Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Klausur zur Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

7. September 2018

Vor- und Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Mit meiner Unterschrift erkläre ich mich für **prüfungsfähig**:

Unterschrift: ______________________________

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
8	8	8	8	10	6	8	8	64

Beachten Sie:

- Alle Behauptungen, Berechnungen, Resultate u. Ä. **müssen begründet werden**. Sie dürfen die Resultate aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, müssen sie aber klar anführen.
- Ihre Antworten sollen **eindeutig** sein. Falls Sie erkennen, dass Ihre ursprünglichen Überlegungen falsch waren, kennzeichnen Sie deutlich, was zu berücksichtigen ist.
- Als **Hilfsmittel** ist ein auf beiden Seiten beschriebenes Blatt des A4-Formats erlaubt. Jeder Versuch, andere Mittel zu benutzen, führt zum **automatischen Durchfallen**. Insbesondere müssen alle **Handys, Smartphones, Smartwatches, Tablets und andere Elektrogeräte** ausgeschaltet sein.
- Es sind **64 Punkte** zu erreichen. **30 Punkte** genügen, um die Prüfung zu **bestehen**. Die Punktzahl jeder Aufgabe steht in der obigen Tabelle.

Sie haben 180 Minuten Zeit.

Das ganze Team von Mathematik II wünscht Ihnen

VIEL ERFOLG!

Klausur zur Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens
Aufgabenblatt

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Matrixform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um.

(b) Bestimmen Sie Kern von A, dessen Dimension und Rang von A.

(c) Lösen Sie das obige System, d. h. bestimmen Sie seine allgemeine Lösung.

2. Für die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -7 & 1 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) berechnen Sie deren Determinanten,

(b) bestimmen Sie, ob sie invertierbar sind,

(c) berechnen Sie ggf. deren Inverse.

3. Es seien die Vektoren

$$\boldsymbol{g}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{g}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{g}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und die Matrix } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(in der Standardbasis) gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{G} := (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechnen Sie die Darstellung vom Vektor $\boldsymbol{v}$ und der Matrix A in der Basis $\underline{G}$, also bestimmen Sie $\mathrm{Vekt}(\boldsymbol{v}, \underline{G})$ und $\mathrm{Mat}(A, \underline{G}, \underline{G})$.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ihre Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, welcher Diagonalmatrix ist sie ähnlich?

(c) Ist A orthogonal?

BITTE WENDEN

5. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := e^x(x^2 - 2y^2)$$

(a) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema, d. h. bestimmen Sie deren Art, Position und Wert von f.

(b) Besitzt f ein globales Minimum und Maximum?

(c) Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom von f um $(0, 0)$.

6. Finden Sie den Punkt auf der Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, der am nächsten zum Punkt $(0, 1)$ liegt. Hinweis: Minimieren Sie den quadrierten Abstand zum gegebenen Punkt.

7. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 \sin z \\ 2xy \sin z \\ xy^2 \cos z + z \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie dessen Jacobi-Matrix, Divergenz und Rotation (in beliebigem Punkt).

(b) Ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld? Wenn ja, bestimmen Sie sein Potential.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, wobei $\boldsymbol{\gamma}$ die Strecke von $(1, 0, 0)$ bis $(0, 1, 1)$ ist.

8. Berechnen Sie die folgenden Riemann-Integrale:

(a) $\displaystyle\int_D x^{20} y^{18} \; dx \; dy,$
wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit Ecken $(-1, -1)$, $(1, -1)$ und $(1, 1)$ ist,

(b) $\displaystyle\int_K (x^2 + y^2 + z^2) \; dx \; dy \; dz,$
wobei $K \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 4 ist.