprozesslösung zu zeigen. Es ist in analoger Form bei Vovelle (vgl. [13, Lemma 2]) zu finden.

Lemma 3.8

Seien $\mu, \nu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$ zwei Entropieprozesslösungen von (1.3) zu den Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ und den Randdaten $u_l, u_r \in L^\infty(]0, T[)$. Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \times]0, T[)$, $\varphi \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \beta)| \partial_t \varphi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), \nu(x, t, \beta)) \partial_x \varphi(x, t) \\
& \quad - \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \beta)) z'(x) (b(\mu(x, t, \alpha)) - b(\nu(x, t, \beta))) \varphi(x, t) \, d\beta \, d\alpha \, dx \, dt \geq 0, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

wobei F durch (3.9) definiert ist.

Beweis

Der Beweis basiert auf der Kružkovs Methode der Verdopplung der Variablen (vgl. [10]).

Sei $\psi \in C_0^\infty([x_l, x_r] \times]0, T[)$, $\psi \geq 0$ und sei $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ein nichtnegativer Glättungskern mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset]0, 1[\times \mathbb{R}$ und $\omega_\epsilon(x, t) := \frac{1}{\epsilon^2} \omega\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right)$. Dann definieren wir für $\epsilon > 0$ Testfunktionen

$$\varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) := \psi(x, t) \omega_\epsilon(x - \tilde{x}, t - \tilde{t}).$$

Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty \left((]x_l, x_r] \times]0, T])^2 \right)$. Desweiteren ist

$$\varphi_\epsilon (x, t, x_r, \tilde{t}) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t, \tilde{t} \in]0, T[,$$

da $x - x_r < 0$ für alle $x \in \Omega$ und $\text{supp}(\omega) \subset]0, 1[$.

In (3.22) setzen wir $k = \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})$ und wählen $\varphi_\epsilon(\cdot, \cdot, \tilde{t}, \tilde{x})$ als Testfunktion. Nach Integration über $\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})| \partial_t \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \\ & \quad + F(\mu(x, t, \alpha), \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})) \partial_x \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \\ & - \text{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})) z'(x) b(\mu(x, t, \alpha)) \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \, d\alpha \, d\tilde{\alpha} \, dx \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \\ & + \text{ess lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \varphi_\epsilon(x_r, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \, d\alpha \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \\ & - \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 F(u_r(t), \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})) \varphi_\epsilon(x_r, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \, d\tilde{\alpha} \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Andererseits ist ν selbst Entropieprozesslösung von (1.3), sodass ν (3.11) und (3.12) erfüllt. Wir summieren beide Ungleichungen, setzen $k = \mu(x, t, \alpha)$ und wählen $\varphi_\epsilon(x, t, \cdot, \cdot)$ als Testfunktion. Nach Integration über x, t, α erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 |\nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha}) - \mu(x, t, \alpha)| \partial_{\tilde{t}} \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \\ & \quad + F(\nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha}), \mu(x, t, \alpha)) \partial_{\tilde{x}} \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \\ & - \text{sgn}(\nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha}) - \mu(x, t, \alpha)) z'(x) b(\nu(x, t, \alpha)) \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) \, d\alpha \, d\tilde{\alpha} \, dx \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Jetzt nutzen wir die Symmetrie von $(x, y) \mapsto |x - y|$ und F , die Antisymmetrie von $(x, y) \mapsto \text{sgn}(x - y)$ und die Identitäten

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_{\tilde{t}} \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) &= \partial_t \psi(x, t) \omega_\epsilon(t - \tilde{t}, x - \tilde{x}), \\ \partial_x \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}} \varphi_\epsilon(x, t, \tilde{x}, \tilde{t}) &= \partial_x \psi(x, t) \omega_\epsilon(t - \tilde{t}, x - \tilde{x}), \end{aligned}$$

um durch Summation von (3.27) und (3.28) folgende Ungleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})| \partial_t \psi(x, t) \omega_\epsilon(x - \tilde{x}, t - \tilde{t}) \\ & \quad + F(\mu(x, t, \alpha), \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})) \partial_x \psi(x, t) \omega_\epsilon(x - \tilde{x}, t - \tilde{t}) \\ & - B(\mu(x, t, \alpha), \nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha})) z'(x) \psi(x, t) \omega_\epsilon(x - \tilde{x}, t - \tilde{t}) \, d\alpha \, d\tilde{\alpha} \, dx \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \\ & + \text{ess lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \psi(x_r, t) \omega_\epsilon(x_r - \tilde{x}, t - \tilde{t}) \, d\alpha \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \\ & - \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 F(\nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha}), u_r(t)) \psi(x_r, t) \omega_\epsilon(x_r - \tilde{x}, t - \tilde{t}) \, d\tilde{\alpha} \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dabei ist

$$B(u, v) = \text{sgn}(u - v) (b(u) - b(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Für das letzte Integral können wir aus Lemma 3.5 folgern:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 F(\nu(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\alpha}), u_r(t)) \psi(x_r, t) \omega_\epsilon(x_r - \tilde{x}, t - \tilde{t}) \, d\tilde{\alpha} \, d\tilde{x} \, dt \, d\tilde{t} \\ & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{ess lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\nu(x_r, t, \tilde{\alpha}), u_r(t)) \psi(x_r, t) \, d\tilde{\alpha} \, dt \end{aligned}$$

Lässt man in (3.29) nun $\epsilon \rightarrow 0$ konvergieren, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \tilde{\alpha})| \partial_t \psi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), \nu(x, t, \tilde{\alpha})) \partial_x \psi(x, t) \\
& \quad - B(\mu(x, t, \alpha), \nu(x, t, \tilde{\alpha})) z'(x) \psi(x, t) d\alpha d\tilde{\alpha} dx dt \\
& \quad + \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\mu(x, t, \alpha), u_r(t)) \psi(x_r, t) d\alpha dt \\
& \quad - \operatorname{ess\,lim}_{x \uparrow x_r} \int_0^T \int_0^1 F(\nu(x, t, \alpha), u_r(t)) \psi(x_r, t) d\alpha dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Durch vertauschen der Rollen von μ und ν in (3.30) und Mittelung der beiden Ungleichungen erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \tilde{\alpha})| \partial_t \psi(x, t) + F(\mu(x, t, \alpha), \nu(x, t, \tilde{\alpha})) \partial_x \psi(x, t) \\
& \quad - B(\mu(x, t, \alpha), \nu(x, t, \tilde{\alpha})) z'(x) \psi(x, t) d\alpha d\tilde{\alpha} dx dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Analog gehen wir für $\psi \in C_0^\infty([x_l, x_r[\times]0, T[)$ vor. Mit demselben Argument wie in Lemma 3.7 schließen wir dann auf $\psi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times]0, T[)$. ■

Der folgende Satz basiert auf dem vorhergehenden Lemma. Er ist ebenfalls in analoger Form zu finden bei Vovelle (vgl. [13, Theorem 2]). Die Idee zur Behandlung des Quellterms findet man bei Bardos, Le Roux und Nedelec (siehe [3, Theorem 5]).

Satz 3.9 (Eindeutigkeit der Entropieprozesslösung)

Seien $\mu, \nu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$ zwei Entropieprozesslösungen von (1.3) zu den Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ und den Randdaten $u_l, u_r \in L^\infty(]0, T[)$. Dann existiert ein $u \in L^\infty(\Omega_T)$, sodass

$$\mu(x, t, \alpha) = u(x, t) = \nu(x, t, \beta) \quad \text{für fast alle } (x, t, \alpha, \beta) \in \Omega_T \times]0, 1]^2. \tag{3.32}$$

Insbesondere ist die Entropieprozesslösung von (1.3) eindeutig bestimmt.

Beweis

Sei $\psi \in C_0^\infty(]0, T[)$, $\varphi \geq 0$. In (3.26) wählen wir nun $(x, t) \mapsto \psi(t)$ als Testfunktion und erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \beta)| \partial_t \psi(t) d\beta d\alpha dx dt \\
& \quad - \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sgn}(\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \beta)) z'(x) \\
& \quad \cdot (b(\mu(x, t, \alpha)) - b(\nu(x, t, \beta))) \psi(t) d\beta d\alpha dx dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Abkürzend setzen wir

$$g(t) := \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x, t, \alpha) - \nu(x, t, \beta)| d\beta d\alpha dx \quad \forall t \in]0, T[.$$

Damit erhalten wir aus (3.33):

$$-\int_0^T g(t) \partial_t \psi(t) dt \leq \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T g(t) \psi(t) dt.$$

Nach partieller Integration auf der rechten Seite können wir Lemma A.9 anwenden. Also existiert eine Nullmenge $E \subset (0, T)$, sodass

$$t \mapsto g(t) - \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^t g(\xi) d\xi$$

monoton fallend auf $(0, T) \setminus E$ ist.

Für $t_1, t_2 \in]0, T[\setminus E$ mit $t_1 < t_2$ bekommen wir dann folgende Abschätzung:

$$g(t_2) \leq g(t_1) + \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{t_1}^{t_2} g(\xi) d\xi. \quad (3.34)$$

Mit dem Lemma von Gronwall (nach Approximation durch stetige Funktionen und eventueller Ausnahme einer weiteren Nullmenge) folgern wir aus (3.34)

$$\|\mu(\cdot, t_2, \cdot) - \nu(\cdot, t_2, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times]0, 1]^2)} \leq \|\mu(\cdot, t_1, \cdot) - \nu(\cdot, t_1, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times]0, 1]^2)} e^{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (t_2 - t_1)}. \quad (3.35)$$

Aus Lemma 3.6 erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,lim\,sup}_{t_1 \downarrow 0} \|\mu(\cdot, t_1, \cdot) - \nu(\cdot, t_1, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times]0, 1]^2)} \\ & \leq \operatorname{ess\,lim}_{t_1 \downarrow 0} \|\mu(\cdot, t_1, \cdot) - u_0\|_{L^1(\Omega \times]0, 1])} + \operatorname{ess\,lim}_{t_1 \downarrow 0} \|\nu(\cdot, t_1, \cdot) - u_0\|_{L^1(\Omega \times]0, 1])} = 0, \end{aligned}$$

d.h. aus (3.35) folgt für fast alle $t_2 \in]0, T[$:

$$\|\mu(\cdot, t_2, \cdot) - \nu(\cdot, t_2, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times]0, 1]^2)} \leq 0.$$

Folglich ist $\mu(x, t, \alpha) = \nu(x, t, \beta)$ für fast alle $(x, t) \in \Omega_T$ und fast alle $\alpha, \beta \in]0, 1[$, d.h. μ und ν hängen fast überall nicht von ihrem dritten Argument ab. Mit

$$u(x, t) := \int_0^1 \mu(x, t, \alpha) d\alpha$$

folgt dann (3.32). ■

Damit haben wir sowohl die Eindeutigkeit der Entropieprozesslösung als auch der Entropielösung von (1.3) gezeigt.

Kapitel 4

Das Engquist-Osher Verfahren

In diesem Kapitel betrachten wir in allgemeiner Form das Engquist-Osher Verfahren. Wir sind hier noch nicht an der Lösung einer speziellen Differentialgleichung interessiert, sondern wollen uns nur einige allgemeine Eigenschaften des Verfahrens ansehen. Insbesondere soll es um die Herleitung einer Zellen-tropieungleichung für jedes glatte Entropiepaar η, q gehen.

Der Engquist-Osher Fluss g_E ist gegeben durch

$$g_E(u, v) = \int_0^u f'^+(\xi) d\xi - \int_0^v f'^-(\xi) d\xi + f(0) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass der Negativteil einer reellen Zahl s in (3.2) als

$$s^- = \operatorname{sgn}^-(s) s \geq 0$$

definiert wurde. In der Literatur hingegen wird bei der Definition des Engquist-Osher Flusses normalerweise $s^- = \min\{s, 0\}$ gesetzt (vgl. z.B. [4], [6] und [9]). Daher haben wir ein negatives Vorzeichen für das zweite Integral in (4.1).

Für ein gleichmäßiges Gitter mit Gitterweiten Δx und Δt lässt sich das Engquist-Osher Verfahren wie folgt formulieren:

$$H_E(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_E(v, w) - g_E(u, v)) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Sind $u, v, w \in K \subset \mathbb{R}$, wobei K ein kompaktes Intervall ist, so gilt:

$$\begin{aligned} |g_E(u, w) - g_E(v, w)| &= \left| \int_0^u f'^+(\xi) d\xi - \int_0^v f'^+(\xi) d\xi \right| \leq \int_{[u, v]} |f'^+(\xi)| d\xi \\ &\leq \int_{[u, v]} |f'(\xi)| d\xi \leq \|f'\|_{L^\infty(K)} |u - v|. \end{aligned}$$

Analog sieht man, dass $|g_E(u, v) - g_E(u, w)| \leq \|f'\|_{L^\infty(K)} |v - w|$ gilt. Daher ist g_E lokal Lipschitz-stetig. Also ist g_E ein konsistenter, monotoner numerischer Fluss und für jedes kompakte Intervall $K \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{Lip}_K(g_E) \leq \operatorname{Lip}_K(f).$$

4.1 Beschränktheit des Engquist-Osher Verfahrens

Um das Engquist-Osher Verfahren zu untersuchen gehen wir analog zu [4] vor. Wir führen eine weitere Variable ein, indem wir für $s \in \mathbb{R}$ definieren:

$$\chi_s(\xi) = \begin{cases} 1 & 0 < \xi < s \\ -1 & s < \xi < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.3)$$

Die Funktion χ_s für $s \in \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Für $\xi \in \mathbb{R}$ gilt: $0 \leq \operatorname{sgn}(\xi) \chi_s(\xi) = |\chi_s(\xi)| \leq 1$.

(b) $\chi_s \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt:

$$\int \chi_s(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \chi_s(\xi) d\xi = s.$$

(c) Für alle $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int \chi_s(\xi) f(\xi) d\xi = \int_0^s f(\xi) d\xi.$$

(d) $\int |\chi_s(\xi)| d\xi = |s|$.

Ferner gilt für $u, v, \xi \in \mathbb{R}$: $\max\{\chi_u(\xi), \chi_v(\xi)\} = \chi_{\max\{u, v\}}(\xi)$.

Nun können wir das Engquist-Osher Verfahren (4.2) als Integral schreiben, indem wir für $u, v, w, \xi \in \mathbb{R}$

$$h_E(u, v, w)(\xi) := \chi_v(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f'^+(\xi) \chi_v(\xi) - f'^-(\xi) \chi_w(\xi) - f'^+(\xi) \chi_u(\xi) + f'^-(\xi) \chi_v(\xi) \right) \quad (4.4)$$

setzen und (4.2) umschreiben:

$$H_E(u, v, w) = \int h_E(u, v, w)(\xi) d\xi \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Wir werden nun zeigen, dass die integrale Form des Engquist-Osher Verfahrens nur Werte innerhalb der konvexen Hülle ihrer Argumente produziert:

Lemma 4.1

Sei die Abbildung $h_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ definiert durch (4.4). Sei $K = [-C, C]$ und seien $u, v, w \in K$. Ferner gelte die CFL-Bedingung

$$\|f'\|_{L^\infty(K)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.5)$$

Dann ist für $\xi \in \mathbb{R}$

$$h_E(u, v, w)(\xi) \in \operatorname{conv}\{\chi_u(\xi), \chi_v(\xi), \chi_w(\xi)\}. \quad (4.6)$$

Desweiteren ist $0 \leq \operatorname{sgn}(\xi) h_E(u, v, w)(\xi) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Beweis

Durch umschreiben von (4.4) erhält man

$$h_E(u, v, w)(\xi) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |f'(\xi)|\right) \chi_v(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'^+(\xi) \chi_u(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'^-(\xi) \chi_w(\xi).$$

Unter der CFL-Bedingung (4.5) ist $(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |f'(\xi)|) \geq 0$. Da $f'^+, f'^- \geq 0$ und $f'^+ + f'^- = |f'|$ ist, ist damit (4.6) gezeigt.

Ferner folgt

$$\operatorname{sgn}(\xi) h_E(u, v, w)(\xi) \in \operatorname{conv}\{\operatorname{sgn}(\xi) \chi_u(\xi), \operatorname{sgn}(\xi) \chi_v(\xi), \operatorname{sgn}(\xi) \chi_w(\xi)\}.$$

Da $0 \leq \operatorname{sgn}(\xi) \chi_s(\xi) \leq 1$ für alle $s, \xi \in \mathbb{R}$ ist, folgt $0 \leq \operatorname{sgn}(\xi) h_E(u, v, w)(\xi) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$. ■

Folgendes Korollar liefert dann die Beschränktheit des Engquist-Osher Verfahrens.

Korollar 4.2

Sei $K = [-C, C]$ und seien $u, v, w \in K$. Ferner gelte die CFL-Bedingung

$$\|f'\|_{L^\infty(K)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.7)$$

Dann gilt:

$$|H_E(u, v, w)| \leq \max\{|u|, |v|, |w|\}. \quad (4.8)$$

Beweis

Aus Lemma 4.1 folgt für $\xi \in \mathbb{R}$:

$$h_E(u, v, w)(\xi) \leq \max\{\chi_u(\xi), \chi_v(\xi), \chi_w(\xi)\} \leq \chi_{\max\{u, v, w\}}(\xi).$$

Die Monotonie des Integrals liefert dann $H_E(u, v, w) \leq \max(u, v, w)$.

Analog sieht man, dass $H_E(u, v, w) \geq \min(u, v, w)$ ist. Beide Aussagen zusammen ergeben die Behauptung. \blacksquare

4.2 Die Zellentropieungleichung

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu jedem Entropiepaar (η, q) einen konsistenten numerischen Entropiefluss G zu finden, sodass für $C > 0$ und hinreichend kleines $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ die Zellentropieungleichung

$$\eta(H_E(u, v, w)) - \eta(v) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (G(v, w) - G(u, v)) \leq 0 \quad \forall u, v, w \in [-C, C] \quad (4.9)$$

gilt.

Die Idee dieses Abschnittes entstammt der Arbeit von Botchorishvili, Perthame und Vasseur (vgl. [4, Lemma 3.1]). Allerdings ist der numerische Entropiefluss dort nicht explizit angegeben.

Das folgende Lemma bildet die Grundlage unserer Untersuchungen:

Lemma 4.3 (Brenier, siehe [5])

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \operatorname{sgn}(\xi) f(\xi) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ und sei $h \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und Lipschitz-stetig.

Dann gilt:

$$h\left(\int f(\xi) d\xi\right) - h(0) \leq \int h'(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (4.10)$$

Beweis

Da h konvex und Lipschitz-stetig ist, ist $h'' \geq 0$ und $\|h'\|_\infty < \infty$. Daher existiert $0 \leq \int h''(\xi) d\xi \leq \infty$ und für alle $s > 0$ gilt:

$$\int_{-s}^s h''(\xi) d\xi = h'(s) - h'(-s) \leq 2 \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Mit $s \rightarrow \infty$ folgt $\int h''(\xi) d\xi < \infty$, d.h. $h'' \in L^1(\mathbb{R})$.

Der Beweis erfolgt nun in 3 Schritten:

- (1) Zunächst sei $\operatorname{supp}(f) \subset [0, m]$ für ein $m > 0$, d.h. $0 \leq f \leq 1$. Folglich ist

$$F(s) := \int_0^s f(\xi) d\xi$$

monoton wachsend. Da ferner $F' = f \leq 1$ und $\operatorname{supp}(f) \subset [0, m]$ ist, gilt: $F(s) \leq \min\{F(m), s\}$. Insbesondere ist $F(m) \leq m$. Da $h'' \geq 0$ ist, folgt:

$$\int_0^m F(\xi) h''(\xi) d\xi \leq \int_0^{F(m)} \xi h''(\xi) d\xi + \int_{F(m)}^m F(m) h''(\xi) d\xi.$$

Rechnet man das hintere Integral aus, so erhält man

$$F(m) h'(F(m)) - \int_0^{F(m)} \xi h''(\xi) d\xi \leq F(m) h'(m) - \int_0^m F(\xi) h''(\xi) d\xi.$$

Damit lässt sich nun (4.10) zeigen:

$$\begin{aligned} h\left(\int f(\xi) d\xi\right) - h(0) &= h(F(m)) - h(0) = \int_0^{F(m)} h'(\xi) d\xi \\ &= [\xi h'(\xi)]_0^{F(m)} - \int_0^{F(m)} \xi h''(\xi) d\xi \\ &= F(m) h'(F(m)) - \int_0^{F(m)} \xi h''(\xi) d\xi \\ &\leq F(m) h'(m) - \int_0^m F(\xi) h''(\xi) d\xi \\ &= [F(\xi) h'(\xi)]_0^m - \int_0^m F(\xi) h''(\xi) d\xi \\ &= \int_0^m h'(\xi) F'(\xi) d\xi = \int_0^m h'(\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

(2) Sei nun $\text{supp}(f) \subset [-m, m]$ für ein $m > 0$. Setze $\tilde{h}(\xi) := h(\xi - m)$ und

$$\tilde{f}(\xi) := \begin{cases} f(\xi - m) & m \leq \xi \\ f(\xi - m) + 1 & 0 \leq \xi < m \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}.$$

Dann ist $\text{supp}(\tilde{f}) \subset [0, 2m]$, $0 \leq \tilde{f} \leq 1$ und $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Ferner ist $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und Lipschitz-stetig. Also lässt sich Schritt (1) auf \tilde{f} und \tilde{h} anwenden:

$$\begin{aligned} h\left(\int f(\xi) d\xi\right) - h(0) &= h\left(\int f(\xi - m) d\xi\right) - h(0) \\ &= h\left(\int_0^m (f(\xi - m) + 1) d\xi + \int_m^\infty f(\xi - m) d\xi - m\right) - h(0) \\ &= \tilde{h}\left(\int \tilde{f}(\xi) d\xi\right) - \tilde{h}(0) + h(-m) - h(0) \\ &\leq \int \tilde{h}'(\xi) \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^m h'(\xi - m) d\xi \\ &= \int_0^m \tilde{h}'(\xi) (f(\xi - m) + 1) d\xi \\ &\quad + \int_m^\infty \tilde{h}'(\xi) f(\xi - m) d\xi - \int_0^m \tilde{h}'(\xi) d\xi \\ &= \int_0^\infty h'(\xi - m) f(\xi - m) d\xi = \int_{-m}^m h'(\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

(3) Sei jetzt $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \text{sgn}(\xi) f(\xi) \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$. Setze $f_n := 1_{[-n, n]} f$. Dann ist $|f_n| \leq |f|$ und $\text{supp}(f_n) \subset [-n, n]$, d.h. $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, und $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$.

Da $h' \in L^\infty(\mathbb{R})$ (h Lipschitz-stetig), ist $h' f \in L^1(\mathbb{R})$ und es gilt: $|h' f_n| \leq |h' f|$.

Mit Schritt (2) und dominierter Konvergenz erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} h\left(\int f(\xi) d\xi\right) - h(0) &= h\left(\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) d\xi\right) - h(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\int f_n(\xi) d\xi\right) - h(0) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h'(\xi) f_n(\xi) d\xi = \int h'(\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung (4.10). ■

Lemma 4.1 und Lemma 4.3 werden uns nun ermöglichen, einen numerischen Entropiefluss G zu finden, der die Zellentropieungleichung (4.9) erfüllt:

Lemma 4.4

Es seien $|u|, |v|, |w| \leq C \in \mathbb{R}$, $K := [-C, C]$ und es gelte die CFL-Bedingung

$$\|f'\|_{L^\infty(K)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.11)$$

Für ein Entropiepaar (η, q) ist dann

$$G(u, v) := \int_0^u \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_0^v \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi + q(0) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

ein konsistenter numerischer Entropiefluss, sodass die Zellentropieungleichung (4.9) gilt.

Beweis

Man rechnet leicht nach, dass G ein konsistenter numerischer Entropiefluss ist.

Sei $\tilde{\eta} \in C^2(\mathbb{R})$ eine konvexe, Lipschitz-stetige Funktion mit $\tilde{\eta}(\xi) = \eta(\xi)$ für $|\xi| \leq C$.

Sei $\tilde{h} := h(u, v, w)$. Aus Lemma 4.1 und (4.11) folgt $0 \leq \operatorname{sgn}(\xi) \tilde{h}(\xi) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$. Mit Lemma 4.3 folgt dann

$$\tilde{\eta} \left(\int \tilde{h}(\xi) d\xi \right) - \tilde{\eta}(0) \leq \int \tilde{\eta}'(\xi) \tilde{h}(\xi) d\xi.$$

Mit $\tilde{H} := H_E(u, v, w)$ folgt daraus:

$$\tilde{\eta}(\tilde{H}) - \tilde{\eta}(0) - \int \tilde{\eta}' \left[\chi_v(\xi) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f'^+ \chi_v - f'^- \chi_w - f'^+ \chi_u + f'^- \chi_v \right) \right] d\xi \leq 0. \quad (4.12)$$

Desweiteren ist

$$\int \tilde{\eta}'(\xi) \chi_v(\xi) d\xi = \int_0^v \tilde{\eta}'(\xi) d\xi = \tilde{\eta}(v) - \tilde{\eta}(0).$$

Mit

$$\tilde{G}(u, v) := \int_0^u \tilde{\eta}'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_0^v \tilde{\eta}'(\xi) f'^-(\xi) d\xi + q(0) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

folgt aus (4.12)

$$\tilde{\eta}(H_E(u, v, w)) - \tilde{\eta}(v) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{G}(v, w) - \tilde{G}(u, v) \right) \leq 0.$$

Wegen Korollar 4.2 ist $|H_E(u, v, w)|, |u|, |v|, |w| \leq C$. Damit folgt (4.9). ■

Kapitel 5

Das balancierte Verfahren

In [4] wird ein auf Greenberg und Le Roux (vgl. [8]) zurückgehendes Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_t f(u) + z'(x) b(u) &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times]0, T[\\ u(\cdot, 0) &= u_0 & \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.1)$$

diskutiert, wobei hier $z \in H^{1,\infty}(\mathbb{R})$ ist, und für den Engquist-Osher Fluss Konvergenz gegen die Entropielösung gezeigt. Dieses Verfahren wollen wir in diesem Kapitel an das Anfangswertproblem (1.3) adaptieren, wobei wir uns ebenfalls auf den Engquist-Osher Fluss beschränken werden. Desweiteren werden wir in diesem Kapitel sehen, dass die numerische Lösung zu (1.3), die wir aus diesem Verfahren erhalten, beschränkt bleibt.

5.1 Motivation des Verfahrens

In diesem Abschnitt betrachten wir klassische Lösungen u des Anfangswertproblems (5.1), wobei hier $z \in C^1(\mathbb{R})$ sei.

Falls $u \in C^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ in t konstant ist, d.h. $\partial_t u = 0$ gilt, so erfüllt $\bar{u} := u(\cdot, t)$, $t > 0$ beliebig, die folgende Differentialgleichung:

$$\partial_x f(\bar{u}(x)) + z'(x) b(\bar{u}(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Wir nennen eine Lösung \bar{u} von (5.2) ein Gleichgewicht von (5.1). Umgekehrt wird durch $u(x, t) := \bar{u}(x)$ eine klassische Lösung von (5.1) definiert, falls \bar{u} ein Gleichgewicht ist.

Greenberg und Le Roux betrachten in [8] die Funktion

$$D(s) = \int_0^s \frac{f'(\xi)}{b(\xi)} d\xi. \quad (5.3)$$

In diesem Zusammenhang wird üblicherweise gefordert, dass $D \in C^1(\mathbb{R})$ streng monoton wachsend und surjektiv ist (vgl. [8] oder [4]). Wir werden die etwas schärfere Voraussetzung

$$D \in C^1(\mathbb{R}), \quad D(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \inf_{\mathbb{R}} D' > 0 \quad (5.4)$$

annehmen.

Für ein Gleichgewicht \bar{u} von (5.1) mit $b(\bar{u}(x)) \neq 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ ist (5.2) äquivalent zu

$$\partial_x (D(\bar{u}(x)) + z(x)) = 0 \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R},$$

d.h. (5.2) ist äquivalent zu

$$D(\bar{u}) + z(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Die Voraussetzung $b(\bar{u}(x)) \neq 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ ist dabei wesentlich, wie das Beispiel der Burgers-Hopf Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} + z'(x) u = 0 \quad (5.6)$$

zeigt. $u \equiv 0$ ist hier offensichtlich für jede Wahl von z ein Gleichgewicht, aber $D(0) + z(x)$ ist nicht notwendig konstant. Für $c \in \mathbb{R}$ ist ein weiteres Gleichgewicht von (5.6) gegeben durch

$$\bar{u}(x) = c - z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Die Bedingung (5.5) lässt sich auch im Diskreten formulieren, indem man

$$D(\bar{u}_i) + z_i = D(\bar{u}_j) + z_j \quad \forall i, j \in \mathbb{Z} \quad (5.8)$$

fordert. Wir nennen $(\bar{u}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ein diskretes Gleichgewicht von (5.1).

Nun soll das Verfahren diskrete Gleichgewichte (im Sinne von (5.8)) erhalten, d.h. falls $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ ein diskretes Gleichgewicht ist, so soll $u_j^n = u_j^0$ sein (für alle $n \in \mathbb{N}$). Ein solches Verfahren wird auch als balanciert (engl.: well-balanced) bezeichnet (vgl. [8]).

Dazu definieren wir zu $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ diskrete Gleichgewichtszustände $(u_{j,-})_{j \in \mathbb{Z}}$ und $(u_{j,+})_{j \in \mathbb{Z}}$ durch folgende Vorschrift:

$$\begin{aligned} D(u_{j-1,+}) + z_j &= D(u_{j-1}) + z_{j-1} \\ D(u_{j+1,-}) + z_j &= D(u_{j+1}) + z_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

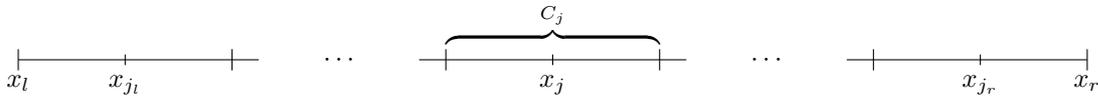
Die diskreten Gleichgewichtszustände sind wohldefiniert, da D als bijektiv angenommen ist (vgl. (5.4)). Für ein diskretes Gleichgewicht $(\bar{u}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ gilt offensichtlich $\bar{u}_{j-1,+} = \bar{u}_j = \bar{u}_{j+1,-}$, d.h. das durch

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - g(u_{j-1,+}^n, u_j^n)), \quad (5.10)$$

definierte Verfahren erhält diskrete Gleichgewichte im Sinne von (5.8).

5.2 Diskretisierung

Sei $\Delta x > 0$ mit $\frac{|\Omega|}{\Delta x} \in \mathbb{N}$. Wir zerlegen $\Omega =]x_l, x_r[$ gleichmäßig in Zellen $C_j :=]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ mit $|C_j| = \Delta x$. Dazu sei $j_l \in \mathbb{Z}$ und $x_j := x_l + (j - j_l + \frac{1}{2}) \Delta x$. Sei $J \subset \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $\bar{\Omega} = \bigcup_{j \in J} \bar{C}_j$ ist und setze $j_r := \max J$.



Sei $\Delta t > 0$ mit $N_T := \frac{T}{\Delta t} \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen das Intervall $]0, T[$ in Intervalle $]t^n, t^{n+1}[$ mit $t^n := n \Delta t$. Zu jeder Funktion $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^2)$ definieren wir die Zellwerte $\varphi_j^n := \varphi(x_j, t^n)$ und die diskrete Funktion

$$\bar{\varphi}(x, t) := \varphi_j^n \quad t \in [t^n, t^{n+1}[, x \in C_j. \quad (5.11)$$

5.2.1 Diskretisierung von z

Schließlich müssen wir noch die Funktion z diskretisieren. Da wir die Zellwerte z_{j_l-1} und z_{j_r+1} benötigen werden und $z \in H^{1,\infty}(\Omega)$ auf den entsprechenden Zellen nicht definiert ist, müssen wir z zunächst geeignet fortsetzen. Dazu werden wir folgendes Lemma ausnutzen:

Lemma 5.1

Zu $z \in H^{1,1}(\Omega)$ existiert eine Funktion $\tilde{z} \in C^0(\overline{\Omega})$, sodass $z = \tilde{z}$ fast überall in Ω .

Beweis

Sei $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Ferner sei

$$C := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi(x) dx$$

der Mittelwert von φ auf Ω . Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, nimmt φ auf $\overline{\Omega}$ ein Minimum und ein Maximum an und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in \Omega$ mit $\varphi(\xi) = C$.

Wir können also abschätzen:

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{\xi}^x \varphi'(s) ds + \varphi(\xi) \right| \leq \|\varphi'\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{|\Omega|} \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\varphi\|_{H^{1,1}(\Omega)}. \quad (5.12)$$

Sei nun $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ eine Folge mit $\varphi_k \rightarrow z$ in $H^{1,1}(\Omega)$. Dann gilt nach (5.12):

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi_k - \varphi_l| \leq C(\Omega) \|\varphi_k - \varphi_l\|_{H^{1,1}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

da $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $H^{1,1}(\Omega)$ ist. Also ist $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $C^0(\overline{\Omega})$ und es existiert ein $\tilde{z} \in C^0(\overline{\Omega})$, sodass $\varphi_k \rightarrow \tilde{z}$ in $C^0(\overline{\Omega})$, da $C^0(\overline{\Omega})$ vollständig ist.

Es ist

$$\|\tilde{z} - \varphi_k\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\tilde{z}(x) - \varphi_k(x)| dx \leq |\Omega| \sup_{\Omega} |\tilde{z} - \varphi_k| \rightarrow 0,$$

d.h. $\varphi_k \rightarrow \tilde{z}$ in $L^1(\Omega)$. Da insbesondere $\varphi_k \rightarrow z$ in $L^1(\Omega)$ konvergiert, folgt $z = \tilde{z}$ in $L^1(\Omega)$. Also ist $z = \tilde{z}$ f.ü. in Ω . ■

Da $H^{1,\infty}(\Omega) \subset H^{1,1}(\Omega)$ ist, existiert also eine auf $\overline{\Omega}$ stetige Version der Funktion z und wir können o.E. annehmen, dass $z \in C^0(\overline{\Omega})$ ist. Daher können wir z auf \mathbb{R} fortsetzen, indem wir

$$\tilde{z}(x) := \begin{cases} \lim_{\xi \downarrow x_l} z(\xi) & x < x_l \\ z(x) & x \in \Omega \\ \lim_{\xi \uparrow x_r} z(\xi) & x > x_r \end{cases}$$

setzen. Offensichtlich ist $\|\tilde{z}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|z\|_{L^\infty(\Omega)}$ und $\|\tilde{z}'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}$. Wir werden daher ab jetzt nicht mehr zwischen z und \tilde{z} unterscheiden.

Nun diskretisieren wir z wie folgt:

$$z_j := \begin{cases} z_{j_l} & j < j_l \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} z(x) dx & j \in J \\ z_{j_r} & j > j_r \end{cases} \quad (5.13)$$

und definieren die diskrete Funktion $z_{\Delta x}$ durch

$$z_{\Delta x}(x) := z_j \quad x \in C_j.$$

Für die Approximation des diskreten Differenzenquotienten an z' haben wir folgendes Resultat:

Lemma 5.2

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \cap C_0^2(\mathbb{R})$. Dann gilt für $h_+, h_- \geq 0$ mit $h_+ + h_- = \Delta x$:

$$\left| \int_{\Omega} \left[\frac{z_{\Delta x}(x + h_+) - z_{\Delta x}(x - h_-)}{\Delta x} - z'(x) \right] \varphi(x) dx \right| \leq C(z, \Omega, \varphi) \Delta x. \quad (5.14)$$

Beweis

Zunächst existiert ein offenes Intervall $M =]m_l, m_r[$ mit $\text{supp}(\varphi) \cup \Omega \subset M$. Durch die Wahl der Fortsetzung von z und $z_{\Delta x}$ auf ganz \mathbb{R} erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{z_{\Delta x}(x+h_+) - z_{\Delta x}(x-h_-)}{\Delta x} - z'(x) \right] \varphi(x) dx \\ &= \int_M \left[\frac{z_{\Delta x}(x+h_+) - z_{\Delta x}(x-h_-)}{\Delta x} - z'(x) \right] \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

da $z'(x) = 0$ und $z_{\Delta x}(x+h_+) - z_{\Delta x}(x-h_-) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$.

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_M \left[\frac{z_{\Delta x}(x+h_+) - z_{\Delta x}(x-h_-)}{\Delta x} - z'(x) \right] \varphi(x) dx \\ &= - \int_M z_{\Delta x}(x) \frac{\varphi(x+h_-) - \varphi(x-h_+)}{\Delta x} - z(x) \varphi'(x) dx \\ & \quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{m_r}^{m_r+h_+} z_{\Delta x}(x) \varphi(x-h_+) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{m_l}^{m_l+h_+} z_{\Delta x}(x) \varphi(x-h_+) dx \\ & \quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{m_r-h_-}^{m_r} z_{\Delta x}(x) \varphi(x+h_-) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{m_l-h_-}^{m_l} z_{\Delta x}(x) \varphi(x+h_-) dx. \end{aligned}$$

Wegen $\|z_{\Delta x}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|z\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ und $\varphi(m_l) = \varphi(m_r) = 0$ gilt etwa:

$$\left| \int_{m_r}^{m_r+h_+} z_{\Delta x}(x) \varphi(x-h_+) dx \right| \leq h_+^2 \|z\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\varphi'\|_\infty.$$

Weiter haben wir

$$|z_{\Delta x}(x) - z(x)| \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} |z(\xi) - z(x)| d\xi \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} \int_{[x,\xi]} |z'(\zeta)| d\zeta d\xi \leq \Delta x \|z'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (5.15)$$

und damit

$$\left| \int_M (z_{\Delta x}(x) - z(x)) \frac{\varphi(x+h_-) - \varphi(x-h_+)}{\Delta x} dx \right| \leq \Delta x |M| \|z'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\varphi'\|_\infty.$$

Wegen

$$\left| \frac{\varphi(x+h_-) - \varphi(x-h_+)}{\Delta x} - \varphi'(x) \right| \leq \Delta x \|\varphi''\|_\infty$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \left| \int_M \left[\frac{z_{\Delta x}(x+h_+) - z_{\Delta x}(x-h_-)}{\Delta x} - z'(x) \right] \varphi(x) dx \right| &\leq \Delta x |M| (\|z\|_\infty \|\varphi''\|_\infty + \|z'\|_\infty \|\varphi'\|_\infty) \\ &\quad + 4 \Delta x \|z\|_\infty \|\varphi'\|_\infty. \end{aligned}$$

Dies ist gerade (5.14). ■

5.2.2 Das Verfahren im beschränkten Gebiet

Zunächst diskretisieren wir die Anfangs- und Randwerte durch ihre Zellmittelwerte:

$$u_j^0 := \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u_0(x) dx, \quad u_l^n := \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u_l(t) dt, \quad u_r^n := \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u_r(t) dt. \quad (5.16)$$

Ferner definieren wir diskrete Funktionen $u_{\Delta x}^0 \in L^\infty(\Omega)$ und $u_{\Delta x}^l, u_{\Delta x}^r \in L^\infty([0, T])$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_{\Delta x}^0(x) &:= u_j^0 & x \in C_j, j \in J, \\ u_{\Delta x}^l(t) &:= u_l^n & t \in [t^n, t^{n+1}[, n < N_T, \\ u_{\Delta x}^r(t) &:= u_r^n & t \in [t^n, t^{n+1}[, n < N_T. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Für $j \in J$ können wir das explizite Verfahren (5.10) verwenden, um die Werte u_j^n zu berechnen. Für $j \notin J$ verwenden wir einfach die Randwerte und setzen:

$$u_j^n := \begin{cases} u_l^n & j < j_l \\ u_r^n & j > j_r \end{cases}. \quad (5.18)$$

Zu den so definierten Daten $(u_j^n)_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq n < N_T}}$ definieren wir die approximative Lösung $u_{\Delta x} \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ durch

$$u_{\Delta x}(x, t) := u_j^n \quad \text{für } t \in [t^n, t^{n+1}[, n < N_T, x \in C_j, j \in J. \quad (5.19)$$

5.3 Die diskreten Gleichgewichtszustände

Unter den Voraussetzungen (5.4) existiert die Umkehrabbildung D^{-1} . Also gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion γ mit

$$D(\gamma(v, \xi)) = D(v) + \xi. \quad (5.20)$$

Mit Hilfe von γ können wir die diskreten Gleichgewichtszustände $u_{j+1,-}^n, u_{j-1,+}^n$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} u_{j+1,-}^n &= \gamma(u_{j+1}^n, z_{j+1} - z_j), \\ u_{j-1,+}^n &= \gamma(u_{j-1}^n, -(z_j - z_{j-1})). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass sich die diskreten Gleichgewichtszustände nicht ändern, wenn man anstelle von z die Funktion $\tilde{z} := z + c$, $c \in \mathbb{R}$ betrachtet. Dies ist eine wünschenswerte Eigenschaft, da in der Differentialgleichung z nur in Form seiner Ableitung vorkommt, sodass wir für \tilde{z} anstelle von z dieselbe Differentialgleichung erhalten würden.

Das folgende Lemma zeigt, dass γ stetig differenzierbar von seinen Argumenten abhängt. Es sei bemerkt, dass sich für $f \in C^2(\mathbb{R})$ die Regularität auf $C^2(\mathbb{R})$ erhöht, indem man die „Quotientenregel“ anwendet.

Lemma 5.3

Unter den Voraussetzungen (5.4) ist die durch (5.20) definierte Abbildung γ stetig differenzierbar.

Beweis

Seien $v, \xi, h \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\zeta_h^1 \in]\gamma(v, \xi), \gamma(v+h, \xi)[$ mit

$$\begin{aligned} D'(\zeta_h^1) \frac{\gamma(v+h, \xi) - \gamma(v, \xi)}{h} &= \frac{D(\gamma(v+h, \xi)) - D(\gamma(v, \xi))}{h} = \frac{D(v+h) + \xi - (D(v) + \xi)}{h} \\ &= \frac{D(v+h) - D(v)}{h}. \end{aligned}$$

Da $D' > 0$ stetig ist, ergibt sich für $h \rightarrow 0$:

$$\partial_v \gamma(v, \xi) = \frac{D'(v)}{D'(\gamma(v, \xi))}.$$

Analog erhalten wir ein $\zeta_h^2 \in]\gamma(v, \xi), \gamma(v, \xi+h)[$ mit

$$D'(\zeta_h^2) \frac{\gamma(v, \xi+h) - \gamma(v, \xi)}{h} = \frac{D(\gamma(v, \xi+h)) - D(\gamma(v, \xi))}{h} = \frac{D(v) + (\xi+h) - (D(v) + \xi)}{h} = 1.$$

Daraus ergibt sich für $h \rightarrow 0$:

$$\partial_\xi \gamma(v, \xi) = \frac{1}{D'(\gamma(v, \xi))}. \quad \blacksquare$$

Betrachten wir nun den Gleichgewichtszustand $u_{j,+}$ näher. Wir definieren eine stückweise konstante Funktion $v_{\Delta x}$ auf $[x_j, x_{j+1}]$, indem wir

$$v_{\Delta x} := \begin{cases} u_j & x \in C_j \\ u_{j,+} & x \in C_{j+1} \end{cases}$$

setzen. Dann existiert nach (5.9) ein $c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$D(v_{\Delta x}(x)) + z_{\Delta x}(x) = c.$$

Andererseits existiert aufgrund der Invertierbarkeit von D eine Funktion $v \in H^{1,\infty}([x_j, x_{j+1}])$ mit

$$D(v(x)) + z(x) = c. \quad (5.21)$$

Die Funktion v ist schwach differenzierbar, da $D^{-1} \in C^1(\mathbb{R})$ ist (vgl. (5.4)) und $z \in H^{1,\infty}([x_j, x_{j+1}])$ ist. Differenzieren wir (5.21) nach x und multiplizieren das Ergebnis mit $b(v(x))$, so erhalten wir unter Verwendung von (5.3):

$$\partial_x f(v(x)) + z'(x) b(v(x)) = 0 \quad \text{für fast alle } x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Wir hätten also zur Definition der diskreten Gleichgewichtszustände auch die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_x f(v(x)) + z'(x) b(v(x)) &= 0 \\ v(x_j) &= u_j \end{aligned} \quad (5.22)$$

benutzen können und $u_{j,+} := v(x_{j+1})$ setzen können. Analog hätten wir dann $u_{j,-} := v(x_{j-1})$ gesetzt. Diese Variante der diskreten Gleichgewichtszustände lässt sich auf beliebige Quellterme verallgemeinern, solange man voraussetzt, dass (5.22) für alle Werte $u_j \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung besitzt. Nach obigen Überlegungen ist dies der Fall, wenn ein D wie in (5.3) existiert, das (5.4) erfüllt.

5.4 Beschränktheit der numerischen Lösung

Um eine schwach*-konvergente Teilfolge auszuwählen, werden wir eine Abschätzung der Form

$$\sup_{\substack{0 \leq n \Delta t \leq T \\ j \in J}} |u_j^n| \leq C, \quad (5.23)$$

brauchen, wobei die Konstante C unabhängig von Δx ist (vgl. Satz 6.1). In diesem Abschnitt soll es daher um die Existenz einer solchen Konstanten gehen.

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine solche Schranke nicht existieren muss, falls $|b'|$ unbeschränkt ist:

Beispiel 5.4

Betrachten wir das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) - u^\alpha &= 0 & \text{in } [0, T] \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) &= 1 & \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.24)$$

für ein $\alpha > 1$. Da $u(0, \cdot)$ konstant ist, sieht man sofort, dass eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t v &= v^\alpha & \text{in } [0, T] \\ v(0) &= 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

durch $u(t, x) := v(t)$ eine klassische Lösung von (5.24) induziert.

Eine Lösung von (5.25) ist

$$v(t) = (1 - (\alpha - 1)t)^{-\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha^{-1} \sqrt[1 - (\alpha - 1)t]},$$

denn

$$\partial_t v = -\frac{1}{\alpha-1} (1 - (\alpha-1)t)^{-\frac{1}{\alpha-1}-1} (-(\alpha-1)) = (1 - (\alpha-1)t)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (v(t))^\alpha.$$

Aber $v(t)$ wird bei $t = \frac{1}{\alpha-1}$ singular, d.h. für $T \geq \frac{1}{\alpha-1}$ kann keine Abschätzung der Form (5.23) existieren.

Beispiel 5.4 zeigt, dass Forderungen an b notwendig sind, um eine Abschätzung der Form (5.23) zu erhalten. Daher sei vorausgesetzt, dass $b' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $b(0) = 0$ ist. Die Autoren von [8] und [4] ziehen sich der Einfachheit halber auf den Fall $b(u) = u$ zurück.

Für den Engquist-Osher Fluss g_E kann man sich an [4, Lemma 3.1] orientieren und folgende Abschätzung beweisen:

Lemma 5.5

Die Funktion D aus (5.3) erfülle die Voraussetzungen (5.4). Sei $b(0) = 0$, $\|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ und sei $M := \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u_l\|_{L^\infty([0,T])}, \|u_r\|_{L^\infty([0,T])} \right\}$. Ferner sei

$$C_T^{\Delta x} := M e^{2T} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4T} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5.26)$$

$K_T^{\Delta x} := [-C_T^{\Delta x}, C_T^{\Delta x}]$ und es gelte die CFL-Bedingung

$$\text{Lip}_{K_T^{\Delta x}}(f) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (5.27)$$

Dann gilt für $n \Delta t \leq T$:

$$\sup_{j \in J} |u_j^n| \leq C_T^{\Delta x}. \quad (5.28)$$

Desweiteren gilt für $(n+1) \Delta t \leq T$:

$$\sup_{j \in J} |u_{j-1,+}^n| \leq C_T^{\Delta x}, \quad \sup_{j \in J} |u_{j+1,-}^n| \leq C_T^{\Delta x}. \quad (5.29)$$

Beweis

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} |g_E(u, v) - g_E(u, w)| &= \left| \int_0^u f'^+(s) ds - \int_0^v f'^-(s) ds - \int_0^u f'^+(s) ds + \int_0^w f'^-(s) ds \right| \\ &= \left| \int_v^w f'^-(s) ds \right| \leq \int_{[v,w]} |f'^-(s)| ds \\ &\leq \int_{[v,w]} |f'(s)| ds = \int_{[v,w]} |D'(s) b(s)| ds \\ &\stackrel{b(0)=0}{\leq} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{[v,w]} D'(s) |s| ds \\ &\leq \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \max\{|v|, |w|\} \int_{[v,w]} D'(s) ds. \end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie von D haben wir:

$$\int_{[v,w]} D'(s) ds = |D(v) - D(w)|.$$

Mit Taylorentwicklung kann man abschätzen:

$$|u_{j+1}^n - u_{j+1,-}^n| \leq \frac{|D(u_{j+1}^n) - D(u_{j+1,-}^n)|}{\inf_{\mathbb{R}} D'} = \frac{|z_j - z_{j+1}|}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \leq \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'}. \quad (5.30)$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} |g_E(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - g_E(u_j^n, u_{j+1}^n)| &\leq \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \max\{|u_{j+1,-}^n|, |u_{j+1}^n|\} |D(u_{j+1,-}^n) - D(u_{j+1}^n)| \\ &\leq \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(|u_{j+1}^n| + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \right) \Delta x \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog kann man abschätzen:

$$|g_E(u_{j-1,+}^n, u_j^n) - g_E(u_{j-1}^n, u_j^n)| \leq \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(|u_{j-1}^n| + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \right) \Delta x \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Nun wollen wir durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$ mit $n \Delta t \leq T$ zeigen:

$$\sup_{j \in J} |u_j^n| \leq M e^{2n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (5.31)$$

Hieraus folgt dann (5.28). Offensichtlich gilt (5.31) für die Anfangsdaten, d.h. für $n = 0$.

Gilt (5.31) für $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) \Delta t \leq T$, so gilt mit (5.27), $\text{Lip}_{K_{\Delta x}}(g_E) \leq \text{Lip}_{K_{\Delta x}}(f)$ und Korollar 4.2 für alle $j \in J$:

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &\leq \left| u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_E(u_j^n, u_{j+1}^n) - g_E(u_{j-1}^n, u_j^n)) \right| \\ &\quad + \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_E(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - g_E(u_j^n, u_{j+1}^n)) \right| + \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_E(u_{j-1,+}^n, u_j^n) - g_E(u_{j-1}^n, u_j^n)) \right| \\ &\leq \max\{|u_{j-1}^n|, |u_j^n|, |u_{j+1}^n|\} + \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(|u_{j+1}^n| + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \right) \Delta t \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(|u_{j-1}^n| + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \right) \Delta t \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \sup_{j \in \bar{J}} |u_j^n| + 2 \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\sup_{j \in \bar{J}} |u_j^n| + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \right) \Delta t \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{j \in J} |u_j^n|, |u_l^n|, |u_r^n| \right\} \left(1 + 2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\quad + 2 \Delta x \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\inf_{\mathbb{R}} D'}. \end{aligned}$$

Falls $\max\{\sup_{j \in J} |u_j^n|, |u_l^n|, |u_r^n|\} = |u_l^n|$, so ist

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &\leq |u_l^n| \left(1 + 2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \right) + 2 \Delta x \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \\ &\leq \|u_l\|_{L^\infty([0,T])} e^{2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}} \underbrace{e^{2n \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\geq 1} \\ &\quad + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}} \underbrace{e^{4n \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\geq 1} \\ &\leq M e^{2(n+1) \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}} + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4(n+1) \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Analog behandelt man den Fall $\max\{\sup_{j \in J} |u_j^n|, |u_l^n|, |u_r^n|\} = |u_r^n|$.

Für den Fall $\max\{\sup_{j \in J} |u_j^n|, |u_l^n|, |u_r^n|\} = \sup_{j \in J} |u_j^n|$ nutzen wir die Induktionsannahme (5.31) aus und erhalten:

$$\begin{aligned}
|u_j^{n+1}| &\leq M e^{2n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + 2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&\quad + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + 2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&\quad + 2 \Delta x \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \\
&\leq M e^{2n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} e^{2 \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + 2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&\quad + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \underbrace{e^{4n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\geq 1} \left(2 \Delta t \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&\leq M e^{2(n+1) \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4n \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} e^{4 \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq M e^{2(n+1) \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} e^{4(n+1) \Delta t} \|b'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Damit ist (5.31) für $n \Delta t \leq T$ gezeigt.

Die Abschätzungen in (5.29) folgen aus (5.30), (5.31) und $(n+1) \Delta t \leq T$. \blacksquare

Es sei darauf hingewiesen, dass der zweite Term in (5.26), obwohl er in [4, Lemma 3.1] fehlt, notwendig ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 5.6

Wir betrachten die Burgers-Hopf Gleichung (5.6), d.h. $D(s) = s$. Dann sind die Voraussetzungen (5.4) erfüllt. Zur Lösung betrachten wir das Verfahren (5.10) mit dem Engquist-Osher Fluss g_E . Wie in [4, Lemma 3.1] sei

$$C := \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{2T} \|z'\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

und es gelte die CFL-Bedingung

$$\Delta t \max_{|s| \leq C} |f'(s)| \leq \Delta x. \quad (5.32)$$

Desweiteren sei $u_0 \equiv 0$. Dann ist $C = 0$ und die CFL-Bedingung (5.32) vereinfacht sich zu $0 \leq \Delta x$, d.h. sie ist für beliebiges $\Delta t, \Delta x > 0$ erfüllt. Ferner ist $u_j^0 = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Seien $\Delta t, \Delta x > 0$ fest gewählt und sei $z \in C^\infty(\mathbb{R})$, $z, z' \in L^\infty(\Omega)$, mit $z(x) = 1$ für $|x| \geq \frac{1}{2} \Delta x$ und

$$\int_{-\frac{1}{2} \Delta x}^{\frac{1}{2} \Delta x} z(x) dx = 0.$$

Aus (5.9) folgt dann $u_{1,-}^0 = 1$ und $u_{-1,+}^0 = 1$ und aus (5.10) folgt:

$$u_0^1 = u_0^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_E(u_0^0, u_{1,-}^0) - g_E(u_{-1,+}^0, u_0^0)) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(-\int_0^1 s^- ds - \int_0^1 s^+ ds \right) = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} > C,$$

d.h. die Abschätzung $u_j^n \leq C$ für $n \Delta t \leq T$, $j \in \mathbb{Z}$ aus [4, Lemma 3.1] ist nicht erfüllt.

Kapitel 6

Konvergenz des Verfahrens

In diesem Kapitel wollen wir uns der Konvergenz des Verfahrens (5.10) gegen die Entropielösung widmen. Dabei werden wir den Weg über die Entropieprozesslösung wählen, da wir den folgenden Satz, der auf Eymard, Gallouët und Herbin zurückgeht, benutzen wollen:

Satz 6.1 (Eymard, Gallouët, Herbin)

Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, T[)$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, sodass für alle $g \in C(\mathbb{R})$ eine Funktion $u_g \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, T[)$ existiert mit $g(u_k) \xrightarrow{*} u_g$ in $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^n)$.

Ferner existiert eine Funktion $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, T[\times]0, 1[)$, sodass für alle $g \in C(\mathbb{R})$ und fast alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[$ gilt:

$$\int_0^1 g(\mu(x, t, \alpha)) d\alpha = u_g(x, t).$$

Beweis

Siehe [7, Proposition 3]. ■

Für die Konvergenzbetrachtungen werden wir uns (wie schon in Kapitel 3) verstärkt an Vovelles Arbeit [13] orientieren. Während es bei der Betrachtung von Erhaltungsgleichungen ohne Quellterm kein Problem ist, mit Semi-Kružkov-Entropiepaaren zu arbeiten (vgl. [13]), müssen wir hier glatte Rand-Entropiepaare (vgl. Definition 2.3) verwenden. Der Grund dafür liegt in der Art der Konvergenz, die wir aus Satz 6.1 erhalten. Hier darf die Folge von numerischen Lösungen nur als Argument einer stetigen Funktion auftauchen. Daher benötigen wir eine stetige Ableitung der Entropie, die die Semi-Kružkov-Entropiepaare nicht besitzen.

Das folgende Lemma wird uns das Behandeln der Randterme ermöglichen. Für Semi-Kružkov-Entropiepaare ist es in [13, Lemma 9] zu finden.

Lemma 6.2

Sei (η, q) ein Rand-Entropiepaar, d.h. (η, q) ist ein Entropiepaar und es existiert ein $w \in \mathbb{R}$ mit $\eta(w) = 0$, $\eta'(w) = 0$ und $q(w) = 0$. Ferner sei

$$G(u, v) = \int_0^u \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_0^v \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi + q(0) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$G(u, v) = \int_w^u \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_w^v \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Sind ferner $u, v, w \in [-C, C]$, $C > 0$, so gilt:

$$- \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \eta(v) \leq G(u, v) \leq \operatorname{Lip}_{[-C, C]}(f) \eta(u). \tag{6.1}$$

Beweis

Es ist

$$q(0) = \int_w^0 q'(\xi) d\xi = \int_w^0 \eta'(\xi) f'(\xi) d\xi = \int_w^0 \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_w^0 \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi$$

und damit

$$G(u, v) = \int_w^u \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_w^v \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Desweiteren ist für $\xi \in [u, w]$

$$\operatorname{sgn}(u-w) \eta'(\xi) = \operatorname{sgn}(u-w) \int_w^\xi \eta''(\zeta) d\zeta = \operatorname{sgn}(u-w) \underbrace{\operatorname{sgn}(\xi-w)}_{=\operatorname{sgn}(u-w)} \int_{[w,\xi]} \underbrace{\eta''(\zeta)}_{\geq 0} d\zeta \geq 0. \quad (6.3)$$

Mit $f'^+ \geq 0$ folgt

$$\int_w^u \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi = \int_{[w,u]} \operatorname{sgn}(u-w) \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \geq 0.$$

Andererseits ist wegen (6.3)

$$\begin{aligned} \int_w^u \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi &\leq \int_{[w,u]} |\operatorname{sgn}(u-w) \eta'(\xi)| |f'^+(\xi)| d\xi \\ &\leq \|f'\|_{L^\infty([-C,C])} \int_{[w,u]} \operatorname{sgn}(u-w) \eta'(\xi) d\xi \\ &= \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_w^u \eta'(\xi) d\xi \stackrel{\eta(w)=0}{=} \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \eta(u). \end{aligned}$$

Analog sieht man, dass

$$0 \leq \int_w^v \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \leq \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \eta(v).$$

Aus (6.2) folgt damit die Behauptung (6.1). ■

Nun haben wir alles beisammen, um den Grenzwert einer Teilfolge aus Satz 6.1 als Entropieprozesslösung zu identifizieren.

Lemma 6.3

Die Funktion D aus (5.3) erfülle die Voraussetzungen (5.4). Zu $\Delta t, \Delta x > 0$ mit $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \lambda$ sei $(u_j^n)_{\substack{0 \leq n \leq N_T \\ j \in J}}$ die approximative Lösung von (1.3) aus Verfahren (5.10) mit dem Engquist-Osher Fluss. Sei (η, q) ein Rand-Entropiepaar und $w \in \mathbb{R}$ mit $\eta(w) = \eta'(w) = q(w) = 0$ (vgl. Definition 2.3). Weiter existiere eine Konstante $C > |w|$ mit $|u_j^n| \leq C$ für $j \in J$, $n \leq N_T$ und $|u_{j+1,-}^n|, |u_{j-1,+}^n| \leq C$ für $j \in J$, $n < N_T$. Ferner existiere ein konsistenter numerischer Entropiefluss G , sodass die Zellentropieungleichung

$$\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (G(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - G(u_{j-1,+}^n, u_j^n)) \leq 0 \quad (6.4)$$

gilt.

Dann gilt für $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2) \cap C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$, $\varphi \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \eta(u_{\Delta x}) \partial_t \varphi + q(u_{\Delta x}) \partial_x \varphi - \eta'(u_{\Delta x}) b(u_{\Delta x}) z'(x) \varphi dx dt \\ &+ \int_\Omega \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_{j_r}, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_{j_l}, t) dt \geq \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Beweis

Der Beweis basiert auf Lemma 6.2 und dem Argument der Indexverschiebung.

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_T-1} (\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n)) \varphi_j^n &= - \sum_{n=0}^{N_T-1} \eta(u_j^n) (\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1}) + \eta(u_j^{N_T}) \varphi_j^{N_T-1} - \eta(u_j^0) \varphi_j^{-1} \\ &= -\Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \eta(u_j^n) (\partial_t \varphi)_j^n - \eta(u_j^0) \varphi_j^0 + \mathcal{E}_{t,j}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei

$$\mathcal{E}_{t,j} = \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \eta(u_j^n) \left((\partial_t \varphi)_j^n - \frac{\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1}}{\Delta t} \right) + \eta(u_j^{N_T}) \varphi_j^{N_T-1} + \eta(u_j^0) (\varphi_j^0 - \varphi_j^{-1})$$

ist. Da $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$ ist und $\varphi(x, T) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ gilt, haben wir für $j \in J$:

$$\begin{aligned} |\varphi_j^{N_T-1}| &= \left| \varphi(x_j, T) - \int_{T-\Delta t}^T \partial_t \varphi(x_j, \xi) d\xi \right| \leq \Delta t \|\partial_t \varphi\|_\infty, \\ |\varphi_j^0 - \varphi_j^{-1}| &= \left| \int_{-\Delta t}^0 \partial_t \varphi(x_j, \xi) d\xi \right| \leq \Delta t \|\partial_t \varphi\|_\infty, \\ \left| (\partial_t \varphi)_j^n - \frac{\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1}}{\Delta t} \right| &= \frac{1}{\Delta t} \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\xi^{t^n} \partial_t^2 \varphi(x_j, \zeta) d\zeta d\xi \right| \leq \Delta t \|\partial_t^2 \varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Wegen $N_T \Delta t = T$ ist dann $|\mathcal{E}_{t,j}| \leq \Delta t \|\eta\|_{L^\infty([-C, C])} (T \|\partial_t^2 \varphi\|_\infty + 2 \|\partial_t \varphi\|_\infty)$.

Mit der Jensenschen Ungleichung (A.5) haben wir

$$\eta(u_j^0) = \eta \left(\frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u_0(x) dx \right) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} \eta(u_0(x)) dx.$$

Zusammen mit (6.6) und der Nichtnegativität von φ erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} (\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n)) \varphi_j^n \geq -\Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \eta(u_j^n) (\partial_t \varphi)_j^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} \eta(u_0(x)) dx \varphi_j^0 + \mathcal{E}_{t,j}. \quad (6.7)$$

Für den Flussterm haben wir nach Lemma 6.2:

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n \\ &= \sum_{j \in J} \left[\int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_w^{u_{j-1}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \right] \varphi_j^n \\ &\quad - \sum_{j \in J} \left[\int_w^{u_{j+1}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi - \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \right] \varphi_j^n. \end{aligned}$$

Durch Umsummierung erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J} \left[\int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi - \int_w^{u_{j-1}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \right] \varphi_j^n \\ &= \sum_{j=j_l}^{j_r} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \varphi_j^n - \sum_{j=j_l-1}^{j_r-1} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \varphi_{j+1}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi (\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n) \\
&\quad - \int_w^{u_{j_l}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \varphi_{j_l}^n + \int_w^{u_{j_r}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \varphi_{j_r+1}^n.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j \in J} \left[\int_w^{u_{j+1}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi - \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \right] \varphi_j^n \\
&= \sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi (\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n) \\
&\quad + \int_w^{u_{j_l}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \varphi_{j_l-1}^n - \int_w^{u_{j_r+1}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \varphi_{j_r}^n.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n \\
&= -\Delta x \sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi (\partial_x \varphi)_j^n + \Delta x \sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi (\partial_x \varphi)_j^n \\
&\quad - \int_w^{u_{j_l}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \varphi_{j_l}^n + \int_w^{u_{j_r}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \varphi_{j_r}^n \\
&\quad + \int_w^{u_{j_l}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \varphi_{j_l}^n - \int_w^{u_{j_r+1}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \varphi_{j_r}^n + \mathcal{E}_{x,n} \\
&= -\Delta x \sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'(\xi) d\xi (\partial_x \varphi)_j^n + G(u_{j_r}^n, u_{j_r+1}^n) \varphi_{j_r}^n - G(u_{j_l-1}^n, u_{j_l}^n) \varphi_{j_l}^n + \mathcal{E}_{x,n}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{x,n} &= \Delta x \sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi \left((\partial_x \varphi)_j^n - \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) \\
&\quad - \Delta x \sum_{j \in J} \int_w^{u_j^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \left((\partial_x \varphi)_j^n - \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \\
&\quad + \int_w^{u_{j_r}^n} \eta'(\xi) f'^+(\xi) d\xi (\varphi_{j_r+1}^n - \varphi_{j_r}^n) - \int_w^{u_{j_l}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi (\varphi_{j_l}^n - \varphi_{j_l-1}^n).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ungleichung (6.1) aus Lemma 6.2 erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n \\
&\geq -\Delta x \sum_{j \in J} q(u_j^n) (\partial_x \varphi)_j^n - \eta(u_{j_r+1}^n) \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \varphi_{j_r}^n - \eta(u_{j_l-1}^n) \operatorname{Lip}_{[-C,C]}(f) \varphi_{j_l}^n + \mathcal{E}_{x,n}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Da $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
|\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n| &= \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \partial_t \varphi(\xi, t^n) d\xi \right| \leq \Delta x \|\partial_x \varphi\|_\infty, \\
\left| (\partial_x \varphi)_j^n - \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} \right| &= \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_\xi^{x_j} \partial_x^2 \varphi(\zeta, t^n) d\zeta d\xi \right| \leq \Delta x \|\partial_x^2 \varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Weil $\Delta x |J| = |\Omega|$ ist, ergibt sich

$$|\mathcal{E}_{x,n}| \leq 2 \Delta x C \|\eta'\|_{L^\infty([-C,C])} \|f'\|_{L^\infty([-C,C])} (|\Omega| \|\partial_x^2 \varphi\|_\infty + \|\partial_x \varphi\|_\infty).$$

Auch hier verwenden wir die Jensensche Ungleichung (A.5), um zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \eta(u_l^n) &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_l(t)) dt, \\ \eta(u_r^n) &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_r(t)) dt \end{aligned}$$

gilt. Wegen $u_{j_l-1}^n = u_l^n$ und $u_{j_r+1}^n = u_r^n$ und der Nichtnegativität von φ bekommen wir aus (6.8) dann

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n \\ &\geq -\Delta x \sum_{j \in J} q(u_j^n) (\partial_x \varphi)_j^n - \underset{[-C,C]}{\text{Lip}}(f) \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_r(t)) dt \varphi_{j_r}^n \\ &\quad - \underset{[-C,C]}{\text{Lip}}(f) \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_l(t)) dt \varphi_{j_l}^n + \mathcal{E}_{x,n}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Betrachten wir nun den Quellterm. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\zeta_{j+1}^n \in [u_{j+1}^n, u_{j+1,-}^n]$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} G(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - G(u_j^n, u_{j+1}^n) &= - \int_0^{u_{j+1,-}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi + \int_0^{u_{j+1}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \\ &= - \int_{u_{j+1}^n}^{u_{j+1,-}^n} \eta'(\xi) f'^-(\xi) d\xi \\ &= -\eta'(\zeta_{j+1}^n) f'^-(\zeta_{j+1}^n) (u_{j+1,-}^n - u_{j+1}^n). \end{aligned}$$

Mit (5.9) und dem Mittelwertsatz erhalten wir ein $\vartheta_{j+1}^n \in [u_{j+1}^n, u_{j+1,-}^n]$ mit

$$z_{j+1} - z_j = D(u_{j+1,-}^n) - D(u_{j+1}^n) = D'(\vartheta_{j+1}^n) (u_{j+1,-}^n - u_{j+1}^n)$$

Wegen $\inf_{\mathbb{R}} D' > 0$ ergibt sich dann

$$G(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - G(u_j^n, u_{j+1}^n) = -\Delta x \eta'(\zeta_{j+1}^n) \frac{f'^-(\zeta_{j+1}^n)}{D'(\vartheta_{j+1}^n)} \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x}.$$

Durch Multiplikation mit φ_j^n und Summation über $j \in J$ erhalten wir

$$\sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - G(u_j^n, u_{j+1}^n)) \varphi_j^n = -\Delta x \sum_{j \in J} \eta'(\zeta_j^n) \frac{f'^-(\zeta_j^n)}{D'(\vartheta_j^n)} \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta x} \varphi_{j-1}^n,$$

da $z_{j_l} - z_{j_l-1} = z_{j_r+1} - z_{j_r} = 0$ ist.

Mit (5.30) sieht man, dass

$$|u_j^n - \zeta_j^n|, |u_j^n - \vartheta_j^n| \leq |u_j^n - u_{j,+}^n| \leq \Delta x \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\inf_{\mathbb{R}} D'}$$

ist. Da $D' \in C^1(\mathbb{R})$ ist mit $\inf_{\mathbb{R}} D' > 0$, ist $\frac{1}{D'}$ stetig differenzierbar. Daher können wir für $x, y, z \in [-C, C]$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \eta'(x) \frac{f'^-(x)}{D'(y)} - \eta'(z) \frac{f'^-(z)}{D'(z)} \right| &\leq \|\eta'\|_{L^\infty([-C, C])} \|f'\|_{L^\infty([-C, C])} \left\| \left(\frac{1}{D'} \right)' \right\|_{L^\infty([-C, C])} |y - z| \\ &\quad + \|\eta'\|_{L^\infty([-C, C])} \|f''\|_{L^\infty([-C, C])} \left\| \frac{1}{D'} \right\|_{L^\infty([-C, C])} |x - z| \\ &\quad + \|\eta''\|_{L^\infty([-C, C])} \|f'\|_{L^\infty([-C, C])} \left\| \frac{1}{D'} \right\|_{L^\infty([-C, C])} |x - z| \\ &\leq C^* \max\{|x - z|, |y - z|\}. \end{aligned}$$

Wir setzen also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{+,n} &:= \Delta x \sum_{j \in J} \left(\eta'(u_j^n) \frac{f'^-(u_j^n)}{D'(u_j^n)} - \eta'(\zeta_j^n) \frac{f'^-(\zeta_j^n)}{D'(\zeta_j^n)} \right) \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta x} \varphi_{j-1}^n \\ &\quad + \Delta x^2 \sum_{j \in J} \eta'(u_j^n) \frac{f'^-(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta x} \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} \\ &\leq \Delta x |\Omega| C^* \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \|\varphi\|_\infty + \Delta x |\Omega| \frac{\|\eta'\|_{L^\infty([-C, C])} \|f'\|_{L^\infty([-C, C])}}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi'\|_\infty \end{aligned}$$

und erhalten

$$\sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - G(u_j^n, u_{j+1}^n)) \varphi_j^n = -\Delta x \sum_{j \in J} \eta'(u_j^n) \frac{f'^-(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta x} \varphi_j^n + \mathcal{E}_{+,n}. \quad (6.10)$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$-\sum_{j \in J} (G(u_{j-1,+}^n, u_j^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n = \Delta x \sum_{j \in J} \eta'(u_j^n) \frac{f'^+(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} \varphi_j^n + \mathcal{E}_{-,n} \quad (6.11)$$

ist mit $\mathcal{E}_{-,n} \leq \Delta x |\Omega| C^* \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \|\varphi\|_\infty$.

Multiplikation von (6.4) mit $\Delta x \varphi_j^n$ und Summation über $n < N_T$ und $j \in J$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} (\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n)) \varphi_j^n + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n \\ &\quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} (G(u_j^n, u_{j+1,-}^n) - G(u_j^n, u_{j+1}^n)) \varphi_j^n \\ &\quad - \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} (G(u_{j-1,+}^n, u_j^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \varphi_j^n. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (6.7), (6.9), (6.10) und (6.11) bekommen wir dann

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} \eta(u_j^n) (\partial_t \varphi)_j^n - \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} q(u_j^n) (\partial_x \varphi)_j^n \\ &\quad - \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} \eta'(u_j^n) \frac{f'^-(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta x} \varphi_j^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} \eta'(u_j^n) \frac{f'^+(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} \varphi_j^n \\
& - \sum_{j \in J} \int_{C_j} \eta(u_0(x)) dx \varphi_j^0 - \text{Lip}_{[-C,C]}(f) \sum_{n=0}^{N_T-1} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_r(t)) dt \varphi_{j_r}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_l(t)) dt \varphi_{j_l}^n \right] \\
& + \Delta x \sum_{j \in J} \mathcal{E}_{t,j} + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{E}_{x,n} + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{E}_{+,n} + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{E}_{-,n}.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\mathcal{E} := \Delta x \sum_{j \in J} \mathcal{E}_{t,j} + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{E}_{x,n} + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{E}_{+,n} + \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{E}_{-,n}.$$

Mit Hilfe der obigen Abschätzungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}| & \leq \lambda \Delta x |\Omega| \|\eta\|_{L^\infty([-C,C])} (T \|\partial_t^2 \varphi\|_\infty + 2 \|\partial_t \varphi\|_\infty) \\
& + 2 \Delta x C T \|\eta'\|_{L^\infty([-C,C])} \|f'\|_{L^\infty([-C,C])} (|\Omega| \|\partial_x^2 \varphi\|_\infty + \|\partial_x \varphi\|_\infty) \\
& + 2 \Delta x |\Omega| C^* \frac{\|z'\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\inf_{\mathbb{R}} D'} \|\varphi\|_\infty,
\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x)$.

Wir haben also folgende Ungleichung gezeigt:

$$\begin{aligned}
& \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} \eta(u_j^n) (\partial_t \varphi)_j^n + \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} q(u_j^n) (\partial_x \varphi)_j^n \\
& - \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{j \in J} \eta'(u_j^n) \left[\frac{f'^+(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} - \frac{f'^-(u_j^n)}{D'(u_j^n)} \frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta x} \right] \varphi_j^n \\
& + \sum_{j \in J} \int_{C_j} \eta(u_0(x)) \varphi_j^0 dx + \text{Lip}_{[-C,C]}(f) \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \eta(u_r(t)) \varphi_{j_r}^n + \eta(u_l(t)) \varphi_{j_l}^n dt \geq \mathcal{O}(\Delta x).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Aus (6.12) leiten wir folgende Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \eta(u_{\Delta x}) (\partial_t \varphi)_{\Delta x} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} q(u_{\Delta x}) (\partial_x \varphi)_{\Delta x} dx dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \eta'(u_{\Delta x}) \left[\frac{f'^+(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} \frac{z_{\Delta x}^+ - z_{\Delta x}}{\Delta x} - \frac{f'^-(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} \frac{z_{\Delta x} - z_{\Delta x}^-}{\Delta x} \right] \varphi_{\Delta x} dx dt \\
& + \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi_{\Delta x}(x, 0) dx \\
& + \text{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi_{\Delta x}(x_{j_r}, t) + \eta(u_l(t)) \varphi_{\Delta x}(x_{j_l}, t) dt \geq \mathcal{O}(\Delta x),
\end{aligned}$$

wobei $z_{\Delta x}^+(x) := z_{\Delta x}(x + \Delta x)$ und $z_{\Delta x}^-(x) := z_{\Delta x}(x - \Delta x)$ ist.

Aufgrund der Beschränktheit der numerischen Lösung und der Stetigkeit von φ , $\partial_t \varphi$ und $\partial_x \varphi$ haben wir:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \eta(u_{\Delta x}) \partial_t \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} q(u_{\Delta x}) \partial_x \varphi dx dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \eta'(u_{\Delta x}) \left[\frac{f'^+(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} \frac{z_{\Delta x}^+ - z_{\Delta x}}{\Delta x} - \frac{f'^-(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} \frac{z_{\Delta x} - z_{\Delta x}^-}{\Delta x} \right] \varphi dx dt \\
& + \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \text{Lip}_{[-C,C]}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_{j_r}, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_{j_l}, t) dt \geq \mathcal{O}(\Delta x).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.2 können wir nun, aufgrund der Beschränktheit der numerischen Lösung, folgern:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \eta'(u_{\Delta x}) \left[\frac{f'^+(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} \frac{z_{\Delta x}^+ - z_{\Delta x}}{\Delta x} - \frac{f'^-(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} \frac{z_{\Delta x} - z_{\Delta x}^-}{\Delta x} \right] \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \eta'(u_{\Delta x}) \left(\frac{f'^+(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} z'(x) - \frac{f'^-(u_{\Delta x})}{D'(u_{\Delta x})} z'(x) \right) \varphi \, dx \, dt + \mathcal{O}(\Delta x) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \eta'(u_{\Delta x}) b(u_{\Delta x}) z'(x) \varphi \, dx \, dt + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \eta(u_{\Delta x}) \partial_t \varphi + q(u_{\Delta x}) \partial_x \varphi - \eta'(u_{\Delta x}) b(u_{\Delta x}) z'(x) \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) \, dx + \underset{[-C, C]}{\text{Lip}}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_{j_r}, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_{j_l}, t) \, dt \geq \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Dies ist gerade (6.5). ■

Um starke L^p -Konvergenz zu erhalten, werden wir wie Vovelle in [13] vorgehen und folgende Aussage verwenden:

Lemma 6.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar und sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Weiter existiere eine Funktion $v \in L^\infty(\Omega)$, sodass für alle $g \in C(\mathbb{R})$ gilt:

$$g(v_n) \xrightarrow{*} g(v) \quad \text{in } L^\infty(\Omega). \quad (6.13)$$

Dann konvergiert $v_n \rightarrow v$ stark in $L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Beweis

Da Ω beschränkt ist, ist $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ und $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Mit $g(x) = x$ folgt aus (6.13):

$$v_n \xrightarrow{*} v \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Mit Hilfe von $g(x) = x^2$ erhalten wir außerdem

$$v_n^2 \xrightarrow{*} v^2 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Da $1 \in L^2(\Omega)$ ist, folgt insbesondere $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{L^2(\Omega)}$.

Daher können wir nun folgern, dass $v_n \rightarrow v$ in $L^2(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_n - v|^2 &= \int_{\Omega} (v_n^2 - 2v_n v + v^2) = \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} v_n v + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\xrightarrow{v \in L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Zum Beweis der L^p -Konvergenz, $1 \leq p < \infty$, setzen wir $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Nach Voraussetzung ist $C < \infty$ und wir erhalten mit Hilfe der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_n - v|^p &\leq \left(\int_{\Omega} |v_n - v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (|v_n - v|^{p-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} C^{p-1} |\Omega|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist die L^p -Konvergenz auf die L^2 -Konvergenz zurückgeführt. ■

Nun bauen wir all diese Ergebnisse zusammen und bekommen folgenden Satz:

Satz 6.5

Die Funktion D aus (5.3) erfülle die Voraussetzungen (5.4). Sei $(u_{\Delta x})_{\Delta x > 0}$ eine Folge von approximativen Lösungen von (1.3) aus Verfahren (5.10) mit dem Engquist-Osher Fluss und der CFL-Bedingung

$$\text{Lip}_{[-C_T^{\Delta x}, C_T^{\Delta x}]}(f) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (6.14)$$

wobei $C_T^{\Delta x}$ durch (5.26) gegeben ist.

Dann gibt es ein $u \in L^\infty(\Omega_T)$, sodass

$$u_{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} u \quad \text{in } L^p(\Omega_T) \quad (6.15)$$

konvergiert und u ist die eindeutige Entropielösung von (1.3).

Beweis

Für $\Delta x \leq \delta$ ist $C_T^{\Delta x} \leq C_T^\delta$. Die CFL-Bedingung (6.14) und Lemma 5.5 liefern uns dann für $0 < \Delta x \leq \delta$

$$\|u_{\Delta x}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C_T^\delta.$$

Für die diskreten Gleichgewichtszustände erhalten wir aus Lemma 5.5 folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |\gamma(u_{\Delta x}(x_{j+1}, t^n), z_{\Delta x}(x_{j+1}) - z_{\Delta x}(x_j))| &\leq C_T^\delta \quad \forall n \Delta t < T, \\ |\gamma(u_{\Delta x}(x_{j-1}, t^n), -z_{\Delta x}(x_j) - z_{\Delta x}(x_{j-1}))| &\leq C_T^\delta \quad \forall n \Delta t < T. \end{aligned}$$

Sei (η, q) ein Rand-Entropiepaar mit $\eta(w) = \eta'(w) = q(w) = 0$. Mit der CFL-Bedingung (6.14) und Lemma 4.4 existiert dann ein konsistenter numerischer Entropiefluss G , sodass die Zellentropiegleichung (4.9) erfüllt ist.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[)$, $\varphi \geq 0$. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[) \cap C_0^2(\mathbb{R}^2)$. Im folgenden werde diese Fortsetzung ebenfalls mit φ bezeichnet.

Mit $C := \max\{C_T^\delta, |w|\}$ sind dann alle Voraussetzungen von Lemma 6.3 erfüllt. Mit Hilfe dieses Lemmas folgern wir für $0 < \Delta x \leq \delta$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[) \cap C_0^2(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \eta(u_{\Delta x}) \partial_t \varphi + q(u_{\Delta x}) \partial_x \varphi - \eta'(u_{\Delta x}) b(u_{\Delta x}) z'(x) \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_\Omega \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) \, dx + \text{Lip}_{[-C, C]}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_{j_r}, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_{j_l}, t) \, dt \geq \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Aus Satz 6.1 bekommen wir dann eine Folge $(\Delta x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, \delta]$ und ein $\mu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$, sodass für alle $g \in C(\mathbb{R})$ gilt:

$$g(u_{\Delta x_k}) \xrightarrow{*} \int_0^1 g(\mu(\cdot, \cdot, \alpha)) \, d\alpha \quad \text{in } L^\infty(\Omega_T), \quad (6.17)$$

indem wir $u_{\Delta x}$ außerhalb von Ω durch 0 fortsetzen und bemerken, dass $1_\Omega \in L^\infty(\mathbb{R})$ ist, d.h. dass $1_\Omega \psi \in L^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ ist für alle $\psi \in L^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$.

Da $\eta, q, \eta' b \in C(\mathbb{R})$ und $\partial_t \varphi, \partial_x \varphi, z' \varphi \in L^1(\Omega_T)$ sind, folgt aus (6.16) und (6.17) mit $k \rightarrow \infty$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \eta(\mu) \partial_t \varphi + q(\mu) \partial_x \varphi - \eta'(\mu) b(\mu) z'(x) \varphi \, d\alpha \, dx \, dt \\ &+ \int_\Omega \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) \, dx + \text{Lip}_{[-C, C]}(f) \int_0^T \eta(u_r(t)) \varphi(x_{j_r}, t) + \eta(u_l(t)) \varphi(x_{j_l}, t) \, dt \geq 0. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung besagt aber gerade, dass μ Entropieprozesslösung von (1.3) ist. Nach Satz 3.9 existiert dann ein $u \in L^\infty(\Omega_T)$, sodass für jede Entropieprozesslösung ν von (1.3) gilt:

$$\mu(x, t, \alpha) = u(x, t) = \nu(x, t, \alpha) \quad \text{für fast alle } (x, t, \alpha) \in \Omega_T \times]0, 1[. \quad (6.18)$$

Insbesondere ist also u die eindeutig bestimmte Entropielösung von (1.3).

Gibt es nun eine Folge $(\Delta x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, \delta]$, die keine schwach* gegen u konvergente Teilfolge besitzt, so besitzt sie nach Satz 6.1 eine Teilfolge und ein $\nu \in L^\infty(\Omega_T \times]0, 1[)$, die (6.17) (für ν statt μ) erfüllt. Nach obigen Überlegungen ist dann ν Entropieprozesslösung von (1.3). Dies ist aber ein Widerspruch zu (6.18). Also konvergiert $u_{\Delta x}$ schwach* gegen u (für $\Delta x \rightarrow 0$).

Weiter folgt aus (6.18) und Lemma 6.4, dass $(u_{\Delta x})_{\Delta x > 0}$ für $\Delta x \rightarrow 0$ stark in $L^p(\Omega_T)$ gegen u konvergiert. Damit ist (6.15) gezeigt. ■

Insbesondere haben wir damit gezeigt, dass es unter unseren Voraussetzungen eine eindeutige Entropielösung von (1.3) gibt.

Kapitel 7

Numerische Experimente

Jetzt wollen wir das Verfahren (5.10) testen. Dazu betrachten wir die Burgers-Hopf Gleichung (5.6) auf dem Intervall $\Omega =]0, 4[$, d.h. es ist $f(s) = \frac{s^2}{2}$ und $b(s) = s$. Der Einfachheit halber wählen wir sowohl u_0 , als auch u_l, u_r konstant. Für die Wahl von z orientieren wir uns an [4] und wählen

$$z(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & x \in]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (7.1)$$

Zunächst ergibt sich für die durch (5.3) definierte Funktion D :

$$D(s) = \int_0^s \frac{\xi}{\xi} d\xi = s \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

Offensichtlich ist $D \in C^1(\mathbb{R})$ streng monoton wachsend und surjektiv. Es gilt $\inf_{\mathbb{R}} D' = 1 > 0$, d.h. D erfüllt die Voraussetzungen (5.4).

Auch der Engquist-Osher Fluss g_E ist in diesem Fall besonders einfach:

$$\begin{aligned} g_E(u, v) &= \int_0^u s^+ ds - \int_0^v s^- ds = \operatorname{sgn}^+(u) \int_0^u s ds - \operatorname{sgn}^-(v) \int_0^v s ds \\ &= \operatorname{sgn}^+(u) \frac{u^2}{2} - \operatorname{sgn}^-(v) \frac{v^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Für die Konstante $C_T^{\Delta x}$ aus (5.26) erhalten wir

$$C_T^{\Delta x} = M e^{2T} + \Delta x e^{4T},$$

wobei $M = \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u_l\|_{L^\infty(]0, T])}, \|u_r\|_{L^\infty(]0, T])} \right\}$ ist.

Die Funktion z diskretisieren wir mit Hilfe der Simpson-Regel:

$$z_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} z(x) dx \approx \frac{1}{6} \left(z \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) + 4z(x_j) + z \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (7.4)$$

7.1 Vergleich mit dem Standard-Verfahren

In diesem Abschnitt wollen wir das Verfahren (5.10) mit der Standard-Diskretisierung für das Engquist-Osher Verfahren,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) - \Delta t z_j' u_j^n \quad \forall C_j \subset \Omega, \quad (7.5)$$

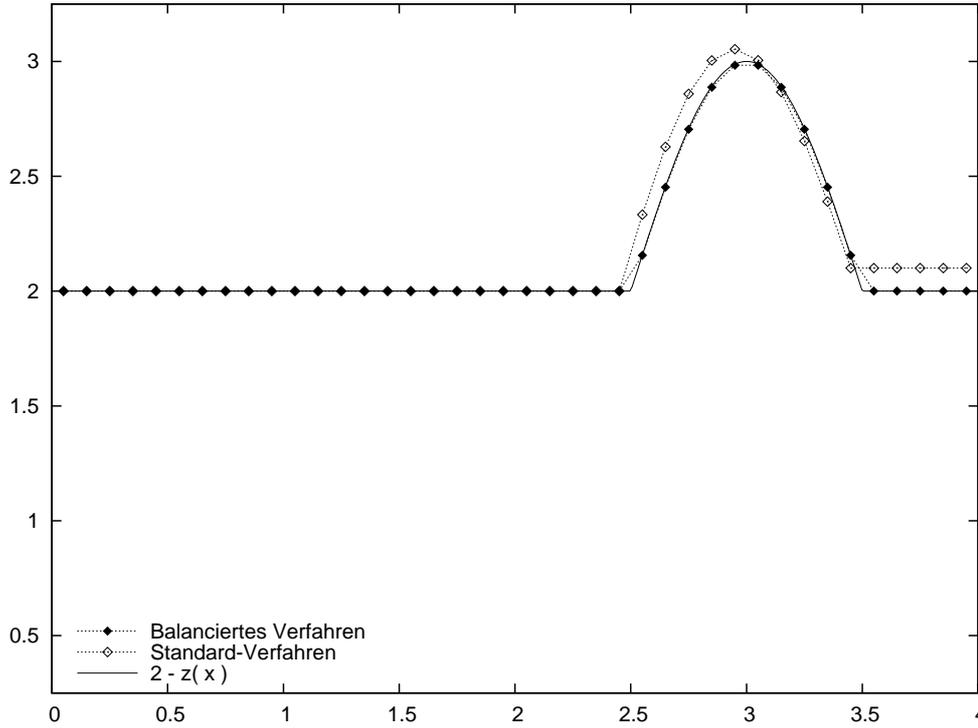


Abbildung 7.1: Vergleich des balancierten Verfahrens mit dem Standard-Verfahren zu Anfangsdaten im Gleichgewicht bei $t = 3$

vergleichen. Dabei berechnen wir die Approximation z'_j wie folgt:

$$z'_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} z'(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \left(z \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) - z \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (7.6)$$

Analog zu Lemma 5.5 können wir für $(n+1) \Delta t \leq T$ abschätzen:

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &\leq \sup |u_j^n| + \Delta t \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \sup |u_j^n| = \left(1 + \Delta t \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \sup |u_j^n| \\ &\leq M e^{(n+1)\Delta t \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}} \leq M e^{T \|z'\|_{L^\infty(\Omega)}} \leq C_T^{\Delta x}. \end{aligned}$$

Dies legt nahe, dass die Abschätzung in Lemma 5.5 nicht optimal ist. Um bessere Vergleichbarkeit zu erhalten, werden wir einfach die schlechtere der beiden Abschätzungen verwenden.

Nun wollen wir zwei Beispiele auf $\Omega_T =]0, 4[\times]0, 3[$ für die durch (7.1) definierte Funktion z betrachten, in denen man die Vorzüge des balancierten Verfahrens sehen kann. Als erstes wählen wir für die Anfangsdaten ein Gleichgewicht: Sei $u_0(x) = 2 - z(x)$, $u_l \equiv 2$ und $u_r \equiv 2$. Dann ist die Entropielösung gegeben durch

$$u(x, t) = u_0(x) \quad \forall t \in (0, 3). \quad (7.7)$$

Die numerischen Lösungen des Standard-Verfahrens (7.5) und des balancierten Verfahrens (5.10) bei einer Gitterweite $\Delta x = 0,1$, d.h. bei einer Ortsdiskretisierung von 40 Zellen, sowie der exakten Lösung (7.7), sind zum Zeitpunkt $t = 3$ in Abbildung 7.1 dargestellt.

Die Grafik zeigt, dass das Ergebnis des Standard-Verfahrens, obwohl die Anfangsdaten ein Gleichgewicht sind, deutlich von der exakten Lösung (7.7) abweicht. Das Ergebnis des balancierten Verfahrens weicht hingegen nur um einen Diskretisierungsfehler von der exakten Lösung ab. Man kann sich leicht ausmalen,

dass dieser Effekt deutlicher würde, wenn man das Gebiet nach rechts erweitern und auf einem größeren Zeitintervall rechnen würde.

Die folgenden Tabellen stellen zu gegebener Gitterweite die Rechenzeit, den L^1 -Fehler im Vergleich zur exakten Lösung (7.7) und den L^1 -Fehler zur Projektion der exakten Lösung auf stückweise konstante Elemente dar:

Δx	Δt	L^1 -Fehler	L^1 -Fehler bzgl. der Projektion	CPU-Zeit
10^{-1}	$5,7 \cdot 10^{-6}$	$5,02 \cdot 10^{-2}$	0	1,25 s
10^{-2}	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$	0	8,84 s
10^{-3}	$7,3 \cdot 10^{-7}$	$5,00 \cdot 10^{-4}$	0	817,47 s
10^{-4}	$8 \cdot 10^{-8}$	$5,00 \cdot 10^{-5}$	0	—

Werte für das balancierte Verfahren (5.10)

Δx	Δt	L^1 -Fehler	L^1 -Fehler bzgl. der Projektion	CPU-Zeit
10^{-1}	$5,7 \cdot 10^{-6}$	$1,50 \cdot 10^{-1}$	$1,41 \cdot 10^{-1}$	1,20 s
10^{-2}	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$	7,46 s
10^{-3}	$7,3 \cdot 10^{-7}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	714,52 s
10^{-4}	$8 \cdot 10^{-8}$	$1,51 \cdot 10^{-4}$	$1,43 \cdot 10^{-4}$	—

Werte für das Standard-Verfahren (7.5)

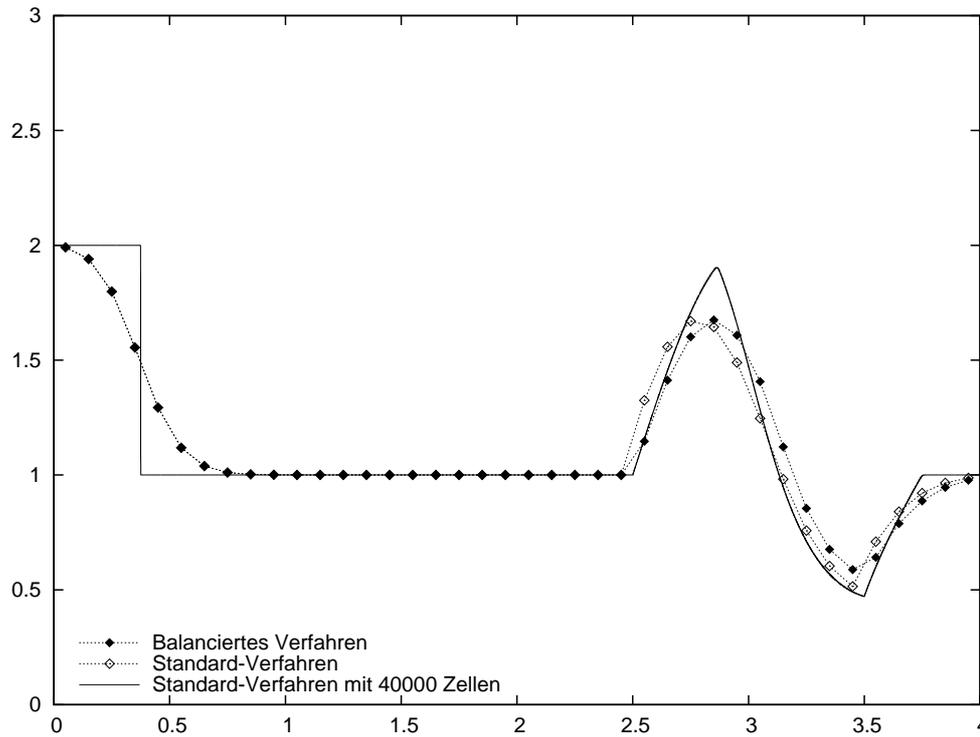
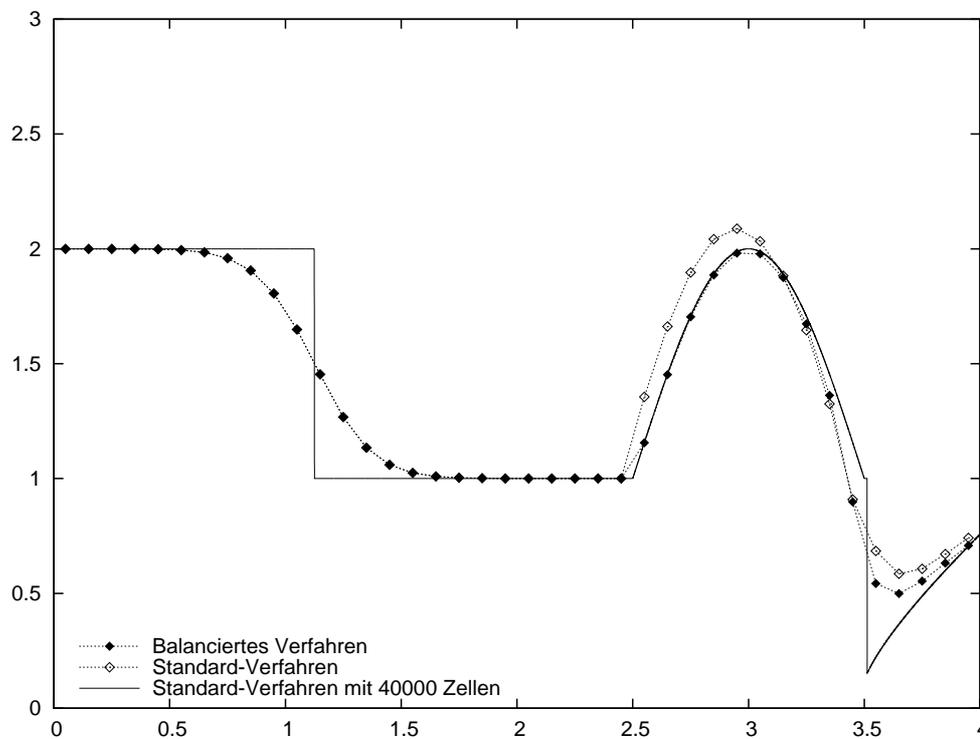
Es sei angemerkt, dass die lineare Konvergenz des L^1 -Fehlers beim balancierten Verfahren aus der linearen Konvergenz der Approximation $z_{\Delta x}$ gegen z folgt und nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens aussagt. Desweiteren wurde auch der L^1 -Fehler durch Projektion der Funktionen auf stückweise Konstante Elemente mit einer Gitterweite von 10^{-5} berechnet.

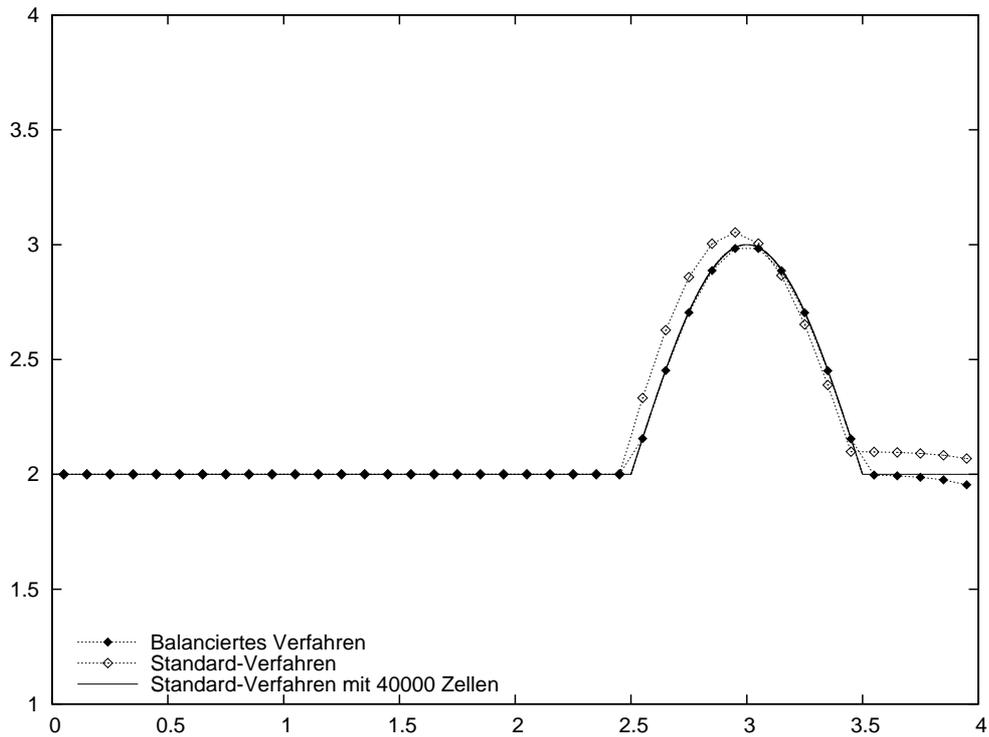
Als zweites betrachten wir die Anfangsdaten $u_0 \equiv 1$ und die Randdaten $u_l \equiv 2$, $u_r \equiv 1$. In diesem Fall ist die Schock-Geschwindigkeit am linken Rand gerade $s = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{3}{2}$. Ohne Quellterm würde dieser Schock bei $t = 3$ gerade bei $x = 4,5$ sein, sodass er bei $t = 3$ das Intervall $(0, 4)$ verlassen haben sollte. Wir betrachten wieder das balancierte Verfahren (5.10) und das Standard-Verfahren (7.5) bei einer Gitterweite von $\Delta x = 0,1$. Als Referenz für den Vergleich verwenden wir das Ergebnis des Standard-Verfahrens bei einer Gitterweite von 10^{-4} . Das Ergebnis ist in Abbildung 7.2, Abbildung 7.3 und Abbildung 7.4 für die Zeitpunkte $t = 0,25$, $t = 0,75$ und $t = 2,75$ dargestellt. Die Grafik bei $t = 0,25$ (Abbildung 7.2) lässt schon erahnen, dass das balancierte Verfahren im Mittel näher an der Referenzlösung liegt. Bei $t = 0,75$ (Abbildung 7.2) wird der Unterschied dann recht deutlich. Der Schock bei $t = 3,5$, der vom Quellterm verursacht wird, und die folgende Verdünnungswelle werden vom balancierten Verfahren (5.10) sehr viel besser approximiert, als vom Standard-Verfahren (7.5). Bei $t = 2,75$ (Abbildung 7.2) sieht man dann, dass die Lösung gegen das Gleichgewicht strebt, welches wie zuvor vom Standard-Verfahren schlecht approximiert wird.

7.2 Das Gleichgewicht $\bar{u} \equiv 0$

Wie in Abschnitt 5.1 bereits erwähnt, ist $\bar{u} : x \mapsto 0$ für jede Wahl von z ein Gleichgewicht der Burgers-Hopf Gleichung (5.6). Durch $\bar{v} : x \mapsto -z(x)$ ist ein weiteres Gleichgewicht gegeben (vgl. (5.7)). Das Verfahren (5.10) ist nun so konstruiert, dass es das Gleichgewicht \bar{v} anzustreben versucht (bei der Wahl der diskreten Gleichgewichtszustände haben wir das Gleichgewicht \bar{u} außer Acht gelassen).

In diesem Abschnitt betrachten wir daher das Anfangsrandwertproblem (1.3) auf $\Omega_T =]0, 4[\times]0, 3[$ mit $u_0 \equiv 0$ und $u_l = u_r \equiv 0$. Das im vorigen Abschnitt betrachtete Standard-Verfahren (7.5) würde hier für jede Wahl von Δx die Entropielösung $u \equiv 0$ liefern. Das balancierte Verfahren (5.10) hingegen verwendet die diskreten Gleichgewichtszustände, um das Gleichgewicht \bar{v} besser zu approximieren. Das Ergebnis ist zum Zeitpunkt $t = 2,5$ in Abbildung 7.5 dargestellt. Folgende Tabelle zeigt die Rechenzeit und den L^1 -Fehler bei $t = 2,5$ für dieses Szenario:

Abbildung 7.2: Vergleich des balancierten Verfahrens mit dem Standard-Verfahren bei $t = 0,25$ Abbildung 7.3: Vergleich des balancierten Verfahrens mit dem Standard-Verfahren bei $t = 0,75$

Abbildung 7.4: Vergleich des balancierten Verfahrens mit dem Standard-Verfahren bei $t = 2,75$

Δx	Δt	L^1 -Fehler	CPU-Zeit
10^{-1}	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$4,388 \cdot 10^{-1}$	1,85 s
10^{-2}	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$3,164 \cdot 10^{-1}$	15,68 s
10^{-3}	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$2,678 \cdot 10^{-2}$	155,89 s
10^{-4}	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$8,421 \cdot 10^{-4}$	1856,74 s

Das balancierte Verfahren liefert offenbar selbst bei 4000 Zellen ($\Delta x = 0.001$) noch kein zufriedenstellendes Ergebnis.

Um dieses Problem zu vermeiden, könnte man bei der Berechnung von u_j^{n+1} , falls $|u_k^n| \leq \|z'\|_{L^\infty(\Omega)} \Delta x$ für ein $k \in \{j-1, j, j+1\}$, auf das Standard-Verfahren (7.5) zurückschalten. Im allgemeinen wird diese Bedingung allerdings von b beeinflusst, da b auch mehrere Nullstellen besitzen darf. Dann würden weitere Gleichgewichte existieren, für die (5.5) nicht erfüllt ist.

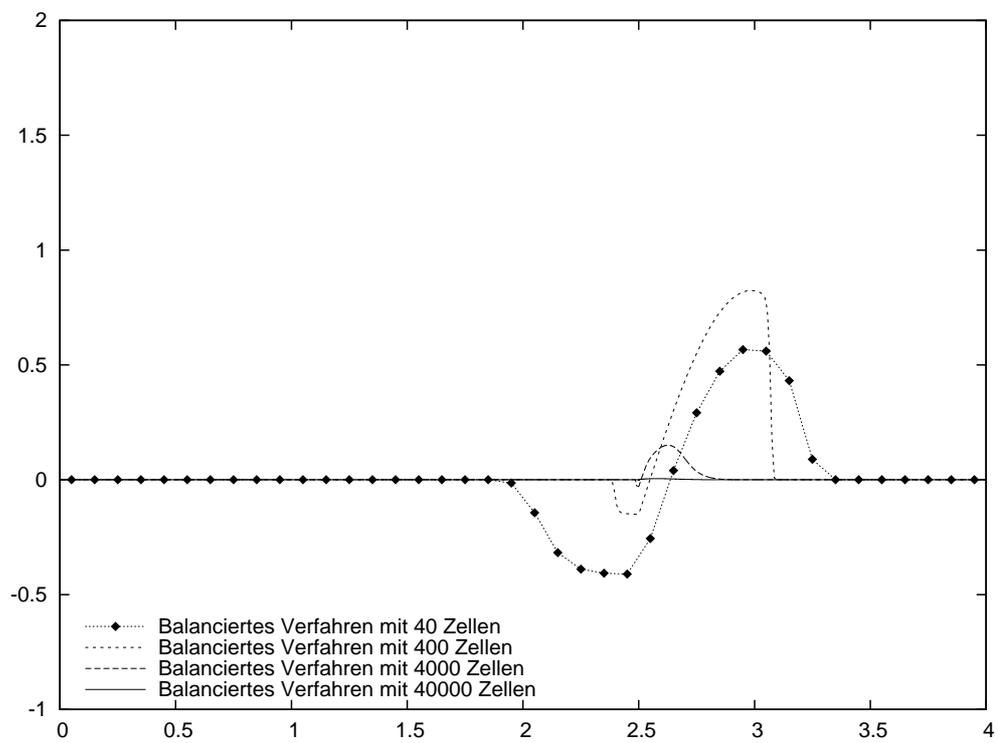


Abbildung 7.5: Das balancierte Verfahren mit $u_0 \equiv 0$ und $u_l = u_r \equiv 0$ bei $t = 2,5$

Anhang A

Grundlagen

A.1 Der essentielle Grenzwert

Sei f eine messbare Funktion und sei $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Die Folgen

$$\left(\operatorname{ess\,sup}_{B_{\epsilon_n}(x_0)} f \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\operatorname{ess\,inf}_{B_{\epsilon_n}(x_0)} f \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sind monoton und beschränkt (durch $\operatorname{ess\,inf} f$ bzw. $\operatorname{ess\,sup} f$), also konvergent. Desweiteren hängt der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge ab, denn ist $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Nullfolge, so ist auch $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$\gamma_{2n} := \epsilon_n \quad \text{und} \quad \gamma_{2n+1} := \delta_n,$$

eine Nullfolge. Also existiert der Grenzwert $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\gamma_n}(x_0)} f$. Da aber jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert konvergieren muss, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\epsilon_n}(x_0)} f = \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\delta_n}(x_0)} f.$$

Dies gilt analog für das essentielle Infimum. Wir können daher definieren:

Definition A.1 (Essentieller Grenzwert)

Sei f eine messbare Funktion und $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann heißen

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \rightarrow x_0} f(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\epsilon_n}(x_0)} f, \\ \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \rightarrow x_0} f(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,inf}_{B_{\epsilon_n}(x_0)} f \end{aligned}$$

der *essentielle Limes Superior* und der *essentielle Limes Inferior* von f an der Stelle x .

Falls $\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gilt, so wird der Wert

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) := \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

als *essentieller Grenzwert* von f an der Stelle x bezeichnet.

Lemma A.2

Sei f eine messbare Funktion. Der essentielle Grenzwert $\operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn es eine Nullmenge E gibt, sodass $\lim_{x \rightarrow x_0, x \notin E} f(x)$ existiert. In diesem Fall gilt:

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \notin E} f(x).$$

Beweis

„ \Leftarrow “ Existiere es $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Sei $(E_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Nullmengen mit

$$\sup_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus E_n^m} f \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \inf_{|N|=0} \sup_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus N} f = \operatorname{ess\,sup} f.$$

Analog sei $(F_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Nullmengen mit

$$\inf_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus F_n^m} f \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \sup_{|N|=0} \inf_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus N} f = \operatorname{ess\,inf} f.$$

Definiere durch abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge

$$E := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_n^m \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_n^m \right).$$

Nun gilt:

$$\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus E} f \leq \sup_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus E_n^m} f \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \operatorname{ess\,sup} f.$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\frac{1}{n}}(x_0)} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus E} f = \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin E}} f(x).$$

Führt man die gleiche Überlegung für den Limes Inferior durch, so ergibt sich die Behauptung.

„ \Rightarrow “ Existiere eine Nullmenge E , sodass $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin E}} f(x)$ existiert. Dann gilt:

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\frac{1}{n}}(x_0)} f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus E} f = \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin E}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin E}} f(x).$$

Zusammen mit analoger Abschätzung für den Limes Inferior ergibt sich die Behauptung. \blacksquare

Lemma A.3

Sei $f \in L^\infty(]0, \delta[)$, $\delta > 0$ und $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, \delta[$ eine Nullfolge. Dann gilt:

$$(a) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) \, dx \leq \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \downarrow 0} f(x).$$

$$(b) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) \, dx \geq \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \downarrow 0} f(x).$$

(c) Falls $\operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow 0} f(x)$ existiert, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) \, dx = \operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow 0} f(x).$$

Beweis

(a) Für fast alle $x \in]0, \epsilon_n[$ gilt:

$$f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{]0, \epsilon_n[} f.$$

Multiplikation mit $\frac{1}{\epsilon_n}$ und Integration über $]0, \epsilon_n[$ ergibt:

$$\frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) \, dx \leq \operatorname{ess\,sup}_{]0, \epsilon_n[} f.$$

Bildet man nun den Limes Inferior für $n \rightarrow \infty$, so ergibt sich die Behauptung:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{]0, \epsilon_n[} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{]0, \epsilon_n[} f = \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \downarrow 0} f(x).$$

(b) analog.

(c) Existiere $\operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow 0} f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow 0} f(x) &= \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \downarrow 0} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) dx \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) dx \leq \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \downarrow 0} f(x) = \operatorname{ess\,lim}_{x \downarrow 0} f(x). \end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} f(x) dx$ und die Behauptung folgt. \blacksquare

A.2 Konvexe Funktionen und Jensensche Ungleichung

Da wir zur Bestimmung der Entropielösung konvexe Funktionen η betrachten, sollen an dieser Stelle einige Eigenschaften konvexer Funktionen wiedergegeben werden. Dieser Abschnitt ist im wesentlichen dem Buch von Bauer ([2, Seite 20–23]) entnommen.

Definition A.4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0, 1]$ gilt:

$$\eta(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \eta(x) + (1 - \alpha) \eta(y). \quad (\text{A.1})$$

Für $x \neq y \in I$ können wir den Differenzenquotienten

$$S(x, y) := \frac{\eta(x) - \eta(y)}{x - y}$$

betrachten.

Dann haben wir folgendes Lemma:

Lemma A.5

Die Funktion $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für $x < y < z \in I$

$$S(x, y) \leq S(x, z) \leq S(y, z) \quad (\text{A.2})$$

gilt.

Beweis

Setzt man $\alpha = \frac{y-z}{x-z} \in]0, 1[$ in (A.1) ein, so erhält man:

$$\eta(y) = \eta\left(\frac{y-z}{x-z}x + \left(1 - \frac{y-z}{x-z}\right)z\right) \leq \frac{y-z}{x-z} \eta(x) + \left(1 - \frac{y-z}{x-z}\right) \eta(z).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{\eta(y) - \eta(z)}{y - z} \leq \frac{\eta(x) - \eta(z)}{x - z}.$$

Die rechte Ungleichung in (A.2) zeigt man analog.

Für die Umkehrung setzt man $y := \alpha x + (1 - \alpha)z$ für $0 < \alpha < 1$ in (A.2). Die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ sind ohnehin trivial. \blacksquare

Hieraus ergibt sich folgende Aussage:

Lemma A.6

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine konvexe Funktion $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt $x \in I$ eine rechtsseitige Ableitung $\eta'_+(x)$ und eine linksseitige Ableitung $\eta'_-(x)$. Insbesondere ist η auf I stetig. Desweiteren sind η'_+, η'_- monoton und es gilt für $x, y \in I$:

$$\eta(y) \geq \eta(x) + \eta'_+(x)(y - x). \quad (\text{A.3})$$

Beweis

Sei $x \in I$ und sei $x < \xi_1 < \xi_2 \in I$. Nach Lemma A.5 ist dann $S(x, \xi_1) \leq S(x, \xi_2)$, d.h. $\xi \mapsto S(x, \xi)$ ist monoton auf $]x, \infty[\cap I$. Ist $\zeta \in I$ mit $\zeta < x$, so ist mit Lemma A.5 $S(x, \zeta)$ eine untere Schranke dieser Funktion. Also existiert

$$\eta'_+(x) := \lim_{\xi \downarrow x} S(x, \xi).$$

Aus der Existenz von $\lim_{\xi \rightarrow x} (\xi - x) = 0$ folgt die Existenz von

$$\lim_{\xi \downarrow x} (\eta(y) - \eta(x)) = \eta'_+(x) \lim_{\xi \downarrow x} (\xi - x) = 0.$$

Daraus ergibt sich die rechtsseitige Stetigkeit.

Analog erhalten wir die Existenz der linksseitigen Ableitung η'_- und damit die linksseitige Stetigkeit.

Sind $x < y \in I$ und ist $h > 0$ mit $x < x + h < y < y + h \in I$, so gilt:

$$S(x, x + h) \leq S(x, y) \leq S(x, y + h) \leq S(y, y + h).$$

Mit $h \rightarrow 0$ folgt dann $\eta'_+(x) \leq \eta'_+(y)$, d.h. η'_+ ist monoton. Analog folgt, dass η'_- monoton ist.

Wir wollen nun (A.3) zeigen. Zunächst sei $x < \xi < y$. Wegen Lemma A.5 ist dann

$$\eta(y) - \eta(x) = S(x, y)(y - x) \geq S(x, \xi)(y - x), \quad (\text{A.4})$$

und der Grenzwert $\xi \rightarrow x$ liefert (A.3).

Im Fall $y < x$ existiert ein $\xi > x \in I$. Wegen $(y - x) < 0$ können wir auch in diesem Fall (A.4) folgern. ■

Lemma A.7 (Jensensche Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ messbar und sei $f \in L^1(\Omega)$. Für jede konvexe Funktion $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $\eta \circ f$ integrierbar ist, gilt dann:

$$\eta\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \eta(f(x)) dx. \quad (\text{A.5})$$

Beweis

In (A.3) gilt offensichtlich Gleichheit, falls $y = x$ ist. Folglich gilt

$$\eta(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [\eta(x) + \eta'_+(x)(y - x)] \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.6})$$

Setzen wir $y = f(z)$ in (A.3), so erhalten wir

$$\eta(f(z)) \geq \eta(x) + \eta'_+(x)(f(z) - x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall z \in \Omega.$$

Da $\eta \circ f$ nach Voraussetzung integrierbar ist (die Messbarkeit folgt bereits aus der Stetigkeit von η), gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \eta(f(z)) dz \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \eta(x) + \eta'_+(x)(f(z) - x) dz = \eta(x) + \eta'_+(x) \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(z) dz - x \right).$$

Wegen (A.6) und $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(z) dz \in \mathbb{R}$ folgt daraus

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \eta(f(z)) dz \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[\eta(x) + \eta'_+(x) \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(z) dz - x \right) \right] = \eta\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(z) dz \right).$$

Dies ist die Jensensche Ungleichung (A.5). ■

A.3 Allgemeine Aussagen

Satz A.8 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann gilt:

(a) Sei $f \in H^{1,1}(I)$. Dann gilt für fast alle $x, y \in I$:

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(s) ds.$$

(b) Sind $f, g \in L^1(I)$ und gilt für fast alle $x, y \in I$

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(s) ds,$$

so ist $f \in H^{1,1}(I)$ und es ist $f' = g$.

Beweis

Siehe [1, Seite 63]. ■

Lemma A.9

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $v \in L^\infty(\Omega)$, sodass gilt:

$$-\int_{\Omega} v(x) \varphi'(x) dx \leq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

Dann existiert eine Nullmenge E , sodass die v in $\Omega \setminus E$ monoton fallend ist.

Beweis

Sei $\Omega =]a, b[$, $a < a' < b' < b$ und sei $\Omega' =]a', b'[$. Ferner sei $\delta := \min\{|a - a'|, |b - b'|\}$.

Sei $\omega \in C_0^\infty(]-1, 1[)$ ein nichtnegativer Glättungskern und $\omega_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \omega(\frac{x}{\epsilon})$. Dann ist für $x \in \Omega'$ und $\epsilon < \frac{\delta}{2}$:

$$y \mapsto \omega_\epsilon(x - y) \in C_0^\infty(\Omega),$$

denn $\omega_\epsilon(x - y) = 0$ für $|x - y| > \frac{\delta}{2} > \epsilon$.

Wählen wir nun ω_ϵ für $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ als Testfunktion, so gilt

$$0 \geq \int_{\Omega} u(y) \omega'_\epsilon(x - y) dy = \partial_x((1_{\Omega} u) * \omega_\epsilon)(x) \quad \forall x \in \Omega',$$

d.h. $(1_{\Omega} u) * \omega_\epsilon$ ist monoton fallend auf Ω' .

Wegen $(1_{\Omega} u) * \omega_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1_{\Omega} u$ in $L^1(\Omega)$ existiert dann eine Teilfolge (o.E. die ganze Folge) und eine Nullmenge $E_{\Omega'} \subset \mathbb{R}$, sodass $(1_{\Omega} u) * \omega_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (1_{\Omega} u)(x)$ in $\Omega \setminus E_{\Omega'}$. Dann ist u monoton fallend auf $\Omega' \setminus E_{\Omega'}$.

Approximieren wir nun Ω durch eine Folge von solchen $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so erhalten wir Nullmengen $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass u monoton fallend ist auf $\Omega_n \setminus E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ eine Nullmenge und u ist monoton fallend auf $\Omega_n \setminus E$, $n \in \mathbb{N}$. Also ist u auch monoton fallend auf $\Omega \setminus E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega_n \setminus E)$. ■

Symbolverzeichnis

- $a \wedge b$ Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bezeichnet $a \wedge b := \max\{a, b\}$ das Maximum von a und b .
- $a \vee b$ Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bezeichnet $a \vee b := \min\{a, b\}$ das Minimum von a und b .
- $]a, b[$ Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird mit $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \vee b < x < a \wedge b\}$ das offene Intervall zwischen a und b bezeichnet.
- $[a, b]$ Für $a, b \in \mathbb{R}$ wird mit $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \vee b \leq x \leq a \wedge b\}$ das abgeschlossene Intervall zwischen a und b bezeichnet.
- $C_0^m(\Omega)$ Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ bezeichnet $C_0^m(\Omega)$ die Menge der m -mal stetig differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger in Ω .
- $H^{m,p}(\Omega)$ Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $p \in [1, \infty]$ bezeichnet $H^{m,p}(\Omega)$ den Sobolev-Raum der m -mal schwach differenzierbaren Funktionen, wobei alle Ableitungen in $L^p(\Omega)$ sind.

Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, 4. Auflage, Springer-Verlag, 2002
- [2] H. Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Auflage, de Gruyter, 1991
- [3] C. Bardos, A. Y. Le Roux, J. C. Nedelec: *First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions*, Communications in Partial Differential Equations 4, No. 9, 1979, 1017 – 1034
- [4] R. Botchorishvili, B. Perthame, A. Vasseur: *Equilibrium Schemes for Scalar Conservation Laws with Stiff Sources*, Mathematics of Computation 72, No. 241, 2003, 131–157
- [5] Y. Brenier: *Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires en dimension N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimensions $N + 1$* , Journal of Differential Equations 50, No. 3, 1982, 375–390
- [6] B. Engquist, S. Osher: *One-Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws*, Mathematics of Computation 36, No. 154, 1981, 321 – 351
- [7] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin: *Existence and Uniqueness of the Entropy Solution to a Nonlinear Hyperbolic Equation*, Chinese Annals of Mathematics, Series B 16, No. 1, 1995, 1–14
- [8] J. M. Greenberg, A. Y. LeRoux: *A Well-Balanced Scheme for the Numerical Processing of Source Terms in Hyperbolic Equations*, SIAM Journal of Numerical Analysis 33, No. 1, 1996, 1 – 16
- [9] D. Kröner: *Numerical Schemes for Conservation Laws*, Wiley-Teubner, 1997
- [10] S. N. Kružkov: *First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables*, Mathematics of the USSR: Sbornik 10, No. 2, 1970, 217 – 243
- [11] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Ružička: *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, 1996
- [12] F. Otto: *Initial-Boundary Value Problem for a Scalar Conservation Law*, Comptes Rendus de l'Académie des Science, Série I: Mathématique 322, No. 8, 1996, 729 – 734
- [13] J. Vovelle: *Convergence of Finite Volume Monotone Schemes for Scalar Conservation Laws on Bounded Domains*, Numerische Mathematik 90, No. 3, 2002, 563–596