Numerik 2

Blatt 2 – 01.05.2023

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': Kap. 11 & 12

Abgabe: 12.05.2023, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/mitarb/wolffvorbeck/lehre/ss23/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 11.1 aus der Vorlesung:

(i) Es gilt $|T_n(t)| \leq 1$ für alle $t \in [-1, 1]$.

(ii) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2t\, T_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ und für $n \geq 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}(t)$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}|_{[-1,1]}$.

(iii) Für $n \geq 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j + 1/2)\pi/n)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, und die $n+1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.** Betrachten Sie das Horner-Schema zur Auswertung des Interpolationspolynoms in Newton-Basis. Wir nehmen an, dass die dividierten Differenzen $y_{i,j}$ bereits berechnet wurden.

(a) Geben Sie in Abhängigkeit von n die Anzahl an Additionen und Multiplikationen an, die nötig sind, um (bei Kenntnis der dividierten Differenzen) das Interpolationspolynom an einer gegebenen Stelle x auszuwerten.

(b) Welchen Aufwand hätten Sie erhalten, wenn Sie das Polynom in der Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j q_j(x)$$

(ohne weitere Vereinfachungen) ausgewertet hätten? Sie dürfen davon ausgehen, dass die Werte $x - x_i$ für $i = 0, \dots, n$ schon vorab berechnet wurden.
Hinweis: Erinnern Sie sich an den 'kleinen Gauß'

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $f(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0, 1]$, $x_0 = 0$ sowie $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, sofern $n > 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie das Interpolationspolynom von f für $n = 0, 1, \dots, 4$. Benutzen Sie zur Berechnung das Neville-Schema.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \dots, n$, definierte Partitionierung von $[0, 1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq cn^{-2}$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4, 8$.