Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Lösung der Nachklausur zur Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

20. März 2019

1. Aufgabe [1+4+3=8 Punkte]

(a) Das System ist äquivalent zu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: 1 Punkt

(b) Da A quadratisch ist, ist sie als Abbildung injektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist. Eine Möglichkeit, das zu prüfen, ist durch Zeilenstufenform. So können wir gleichzeitig auch die Lösung bestimmen.

Wir wollen die erweiterte Matrix zur Zeilenstufenform bringen. Dabei dürfen wir die Zeilen vertauschen, zu einer Zeile ein Vielfaches von der anderen addieren und mit einem nichttrivialen Skalar multiplizieren. Wenn wir zuerst die zweite Zeile zur dritten Zeile und ihr Zweifaches zur ersten Zeile addieren, bekommen wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & 16 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & 11 & -3 \\ 0 & 7 & 16 & 2 \end{array}\right),$$

wo wir noch die zweite Zeile mit der ersten vertauscht haben. Jetzt ziehen wir nur noch die zweite Zeile von der dritten ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & 11 & -3 \\ 0 & 7 & 16 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

Die Matrix A hat eine vollen Rang, also ist sie als Abbildung surjektiv und injektiv.

Bewertung: Dieser Teil ist 4 Punkte wert.

(c) Wir bekommen auch gleich die Lösung. Aus der letzten Zeile folgt $x_3 = 1$. Dann heißt die zweite Gleichung

$$7x_2 + 11 \cdot 1 = -3, \quad \text{also} \quad x_2 = -2.$$

Noch die erste Gleichung:

$$-x_1 + 2 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 = -2 \quad \text{und somit} \quad x_1 = 5.$$

Bewertung: Insgesamt kann man für diesen Teil 3 Punkte bekommen. Der Lösungsweg ist beliebig.

2. Aufgabe [4+1+3=8 Punkte]

(a) Für 2×2-Matrizen können wir Determinante direkt berechnen:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 25 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 25 \cdot (-2) = 80.$$

Determinante von B berechnen wir mit Hilfe der Laplace-Entwickelung, und zwar zuerst nach der ersten Zeile und dann nach der zweiten:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

Die ersten zwei Zeilen von C sind linear abhängig, also ist $\det C = 0$.

Bewertung: Determinanten von B und C sind je 1,5 Punkte wert, die von A einen.

(b) Eine Matrix ist invertierbar genau dann, wenn ihre Determinante nicht gleich 0 ist. Also sind A und B invertierbar und C nicht.

Bewertung: Richtige Antwort mit der Begründung ist einen Punkte wert.

(c) Für 2×2-Matrizen gilt nach der Vorlesung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Also

$$A^{-1} = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -25 & 3 \end{pmatrix}$$

Für B schreiben wir die durch die Identitätsmatrix erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 2 und die letzte durch 4 und vertauschen die erste und sie letzte Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \dots$$

ziehen noch die zweite von der ersten ab und dann die dritte von der zweiten ab

$$\dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: Die Inverse von A bringt einen, die von B zwei Punkte.

3. Aufgabe [6+2+1=9 Punkte]

(a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5-\lambda)\Big(\lambda^2 - 3\lambda - 4\Big) = (5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also -1, 4 und 5. Weil die Matrix symmetrisch ist, sie die Eigenräume orthogonal. Die entsprechenden Eigenvektoren sind:

- im Kern von $A + I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ liegt z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- aus dem Kern von $A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nehmen wir $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- und im Kern von $A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ liegt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Um eine Orthonormalbasis zu bekommen, müssen wir sie noch normieren. Die ersten zwei haben Länge $\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}$, und der dritte 1. So erhalten wir eine Orthonormalbasis

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bewertung: Das charakteristische Polynom mit seinen Nullstellen ist 2,5 Punkte wert. Die Eigenvektoren bringen je einen halben Punkt und deren Normierung insgesamt einen Punkt. Den letzten Punkt ist die Begründung bzw. Überprüfung der Orthogonalität wert.

(b) Eine Mögliche Wahl ist

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bewertung: 2 Punkte

(c) Es gibt sowohl positive als auch negative Eigenwerte. Die Matrix ist weder positiv noch negativ definit.

Bewertung: 1 Punkt

4. Aufgabe [5+2=7 Punkte]

(a) Weil $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ist die Mächtigkeit jeder Basis 3. Deswegen ist $\underline{A}$ keine Basis. Für Tripel muss man lineare Unabhängigkeit zeigen. $\underline{B}$ ist keine Basis, weil die Summe der ersten zwei Elementen das dritte ist. Schauen wir uns noch $\underline{C}$ an: Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus den Gleichheiten der ersten und der zweiten Komponenten folgt $\alpha = \beta = \gamma$. Dann folgt aus der dritten Gleichheit, dass alle 0 sind. Folglich ist $\underline{C}$ eine Basis.

Bewertung: Einen Punkt ist die Antwort für $\underline{A}$ und je 2 für $\underline{B}$ und $\underline{C}$.

(b) $\mathrm{Vekt}(\boldsymbol{v}, \underline{C})$ kann man ohne Formel bestimmen, weil offensichtlich $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Also

$$\mathrm{Vekt}(\boldsymbol{v}, \underline{C}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Sieht man das nicht, so kann man die Formel aus der Vorlesung verwenden.

Bewertung: 2 Punkte

5. Aufgabe [2+3+2=7 Punkte]

(a) Die Niveaumenge zu einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist die Mengen aller Punkte (x, y) mit $f(x, y) = c$. Hier ist die Niveaumenge zu einer positiven Zahl c die Kreislinien mit Mittelpunkt $(1, 0)$ und Radius $\sqrt{c}$.

Bewertung: 2 Punkte

(b) Weiterhin ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Wir können einfach

$$\operatorname{grad} f(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} f(3, 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} f(4, 0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zeichnen. (Wichtig ist, das der Gradient eindeutig senkrecht auf Niveaumenge ist.)

Bewertung: Die Berechnung des Gradienten, sein Wert in 3 Punkten und das richtige Skizze bringen je einen Punkt.

(c) Die Funktion ist nach oben unbeschränkt. Z. B. auf der Ordinate ist

$$f(0, t) = t^2 \to \infty, \quad \text{wenn } t \to \infty.$$

Nach unten ist sie offensichtlich beschränkt, weil sie nicht-negativ ist. Sie nimmt den Wert 0 an, und zwar (nur) in $(1, 0)$. Also hat sie ein Minimum.

Bewertung: 2 Punkte

6. Aufgabe [2+2+4=8 Punkte]

Die notwendige Bedingung ist $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ für alle $i \neq j$. In Dimension 3 ist das äquivalent zur Bedingung, dass die Rotation des Vektorfeldes gleich 0 ist.

(a) Da

$$\partial_2 A_1 = 0, \quad \partial_1 A_2 = 3x^2,$$

ist $\boldsymbol{A}$ kein Gradientenfeld.

(b) Es gilt

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 \\ \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 \\ \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^2+y^2+1} - 2z\sin(xy) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Bereits die erste Komponente ist nicht 0, also müssen wir die anderen nicht ausrechnen. Auch $\boldsymbol{B}$ ist kein Gradientenfeld.

(c)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{C}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 C_3 - \partial_3 C_2 \\ \partial_3 C_1 - \partial_1 C_3 \\ \partial_1 C_2 - \partial_2 C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - 2z \\ 0 - 0 \\ 4x^3 - 4x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $\operatorname{rot} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ ist und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend (sogar sternförmig) ist, ist $\boldsymbol{C}$ ein Gradientenfeld. Wir suchen ein $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{C}$. Also muss gelten

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y,z) \\ \partial_2 u(x,y,z) \\ \partial_3 u(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 y \\ x^4 + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$u(x,y,z) = \int 4x^3 y \; dx + c(y,z) = x^4 y + c(y,z).$$

Verwendet man das in der zweiten Zeile, so ergibt sich

$$\partial_2 u(x,y,z) = x^4 + z^2 \;\Rightarrow\; x^4 + \partial_y c(y,z) = x^4 + z^2 \;\Rightarrow\; \partial_y c(y,z) = z^2.$$

Also

$$c(y,z) = \int z^2 \; dy = yz^2 + d(z)$$

Noch die letzte Gleichung

$$\partial_3 u(x,y,z) = 2yz \;\Rightarrow\; 2yz + d'(z) = 2yz \;\Rightarrow\; d'(z) = 0.$$

Also ist d eine Konstante und kann gleich 0 genommen werden. Ein Potential ist

$$u(x,y,z) = x^4 y + yz^2.$$

Bewertung: Die Teile (a) und (b) sind 2 Punkte wert. Bei (c) bekommt man 2 Punkte für die Feststellung und 2 für das Potential.

7. Aufgabe [1+4+3=8 Punkte]

(a) Am Anfang ist $t = 0$, also ist der Startpunkt $(1, 0)$.

Bewertung: 1 Punkt

(b) Die Länge ist gegeben durch

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^1 |\boldsymbol{\gamma}'(t)| \; dt.$$

Aus

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}(1-t)^{1/2} \\ \frac{3}{2}t^{1/2} \end{pmatrix}$$

und

$$|\boldsymbol{\gamma}'(t)| = \sqrt{\big(-\tfrac{3}{2}(1-t)^{1/2}\big)^2 + \big(\tfrac{3}{2}t^{1/2}\big)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4}(1-t+t)} = \tfrac{3}{2}$$

folgt

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^1 \frac{3}{2} \; dt = \frac{3}{2}.$$

Bewertung: Je einen Punkt bringen die Formel mit richtigen Grenzen, $\boldsymbol{\gamma}'$, dessen Betrag und das richtige Resultat.

(c) Nach der Definition gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) \; dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^{3/2}t^3 \\ t^{3/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}(1-t)^{1/2} \\ \frac{3}{2}t^{1/2} \end{pmatrix} \; dt \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}(-(1-t)^2t^3 + t^2) \; dt \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}(-t^3 + 2t^4 - t^5 + t^2) \; dt \\
&= \frac{3}{2}\left[-\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{19}{40}
\end{aligned}$$

Bewertung: Je einen Punkt bringen die Formel mit richtigen Grenzen, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma})$ und das Ausrechnen.

8. Aufgabe [1+4+4=9 Punkte]

(a) **Bewertung:** 1 Punkt

(b) Hier verwenden wir die Polarkoordinaten. Die Jacobi-Determinante wurde bereits in der Vorlesung bestimmt. Dann

$$\begin{aligned}
\int_K (x^2 - 2y + y^2)\; dx\; dy &= \int_0^2 \int_0^\pi (r^2 - 2r\sin\varphi)\; r\; d\varphi\; dr \\
&= \int_0^2 \int_0^\pi (r^3 - 2r^2\sin\varphi)\; d\varphi\; dr \\
&= \int_0^2 \left[r^3\varphi + 2r^2\cos\varphi\right]_0^\pi\; dr \\
&= \int_0^2 (r^3\pi - 4r^2)\; dr \\
&= \left[\pi\frac{r^4}{4} - 4\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \\
&= 4\pi - \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

Bewertung: Das Umschreiben in der Polarkoordinaten ist 3 Punkte wert (Grenzen, Funktion, Jacobi-Determinante). Einen Punkt bringt noch die Ausrechnung.

(c) K ist eine kompakte Menge und f eine stetige Funktion, also nimmt sie ihre Extrema an. Im Inneren sind Kandidaten für Extrema die stationären Punkte, d. h. die Nullstellen des Gradienten. Der Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y-2 \end{pmatrix},$$

hat die einzige Nullstelle in $(0,1)$ (die tatsächlich im Inneren liegt). Dort ist $f(0,1) = -1$.

Der Rand besteht aus zwei Teilen: aus einer Strecke auf der Abszisse und aus einem Kreisbogen. Auf der Strecke ist $y = 0$ und somit $f(x,0) = x^2$. Hier kann die Funktion kein Minimum annehmen und ist maximal in $(\pm 2, 0)$ mit dem Wert $f(\pm 2, 0) = 4$. Auf dem Kreisbogen ist $x^2 + y^2 = 4$, also $f(x,y) = 4 - 2y$. Da $y \in [0,2]$, ist sie nicht negativ (also kein Minimum hier) und hat den größten Wert bei $y = 0$ (was wir schon bei der Strecke berücksichtigt haben). Folglich

- Das Minimum von f in K ist -1 und wird im Punkt $(0,1)$ angenommen,
- das Maximum beträgt 4 und wird in Punkten $(\pm 2, 0)$ angenommen.

Bewertung: Die Bestimmung der stationären Punkte bringt einen Punkt, die Untersuchung des Randes 2 Punkte und die Antwort einen Punkt.