Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2023
Dr. Steve Wolff-Vorbeck, Oliver Suchan

Numerik 2

Blatt 4 – 05.06.2023

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': Kap. 14 — Abgabe: 16.06.2023, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/mitarb/wolffvorbeck/lehre/ss23/num`

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Sei eine Quadraturformel $(b_k, c_k)_{k=1}^s$ gegeben.

(a) Wir betrachten die Abbildung $Q : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Q(f) = (b-a)\sum_{k=1}^{s} b_k f(a + c_k(b-a)).$$

Die Abbildung Q heißt *monoton*, wenn

$$f \leq g \qquad \Longrightarrow \qquad Q(f) \leq Q(g)$$

für alle $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ gilt.
Zeigen Sie: Q ist genau dann monoton, wenn $b_k \geq 0$ für alle $k = 1,\ldots,s$ gilt.
Hinweis: Um $b_k \geq 0$ zu zeigen ist es hilfreich, als Funktion g das Quadrat eines Lagrange-Polynoms $\tilde{l}_k$ zu den Stützstellen

$$a + (b-a)c_1, \ldots, a + (b-a)c_s$$

zu wählen.

(b) Die Quadraturformel habe nun die Ordnung $\geq 2s-1$. Zeigen Sie, dass die Gewichte in diesem Fall durch

$$b_k = \int_0^1 l_k^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 1,\ldots,s,$$

gegeben sind, wobei l_k das k-te Lagrange-Polynom zu $c_1,\ldots,c_s$ ist.
Begründen Sie außerdem, warum die Quadraturformel monoton ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Mittelpunktsregel $M\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit

$$M(f) := (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =: I(f).$$

Zeigen Sie für $h = b-a$, $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ die Fehlerabschätzung

$$|I(f) - M(f)| \leq \frac{h^3}{24}\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

indem Sie den Satz von Taylor mit passendem Entwicklungspunkt verwenden.

Aufgabe 3 (4(+2) Punkte)**.**

(a) Approxmierene Sie das Integral

$$I := \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

durch die Trapezregel und die Simpsonregel. Berechnen Sie die Approximationsfehler.

(b) Approximieren Sie das Integral I durch die zugehörigen summierten Quadraturformeln mit den Teilintervallen $[a_{l-1}, a_l]$ für $l = 1, 2$ und Knoten $a_l = 1 + l(2-1)/2$ für $l = 0, 1, 2$. Berechnen Sie die Approximationsfehler und vergleichen Sie diese mit denen aus Teil (a).

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $[a, b] = [1, 2]$ und

$$T(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für } x \in [a, b].$$

Die einzige Nullstelle von T in $[a, b]$ ist $x_* = \pi/2$.

(a) Berechnen Sie die Näherung $c_5 = (a_5 + b_5)/2$ an x_* aus dem Bisektionsverfahren.

(b) Berechnen Sie die Näherung x_3 an x_* aus dem Newtonverfahren mit $x_0 = 1$.

(c) Vergleichen Sie die absoluten Fehler $|c_5 - x_*|$ und $|x_3 - x_*|$.