Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2023
Dr. Steve Wolff-Vorbeck, Oliver Suchan

Numerik 2

Blatt 1 – 17.04.2023

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 11 — Abgabe: 28.04.2023, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/mitarb/wolffvorbeck/lehre/ss23/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie mit einer geeigneten Fixpunktiteration und dem Banachschen Fixpunktsatz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ Quadratwurzeln}} = 2$$

gilt.
Hinweis: Die Monotonie der Fixpunkt-Abbildung kann hilfreich sein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass in einem Gleitkommazahlensystem ohne Exponentenbeschränkung

$$G = G(b, p, e_{\text{min}} = -\infty, e_{\text{max}} = \infty)$$

die relative Maschinengenauigkeit $\varepsilon = \frac{1}{2}b^{1-p}$ die kleinste positive Zahl ist, die auf 1 addiert eine Gleitkommazahl echt größer als 1 ergibt, d.h.

$$\varepsilon = \min\{x \in \mathbb{R} : 1 \oplus x > 1\},$$

wobei $\oplus$ die Addition in dem Gleitkommasystem bezeichnet.
Zeigen Sie dabei auch $\text{rd}(1+\varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$.
Hinweis: Hier gebe rd die betragsmäßig *größte* Zahl.

Aufgabe 3 (2+1+1 Punkte)**.**

(a) Stellen Sie die Zahlen 142, 237, 1111 für die Basen $b = 2, 4$ und 10 mit der Präzision $p = 10$ und den Exponentenschranken $e_{\text{min}} = -10$ sowie $e_{\text{max}} = 10$ als normalisierte Gleitkommazahlen dar.
(b) Bestimmen Sie die 25. Nachkommastelle von 1/7.
(c) Wieso ist die Zahl 1/10 im Binärsystem nur durch einen unendliche Reihe darstellbar?

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.**

(a) Sei $f \in C^2([a, b])$ mit der Eigenschaft $f(a) = f(b)$ und $f'(a) = f'(b) = 0$. Geben Sie eine optimale untere Schranke für die Anzahl der Nullstellen von f'' an.

(b) Für Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sei $w(x) = \Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)$ das Stützstellenpolynom und $L_i, i = 0, 1, \ldots, n$, das i-te Lagrange-Basispolynom. Zeigen Sie, dass gilt

$$L_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}.$$

Aufgabe 5 ((2) Punkte)**.** Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen zu Teil I der Numerik Vorlesung, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Beurteilung begründen können.

Nr.	**Aussage**	**Beurteilung**
1	Die Subtraktion zweier Zahlen ist gut konditioniert.	
2	Ist λ eine Eigenwert von A, so gilt $\|A\| \leq |\lambda|$ für jede Operatornorm.	
3	Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist eine obere Dreiecksmatrix.	
4	Das Ausgleichsproblem besitzt stets eine Lösung.	
5	Die Lösung des Ausgleichsproblems ist bedingungslos eindeutig.	
6	Die quadratischen Matrizen A und $A^\top$ besitzen dieselben Eigenwerte und Eigenvektoren.	
7	Die Eigenschaft $a_{ii} \neq 0$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist notwendig für die Wohldefiniertheit des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens.	
8	Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaldominant, so ist A regulär.	