Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2023
Dr. Steve Wolff-Vorbeck, Oliver Suchan

Numerik 2

Blatt 5 – 19.06.2023

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': Kap. 15 & 16 Abgabe: 30.06.2023, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/mitarb/wolffvorbeck/lehre/ss23/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ konvex, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ gilt $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, sowie streng monoton wachsend und sei $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte)**.** Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1$$
$$\text{mit} \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für das obige Minimierungsproblem und berechnen Sie alle KKT-Punkte. Überprüfen Sie auch an welchem Punkt die SOSC (Second Order Sufficient Condition) erfüllt ist.

(b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung des obigen Minimierungsproblems in der Form
$$F(z_k) + J(z_k)(z_{k+1} - z_k) = 0, \quad z_k = [x_k, \lambda_k]$$
und geben Sie $F(z_k)$ und $J(z_k)$ in Abhängigkeit von x_k und λ_k an.

(c) Führen Sie einen Schritt im Newton-Verfahren durch. Wählen Sie den Anfangswert $[x_0, \lambda_0] = [0, -1/2, 1]$ und berechnen Sie $[x_1, \lambda_1]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie mit dem CG-Verfahren die Lösung von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 100 & -8 & 0 \\ -8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und dem Startwert } x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Quiz, 4 Punkte)**.**

Nr.	**Aussage**	**Beurteilung**
1	Für $b = 10, p = 4, e_{\min} = -1, e_{\max} = 3$ ist $-13 \cdot 10^{-2}$ eine normalisierte Gleitkommazahl.	
2	Sind $q \in \mathcal{P}_m$ und $x_0, \ldots, x_n$ eine Partitionierung $\mathcal{T}_n$ von $[a, b]$, so gilt $q\|_{[a,b]} \in \mathcal{S}^{m,m-1}(\mathcal{T})$.	
3	Jede Spline-Funktion ist einmal stetig differenzierbar.	
4	Tschebyscheff-Knoten sind Extremalstellen der Tschebyscheff-Polynome.	
5	Jede Newton-Cotes Formel mit $n + 1 = 2q$ Stützstellen ist exakt vom Grad $n + 2$.	
6	Mit der Fourier-Basiswechselmatrix T_n definiert die Matrix $S_n = (1/n)T_n$ eine Isometrie auf $\mathbb{C}^n$, das heißt es gilt $\|S_n y\|_2 = \|y\|_2$ für alle $y \in \mathbb{C}^n$.	
7	Die Folge $\delta_k = \sin^2(1/k)$, $k \in \mathbb{N}$, ist quadratisch konvergent gegen Null.	
8	Hinreichend für die Konvergenz des Gradientenverfahrens ist, dass $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt und g konvex ist.	