Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 1

Bisher waren Vektoren gerichtete Strecken, die man anschaulich addieren und mit einem Faktor multiplizieren kann und die natürlich als physikalische Größen, z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft usw., vorkommen. Bekannt war auch deren Darstellung mit n-Tupeln in einem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Nun haben wir Vektorräume als abstrakte Objekte eingeführt, in denen die Addition und die Skalarmultiplikation existieren und analoge Eigenschaften wie in $\mathbb{R}^n$ besitzen. Dies ist nützlich, weil in diesem Rahmen weitere Objekte wie z. B. Fuktionenräume und Folgenräume passen. Für uns wird besonders wichtig sein, dass man mit Vektorräumen die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen vollständig beschreiben kann.

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 24. und 26. April in den Übungen besprochen.

1. Sei V die Menge aller reellen Folgen.

(a) Zeigen Sie, dass V mit gliedweise definierten Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum ist.

(b) Ist V ein Spezialfall eines in der Vorlesung definierten Vektorraumes?

(c) Untersuchen Sie, ob folgende Mengen Untervektorräume von V sind:

- die Menge aller beschränkten Folgen,
- die Menge aller gegen 1 konvergenten Folgen,
- die Menge aller konvergenten Folgen.

2. Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

(a) $\begin{pmatrix} -12 \\ 43 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2018 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$,

Bilden Sie eine Basis des jeweiligen Raumes?

3. Sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(b) die Menge aller Polynome mit Nullstellen -1, 1 und 4 im Vektorraum aller reellen Polynome,

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : xyz = 0 \right\}$ in $\mathbb{R}^3$,

(d) die konstantenen Funktion im Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$,

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : 5x + 2z - 3w = 2y - z + 8w = 0 \right\}$ in $\mathbb{R}^4$.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 27. April 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es sei V ein reeller Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Ist $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $\boldsymbol{v} \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{g}_i = v_1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + v_n \boldsymbol{g}_n.$$

(b) Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so existieren zu jedem $\boldsymbol{v} \in V$ eindeutig bestimmte $\boldsymbol{u}_1 \in U_1$ und $\boldsymbol{u}_2 \in U_2$, so dass

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$

2. Bilden die folgenden Vektoren jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. Es sei $\mathscr{A} : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Zeigen Sie, dass der Kern von $\mathscr{A}$ ein Untervektorraum in V und das Bild von $\mathscr{A}$ ein Untervektorraum in W ist.

4. Sind die nachstehenden Abbildungen linear?

(a) $\mathscr{A} : \{\text{Polynome mit reellen Koeffizienten}\} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathscr{A}(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix},$

(b) $\mathscr{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathscr{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ x^2 + y^2 \\ 5x \end{pmatrix},$

(c) $\mathscr{C} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad \mathscr{C}(f) := f \cdot \sin.$
($\mathscr{C}$ ordnet also einer beliebigen glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x)\sin x$ zu.)