Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 10

Mit dem n-dimensionalen Riemann-Integral können wir Skalarfelder über Jordan-messbare Mengen in $\mathbb{R}^n$ integrieren. Unter anderem können wir somit Flächeninhalte von Flächen in $\mathbb{R}^2$ und Volumina von Körpern in $\mathbb{R}^3$ ausrechnen. Allerdings ist aber das Integral über Mengen von kleineren Dimensionen gleich 0. Kurven und Oberflächen in $\mathbb{R}^3$ haben 3-dimensionales Volumen 0, trotzdem haben Sie aber eine positive Länge bzw. einen positiven Flächeninhalt, die wir berechnen wollen.

Dafür definieren wir noch Kurven- und Oberflächenintegrale, und zwar nicht nur für Skalarfelder sondern auch für Vektorfelder. Kurvenintegrale der Gradientenfelder haben eine wichtige Eigenschaft: Sie hängen nur vom Start- und Endpunkt ab. Das kennen wir bereits aus der Physik, wo die geleistete Arbeit der Gravitations- oder Coloumbkraft sich als Differenz der potentiellen Energien ausrechnen lässt.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 13. Juli 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

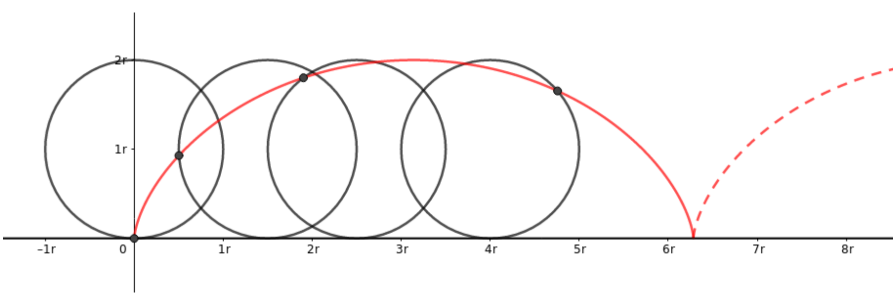
1. Skizzieren Sie

(a) die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2\}$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt,

(b) die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 4z^2\}$ und berechnen Sie ihr Volumen.

Hinweis: Polar- und Kugelkoordinaten.

2. Beim Rollen einer Walze mit Radius r beschreibt ein beliebiger Punkt auf deren Kante die auf dem Bild gezeichnete Kurve.



Diese Kurve heißt Zykloide und besitzt die Parametrisierung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Länge des ersten Zweiges der Zykloide $\boldsymbol{\gamma}$, also den Weg, den der Punkt bis zur nächsten Berührung des Bodens zurücklegt. (Auf dem Bild ist $\boldsymbol{\gamma}$ die rote durchgezogene Linie.)

(b) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{F}(x, y) := \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

dessen Kurvenintegral längs $\boldsymbol{\gamma}$.

3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind. Falls ja, berechnen Sie noch deren Potential.

(a) $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A}(x, y) := \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 2x - 4y \end{pmatrix},$

(b) $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{B}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \end{pmatrix},$

(c) $\boldsymbol{C} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{C}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix},$

4. Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, f ein C^2-Skalarfeld auf Ω und $\boldsymbol{F}$ ein C^2-Vektorfeld auf Ω. Zeigen Sie die folgenden Identitäten auf Ω:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$,

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \triangle f$,

(c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0$,

(d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{F}) - \triangle \boldsymbol{F}$.