Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Lösung der Klausur zur Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

7. September 2018

1. Aufgabe [1+4+3=8 Punkte]

(a) Das System ist äquivalent zu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: 1 Punkt

(b) Im Kern liegen genau die Lösungen zu $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Wir wollen die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

zur Zeilenstufenform bringen. Dabei dürfen wir die Zeilen vertauschen, zu einer Zeile ein Verfaches von der anderen addieren und mit einem nichttrivialen Skalar multiplizieren. Wenn wir zuerst die letzte Zeile von der ersten zwei abziehen und die Reihefolge verändern, bekommen wir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

was schon die Zeilenstufenform ist. Von unten nach oben muss zuerst $x_4 = 0$ sein und, wegen $x_2 + x_4 = 0$, auch $x_2 = 0$. Als Letztes muss noch $x_1 + x_3 = 0$ gelten. Also

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $\dim \ker A = 1$ und aus $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker A + \operatorname{rank} A$ folgt $\operatorname{rank} A = 3$.

Bewertung: Die richtige Bestimmung des Kerns ist 2 Punkte wert. Die Dimension des Kerns und der Rang bringen noch je einen Punkt.

(c) Hier kann man das Verfahren aus (b) mit neuer rechter Seite wiederholen. Allerdings wissen wir auch, dass allgemeine Lösung sich schreiben lässt als die Summe einer partikulären Lösung und beliebigen Elementes vom Kern. Eine Lösung kann man hier auch erraten, z. B. $x_1 = 0$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, also ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \text{ beliebig.}$$

Bewertung: Insgesamt kann man für diesen Teil 3 Punkte bekommen.

2. Aufgabe [4+1+3=8 Punkte]

(a) Für 2×2-Matrizen können wir Determinante direkt berechnen:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 = 13.$$

Die Matrix B ist eine obere Dreiecksmatrix. Für solche Matrizen ist Determinante nach der Vorlesung das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 4 = -8.$$

Determinante von C berechnen wir mit Hilfe der Laplace-Entwickelung, z. B. zuerst nach der zweiten Spalte und dann nach der zweiten Zeile:

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -7 & 1 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot (-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Bewertung: Determinanten von A und B sind je einen Punkt wert, die von C zwei.

(b) Eine Matrix ist invertierbar genau dann, wenn ihre Determinante nicht gleich 0 ist. Also sind A und B invertierbar und C nicht.

Bewertung: Richtige Antwort mit der Begründung ist einen Punkte wert.

(c) Für 2×2-Matrizen gilt nach der Vorlesung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Also

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für B schreiben wir die durch die Identitätsmatrix erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir teilen die letzte Zeile durch 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right),$$

ziehen das Zweifache der letzten Zeile von der zweiten Zeile ab

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right),$$

ziehen noch die zweite und dritte Zeile von der ersten ab

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

und teilen die ersten Zeile durch -2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Bewertung: Die Inverse von A bringt einen, die von B zwei Punkte.

3. Aufgabe [3+5=8 Punkte]

(a) Weil $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ und $\underline{G}$ drei Elemente hat, müssen wir nur zeigen, dass $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ und $\boldsymbol{g}_3$ linear unabhängig sind. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha \boldsymbol{g}_1 + \beta \boldsymbol{g}_2 + \gamma \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{0}$. Dann

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichheit der ersten Komponenten folgt $\gamma = 0$. Dann ergibt die zweite Zeile $\beta = 0$ und schließlich $\alpha = 0$.

Bewertung: Die lineare Unabhängigkeit ist 2 Punkte wert und die Begründung, warum sie reicht, einen.

(b) $\mathrm{Vekt}(\boldsymbol{v}, \underline{G})$ kann man ohne Formel bestimmen, weil offensichtlich $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}_3 - \boldsymbol{g}_2$. Also

$$\mathrm{Vekt}(\boldsymbol{v}, \underline{G}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sieht man das nicht, so kann man die Formel aus der Vorlesung verwenden.

Für $\mathrm{Mat}(A, \underline{G}, \underline{G})$ haben wir die Formel

$$\mathrm{Mat}(A, \underline{G}, \underline{G}) = T^{-1} A T$$

wobei T die Transformationsmatrix des Basiswechsels von der Standardbasis zu $\underline{G}$ ist, also

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen zuerst die Inverse von T bestimmen. Wir vertauschen die erste und dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots$$

ziehen das Zweifache der dritten Zeile von der zweiten Zeile ab und anschließen noch das Zweifache der zweiten Zeile und das Dreifache der dritten Zeile von der ersten Zeile ab:

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$\mathrm{Mat}(A, \underline{G}, \underline{G}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: Die Transformationsmatrix und deren Inverse bringen je einen Punkt. Die Komponenten von $\boldsymbol{v}$ sind einen und die von A 2 Punkte wert.

4. Aufgabe [5+1+2=8 Punkte]

(a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\Big((2-\lambda)^2 - 1\Big) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 1, 2 und 3. Die entsprechenden Eigenvektoren sind:

- im Kern von $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ liegt z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- aus dem Kern von $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nehmen wir $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- und im Kern von $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bewertung: Das charakteristische Polynom mit seinen Nullstellen ist 2,5 Punkte wert. Die Eigenvektoren bringen je einen halben Punkt und die Eigenräume insgesamt einen Punkt.

(b) Ja, die Matrix ist ähnlich zur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Die Reihenfolge der Diagonalelemente ist beliebig.)

Bewertung: 1 Punkt

(c) Nein, denn eine Matrix ist orthogonal genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis bilden. Das ist aber nicht der Fall. Z. B., die Länge der ersten Spalte ist $\sqrt{5}$.

Bewertung: 2 Punkte

5. Aufgabe [7+1+2=10 Punkte]

(a) Lokale Extrema sind kritische Punkte, also muss $Df = 0$ gelten. Die Jacobimatrix ist

$$Df(x,y) = (e^x(x^2 - 2y^2 + 2x)\ ,\ e^x(-4y)).$$

Aus

$$(e^x(x^2 - 2y^2 + 2x)\ ,\ e^x(-4y)) = (0,0)$$

folgt $y = 0$ und $x^2 + 2x = 0$, also $x \in \{-2, 0\}$. Die Kandidaten für lokale Extrema sind folglich $(-2,0)$ und $(0,0)$. Die Hesse-Matrix ist

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & e^x(-4y) \\ e^x(-4y) & e^x(-4) \end{pmatrix}.$$

Weil

$$Hf(-2,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & -4e^{-2} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist, sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente. Beide sind negativ, also ist $Hf(-2,0)$ eine negativ definite Matrix. Demnach befindet sich in $(-2,0)$ ein lokales Maximum mit $f(-2,0) = 4e^{-2}$.

Weiterhin ist

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Erneut haben wir eine Diagonalmatrix. Weil die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben, handelt es sich um kein lokales Extremum.

Bewertung: Die Berechnung aller Kandidaten für Extrema ist 3 Punkte wert. Die Hesse-Matrix bringt einen Punkt und die Analysis jedes Kandidaten je 1,5 Punkte.

(b) Nein, die Funktion ist in beiden Richtungen unbeschränkt. Auf der Abszisse gilt

$$f(t,0) = e^t t^2 \to \infty, \quad \text{wenn } t \to \infty.$$

Auf der Ordinate hat man hingegen

$$f(0,t) = -2t^2 \to -\infty, \quad \text{wenn } t \to \infty.$$

Bewertung: 1 Punkt

(c) Das zweite Taylor-Polynom um $(0,0)$ ist

$$\begin{aligned} T_2 f((x,y));(0,0)) &= f(0,0) + Df(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= 0 + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ -4y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

Bewertung: 2 Punkte

6. Aufgabe [6 Punkte]

Die Funktion, die wir minimieren müssen, ist

$$f(x,y) = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = x^2 + (y-1)^2,$$

und zwar unter der Nebenbedingung $b(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$. Für jeden Punkt auf der Ellipse ist

$$\operatorname{grad} b(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{9} \\ \frac{2y}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also dürfen wir das Resultat aus der Vorlesung benutzen. In Extrema gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} b(x,y)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, also

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{2x}{9} \\ \frac{2y}{4} \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung heißt

$$2x = \lambda \frac{2x}{9}.$$

Es gibt zwei Möglichkeiten: $x = 0$ oder $\lambda = 9$.

- Die erste ergibt $y = \pm 2$. Der Abstand von $(0,2)$ zu $(0,1)$ ist 1 und von $(0,-2)$ ist 3.
- Ist $\lambda = 9$, so folgt aus $2(y-1) = \lambda \frac{2y}{4}$, dass $y = -\frac{4}{5}$. Solche Punkte können nicht den kleinsten Abstand haben, weil sich schon die y-Koordinaten um $\frac{9}{5}$ unterscheiden, was mehr als 1 ist.

Also liegt $(0,2)$ am nächsten zu $(0,1)$.

Bewertung: Je einen Punkt bringen die Funktion f, die Nebenbedingung b, beide Gradienten (zusammen) und die zuerfüllende Gleichung. Die Analysis ist 2 Punkte wert.

7. Aufgabe [3+3+2=8 Punkte]

(a) Nach der Definitionen ist die Jacobi-Matrix

$$D\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 \\ \partial_1 F_3 & \partial_2 F_3 & \partial_3 F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y\sin z & y^2\cos z \\ 2y\sin z & 2x\sin z & 2xy\cos z \\ y^2\cos z & 2xy\cos z & -xy^2\sin z + 1 \end{pmatrix},$$

die Divergenz

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z) = \operatorname{Spur} D\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2x\sin z - xy^2\sin z + 1$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: 3 Punkte

(b) Weil $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ist und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend (sogar sternförmig) ist, ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld. Wir suchen ein $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{F}$. Also muss gelten

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y,z) \\ \partial_2 u(x,y,z) \\ \partial_3 u(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\sin z \\ 2xy\sin z \\ xy^2\cos z + z \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$u(x,y,z) = \int y^2 \sin z \, dx + C(y,z) = xy^2\sin z + C(y,z).$$

Verwendet man das in der zweiten Zeile, so ergibt sich

$$\partial_2 u(x,y,z) = 2xy\sin z \;\Rightarrow\; 2xy\sin z + \partial_y C(y,z) = 2xy\sin z \;\Rightarrow\; \partial_y C(y,z) = 0.$$

Demnach hängt C nicht von y ab, also $C(y,z) = D(z)$. Noch die letzte Gleichung

$$\partial_3 u(x,y,z) = xy^2\cos z + z \;\Rightarrow\; xy^2\cos z + D'(z) = xy^2\cos z + z \;\Rightarrow\; D'(z) = z.$$

Also $D(z) = \frac{z^2}{2}$. Ein Potential ist

$$u(x,y,z) = xy^2\sin z + \frac{z^2}{2}.$$

Bewertung: Die Antwort mit vollständiger Begründung ist einen Punkt wert, die Herleitung des Potentials zwei.

(c) Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist einfach die Differenz des Potentials im End- und Startpunkt der Kurve, also

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = u(0,1,1) - u(1,0,0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man das Integral auch mit der Definition und Parametrisierung der Kurve ausrechnen (was deutlich aufwendiger ist).

Bewertung: 2 Punkte

8. Aufgabe [4+4 Punkte]

(a) Wir verwenden das Cavalieri'sches Prinzip. Für beliebiges $x \in [-1,1]$ ist $(x,y) \in D$ genau dann, wenn $y \in [-1,x]$ ist. Also

$$\begin{aligned}
\int_D x^{20}y^{18}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} x^{20}y^{18}\,dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^{20}\left[\frac{y^{19}}{19}\right]_{-1}^{x} dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^{20}\left(\frac{x^{19}}{19}+\frac{1}{19}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^{40}}{40\cdot 19}+\frac{x^{21}}{21\cdot 19}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{21\cdot 19}.
\end{aligned}$$

Auch möglich ist die andere Reihenfolge des Integrierens. Dann:

$$\begin{aligned}
\int_D x^{20}y^{18}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{y}^{1} x^{20}y^{18}\,dx\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1} y^{18}\left[\frac{x^{21}}{21}\right]_{y}^{1} dy \\
&= \int_{-1}^{1} y^{18}\left(\frac{1}{21}-\frac{y^{21}}{21}\right) dy \\
&= \left[\frac{y^{19}}{19\cdot 21}-\frac{y^{40}}{40\cdot 21}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{19\cdot 21}.
\end{aligned}$$

Bewertung: Richtige Anwendung des Cavalieri'schen Prinzips und die Berechnung des Integrals sind je 2 Punkte wert.

(b) Hier verwenden wir die Kugelkoordinaten. Die Jacobi-Determinante wurde bereits in der Vorlesung bestimmt. Dann

$$\begin{aligned}
\int_K (x^2+y^2+z^2)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^4 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\ r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr \\
&= \int_0^4 \int_0^\pi r^4 \sin\vartheta\ [\varphi]_0^{2\pi}\ d\vartheta\ dr \\
&= \int_0^4 \int_0^\pi 2\pi r^4 \sin\vartheta\ d\vartheta\ dr \\
&= \int_0^4 2\pi r^4 [-\cos\vartheta]_0^\pi\ dr \\
&= \int_0^4 4\pi r^4\ dr \\
&= 4\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^4 \\
&= \frac{4^6\pi}{5}
\end{aligned}$$

Bewertung: Das Umschreiben in der Kugelkoordinaten ist 3 Punkte wert (Grenzen, Funktion, Jacobi-Determinante). Einen Punkt bringt noch die Ausrechnung.