



Numerik 2

Blatt 3 – 15.05.2023

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': Kap. 12 & 13

Abgabe: 26.05.2023, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/mitarb/wolffvorbeck/lehre/ss23/num>

Aufgabe 1 (4 Punkte). Beweisen Sie Satz 12.2 aus der Vorlesung. Verweisen Sie dabei nicht auf andere Sätze und gehen Sie insbesondere auf das $(m - 1)$ -malige Integrieren ein.

Die Dimension des Raumes $S^{m,m-1}(\mathcal{T}_n)$ ist $n + m$.

Aufgabe 2 (Essay, 4 Punkte). Schreiben Sie eine kurze Abhandlung von etwa einer Seite, in der Sie den Einsatz von Splines in der Trajektorieplanung diskutieren. Beschreiben Sie die zu beachtenden physikalischen Größen und erklären Sie wie diese in die Approximation einer Trajektorie mittels Splineinterpolation einfließen. Nehmen Sie dabei auf das Beispiel aus der Vorlesung Bezug, indem die Approximation der Trajektorie eines Autos mit kubischen Splines beschrieben wurde. Erläutern Sie auch warum kubische Splines anstelle von quadratischen oder linearen Splines bevorzugt werden sollten.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte).

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp(ilk2\pi/n) = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } l \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}) \subset \mathbb{C}^n$ definiert durch $\omega^k = [\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \dots, \omega_n^{(n-1)k}]^\top$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, mit der n -ten Einheitswurzel $\omega_n = \exp(i2\pi/n)$ die Eigenschaft $\omega^k \cdot \omega^l = n\delta_{kl}$ besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien $w_0, w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, sodass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} \exp(ikx)$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$ für $j = 0, 1, \dots, n - 1$ und $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.

Hinweis: Dies ist nützlich für Blatt 3, Projekt 2 der praktischen Übungen.