Numerik II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1)

(a) Vor: A symm. mit EWen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ und $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ EV zu λ_1.

Beh: $\lambda_2 = \max_{x \neq 0, x \cdot v_1 = 0} \underbrace{\frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}}_{\text{Rayleigh-Quotient}}$

Bew: I Es gilt: $\frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} = \frac{(cx)^T A (cx)}{\|cx\|_2^2}$, betrachte daher $\|x\|_2^2 = 1$

II Finde kritische Punkte von $x^T A x$ unter der Nebenbedingung $\|x\|_2^2 = 1$

$\Rightarrow$ Betrachte Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, \lambda) = x^T A x - \lambda (x^T x - 1)$

Lagrange multiplier

$\frac{d}{dx} \mathcal{L}(x, \lambda) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 2x^T A - 2\lambda x^T = 0 \Leftrightarrow 2Ax - 2\lambda x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow \lambda$ EW von A zu EV x (EVen bilden Orthonormalbasis)

$\Rightarrow \max_{x \neq 0, x \cdot v_1 = 0} \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} = \max_{x \neq 0, x \cdot v_1 = 0} \frac{x^T \lambda x}{\|x\|_2^2} = \lambda$ und da $\max\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_2$

$\square$

(b) Vor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Lsg:

$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 11\}$

$K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| \leq 10\}$

$K_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 9| \leq 9\}$

(c) Vor: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant + symm.

Beh: $\text{cond}_2(A) \leq \frac{2 \cdot \max |a_{ii}|}{|\min a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}||}$

Bew: Es gilt: $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ außerdem gilt: $\text{cond}_2(A) = \left| \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)} \right|$

Alle EWe von A liegen in der Vereinigung der Gerschgorin-Kreise:

$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, $K_i := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j \neq i}} |a_{ij}|\}$

Da A symm. sind alle EWe reell $\Rightarrow \lambda_{max} < 2 \cdot \max_i |a_{ii}|$, $\lambda_{min} \geq \min_i a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Aufgabe 3)

Vor: $T_n \in \mathbb{C}^{n\times n}: (T_n)_{jk} = \exp\left(ijk\frac{2\pi}{n}\right),\ j,k = 0,\dots,n-1$

Beh: $Y = \frac{1}{n^2}\overline{T_n}\, T_n\, Y\, T_n\, \overline{T_n}$

Bew: Für $m \neq p$:

$$\left(\overline{T_n}\, T_n\right)_{mp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{t_n})_{mk}\, (t_n)_{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(-imk\frac{2\pi}{n}\right)\exp\left(ikp\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{n} k(p-m)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{n}(p-m)\right)^k$$

$$\overset{\text{Geometrische Summe}}{=} \frac{1-\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(p-m)\right)^n}{1-\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(p-m)\right)} = 0$$

Für $m = p$:

$$\left(\overline{T_n}\, T_n\right)_{mm} = \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{n}k\cdot 0\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

$$\Rightarrow \overline{T_n}\, T_n = n\cdot I_n$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{n^2} n\cdot I_n \cdot Y \cdot n \cdot I_n = Y$$

$\square$

Aufgabe 4) **Vor:** $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm. + pos. def.

$$\phi(x) = \left(A^{-1}(b-Ax)\right)\cdot(b-Ax) = \|b-Ax\|^2_{A^{-1}}$$

(a) **Beh:** $d_k = b - Ax_k$, $t \mapsto \phi(x_k + t d_k)$ hat Minimalstelle $a = \frac{\|d_k\|^2}{\|d_k\|_A^2}$

Bew: I $\quad d_k = b - Ax_k = -\nabla\phi(x_k)$

$$\phi(x) = \left(A^{-1}b - x\right)\cdot(b - Ax) = A^{-1}b\cdot b - A^{-1}b\cdot Ax - x\cdot b + x\cdot Ax$$

$$= A^{-1}b\cdot b - 2b\cdot x + x\cdot Ax$$

$$\nabla\phi(x) = -2b + 2Ax \Rightarrow d_k = b - Ax_k \quad (\text{bzw. } d_k = 2(b-Ax_k))$$

II $\quad \phi(x_k + td_k) = A^{-1}b\cdot b - 2b\cdot(x_k + t\cdot d_k) + (x_k + t\cdot d_k)\cdot A(x_k + td_k)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x_k + td_k) = -2b\cdot d_k + d_k\cdot A(x_k + td_k) + (x_k + t\cdot d_k)\cdot Ad_k$$

$$= -2b\cdot d_k + 2d_k\cdot A(x_k + td_k) = -2b\cdot d_k + 2d_k\cdot Ax_k + t2d_k\cdot Ad_k$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow td_k\cdot Ad_k = b\cdot d_k - d_k\cdot Ax_k \Leftrightarrow t\|d_k\|_A^2 = b\cdot d_k - d_k\cdot Ax_k$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{b\cdot d_k - d_k\cdot Ax_k}{\|d_k\|_A^2} = \frac{d_k\cdot(b - Ax_k)}{\|d_k\|_A^2} = \frac{\|d_k\|^2}{\|d_k\|_A^2}$$

$\square$

(b) Beh: mit optimalem α_k und $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ gilt:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_A^2 = \|x_k - x^*\|_A^2 \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2 \|d_k\|_{A^{-1}}^2}\right)$$

Bew: I $\phi(x) - \phi(x^*) = (b - Ax, b - Ax)_{A^{-1}} - (b - Ax^*, b - Ax^*)_{A^{-1}}$

$$= (A(x^* - x), A(x^* - x))_{A^{-1}} = \|x^* - x\|_A^2.$$

II $\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) = (b - Ax_{k+1}, b - Ax_{k+1})_{A^{-1}} - (b - Ax_k, b - Ax_k)_{A^{-1}}$

$$= (A(x_k - x_{k+1}), -A(x_k - x_{k+1}))_{A^{-1}} = -\|x_k - x_{k+1}\|_A^2$$

$$= -\|x_k - (x_k + \alpha_k d_k)\|_A^2 = -\alpha_k^2 \|d_k\|_A^2 = -\frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^4}\|d_k\|_A^2$$

$$= -\frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2}$$

III $e_k = x^* - x_k$, $Ae_k = r_k = b - Ax_k$

$$\|e_{k+1}\|_A^2 = \phi(x_{k+1}) - \phi(x^*) = \phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) + \phi(x_k) - \phi(x^*)$$

$$= -\frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2} + \|x^* - x_k\|_A^2 = \|x^* - x_k\|_A^2\left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2 \|e_k\|_A^2}\right)$$

IV $\|e_k\|_A^2 = (e_k, r_k) = (A^{-1} r_k, r_k)$ $\square$

(c) Vor: $\kappa = \mathrm{cond}_2(A) = \lambda_{min}^{-1} \lambda_{max}$

falsche Ugl. auf ÜB

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \frac{(x \cdot Ax)(x \cdot A^{-1}x)}{\|x\|^4} \leq \frac{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2}{4\lambda_{min}\lambda_{max}}$$ (Kantorowitsch-Ugl.)

Beh: $\|x_{k+1} - x^*\|_A \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right) \|x^k - x^*\|_A.$

Bew: Nach (b) gilt:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_A^2 \overset{(b)}{\leq} \|x^k - x^*\|_A^2 \left(1 - \frac{4\lambda_{min}\lambda_{max}}{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2}\right)$$

$$= \|x^k - x^*\|_A^2 \left(\frac{\lambda_{min} - \lambda_{max}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \|x_{k+1} - x^*\|_A \leq \left(\frac{\lambda_{min} - \lambda_{max}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}\right) \|x_k - x^*\|_A$$

$$= \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right) \|x_k - x^*\|_A$$

$\square$

Aufgabe 5) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} x_2$ mit $x_1^2+x_2^2-1=0$

(a) $\mathcal{L}(x,\lambda)=x_2-\lambda\underbrace{(x_1^2+x_2^2-1)}_{=:h(x)}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)=0 \\ \mathrm{II} & h(x^*)=0 \end{array}\right\} \text{KKT-Bedingungen}$$

$$\mathrm{I}:\ \nabla_x\mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 2\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1=0,\ \lambda x_2=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{II}:\ h(x)\overset{!}{=}0 \Rightarrow x_2=\pm 1 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

<u>KKT-Punkte:</u> $z_{1,2}=[0,\pm 1,\pm\frac{1}{2}]$

<u>SOSC:</u> $\nabla_x^2\mathcal{L}(x,\lambda) = -2\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Zu prüfen, ob $p^T\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)p>0\ \forall p\in\mathcal{F}(x^*)=\{p \mid \nabla g(x^*)^T p=0\}$

$\Rightarrow \mathcal{F}(z_1)=\mathcal{F}(z_2)=\{p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2 \mid p_1=0\}$

mit $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda) = -\lambda\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ folgt, dass z_2 Minimum ist.

(b) Definiere $F(z)=\begin{bmatrix}\nabla_x\mathcal{L}(x,\lambda)\\h(x)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\lambda x_1\\-2\lambda x_2\\x_1^2+x_2^2-1\end{pmatrix}$

$$J(z)=\underbrace{\begin{bmatrix}\nabla_x^2\mathcal{L} & \nabla h\\ \nabla h^T & 0\end{bmatrix}}_{\text{KKT-Matrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\nabla_x\mathcal{L}\\h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\nabla_x^2\mathcal{L} & \nabla h\\ \nabla h^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_k\\-(\lambda-\lambda_k)\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-2\lambda_k x_{k_1}\\1-2\lambda_k x_{k_2}\\(x_{k_1})^2+(x_{k_2})^2-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\lambda_k & 0 & 2x_{k_1}\\ 0 & -2\lambda_k & 2x_{k_2}\\ 2x_{k_1} & 2x_{k_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{k+1}-x_k\\-(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\end{bmatrix}=0$$

(c) $[x_0,\lambda_0]=[0,-\frac{1}{2},1]$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0\\1-2\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2})\\(-\frac{1}{2})^2-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\cdot 1 & 0 & 0\\ 0 & -2\cdot 1 & 2\cdot(-\frac{1}{2})\\ 0 & 2\cdot(-\frac{1}{2}) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1_1}-0\\x_{1_2}+\frac{1}{2}\\-(\lambda_1-1)\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2+\frac{1}{2}\\-\lambda_1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\mathrm{I}\ x_1=0\\ \mathrm{II}\ -2(x_2+\frac{1}{2})-(1-\lambda_1)=2\\ \mathrm{III}\ -(x_2+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\end{array} \Rightarrow x_2=-\frac{5}{4} \Rightarrow \lambda_1=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow [x_1,\lambda_1]=[0,-\frac{5}{4},\frac{3}{2}]$$