Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Nachklausur zur Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

20. März 2019

Vor- und Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Mit meiner Unterschrift erkläre ich mich für **prüfungsfähig**.

Unterschrift: ______________________________

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Gesamt**
8	8	9	7	7	8	8	9	64

Beachten Sie:

- Alle Behauptungen, Berechnungen, Resultate u. Ä. **müssen begründet werden**. Sie dürfen die Resultate aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, müssen sie aber klar anführen.
- Ihre Antworten sollen **eindeutig** sein. Falls Sie erkennen, dass Ihre ursprünglichen Überlegungen falsch waren, kennzeichnen Sie deutlich, was zu berücksichtigen ist.
- Als **Hilfsmittel** ist ein auf beiden Seiten beschriebenes Blatt des A4-Formats erlaubt. Jeder Versuch, andere Mittel zu benutzen, führt zum **automatischen Durchfallen**. Insbesondere müssen alle **Handys, Smartphones, Smartwatches, Tablets und andere Elektrogeräte** ausgeschaltet sein.
- Es sind **64 Punkte** zu erreichen. **30 Punkte** genügen, um die Prüfung zu **bestehen**. Die Punktzahl jeder Aufgabe steht in der obigen Tabelle.

Sie haben 180 Minuten Zeit.

Das ganze Team von Mathematik II wünscht Ihnen

VIEL ERFOLG!

Nachklausur zur Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens
Aufgabenblatt

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= 1 \\ -x + 2y + 7z &= -2 \\ x + 5y + 9z &= 4 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Matrixform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um.

(b) Untersuchen Sie A (aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Lösen Sie das obige System, d. h. bestimmen Sie seine allgemeine Lösung.

2. Für die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 25 & 10 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 8 & -8 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) berechnen Sie deren Determinanten,

(b) bestimmen Sie, ob sie invertierbar sind,

(c) berechnen Sie ggf. deren Inverse.

3. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = QDQ^T$.

(c) Ist A positiv bzw. negativ definit?

4. Gegeben seien

- $\underline{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$,
- $\underline{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$,
- $\underline{C} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Welche der obigen Tupel sind Basen von $\mathbb{R}^3$?

(b) Bestimmen Sie die Darstellung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in allen Tupeln, die Basen sind.

BITTE WENDEN

5. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := (x-1)^2 + y^2.$$

(a) Zeichnen Sie drei nichtleere Niveaumengen.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f und zeichnen Sie ihn in wenigstens einem Punkt auf jeder Niveaumengen.

(c) Besitzt f ein globales Minimum und Maximum? Wenn ja, berechnen Sie dessen Wert und Position.

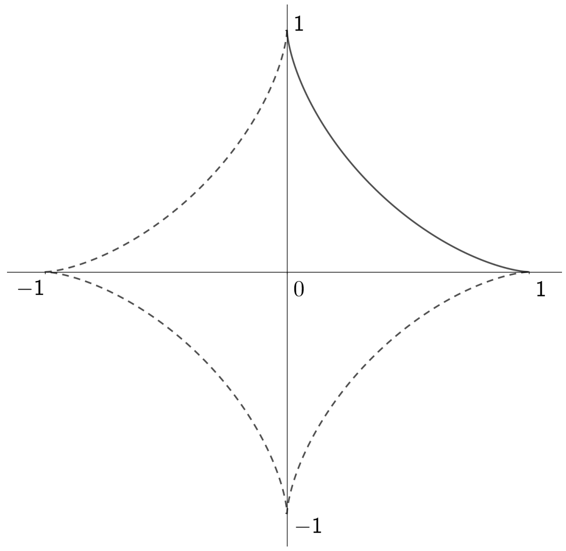
6. Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind. Falls ja, berechnen Sie noch deren Potentiale.

(a) $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A}(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 + y \end{pmatrix},$

(b) $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{B}(x,y) := \begin{pmatrix} z^2 \cos(xy) \\ z^2 \sin(xy) \\ \log(x^2 + y^2 + 1) \end{pmatrix},$

(c) $\boldsymbol{C} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{C}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 4x^3 y \\ x^4 + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}.$

7. Auf dem Bild ist die Sternkurve abgebildet. Es sei $\boldsymbol{\gamma}$ das Teilstück, das im ersten Quadranten liegt (also die durchgezogene Linie).



Dessen Parametrisierung ist

$$\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^{3/2} \\ t^{3/2} \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Orientierung bestimmt diese Parametrisierung?

(b) Berechnen Sie die Länge von $\boldsymbol{\gamma}$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral längs $\boldsymbol{\gamma}$ vom Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{F}(x,y) := \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \end{pmatrix}.$$

8. Gegeben seien die Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, \; y \geq 0\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 - 2y + y^2$.

(a) Skizzieren Sie die Menge K.

(b) Berechnen Sie das Riemannsche Integral $\displaystyle\int_K f(x,y)\; dx\; dy$. (Tipp: Polarkoordinaten.)

(c) Bestimmen Sie die Extrema von f in K.